Sinds twee jaar wordt op twee Profi-scholen een aangepast Wiskunde A examen afgenomen, met het oog op het nieuwe domein Discrete Dynamische Modellen voor het E&M profiel van het VWO. **Paul Drijvers** en **Heleen Verhage** bespreken de resultaten van de experimentele DDM-examenopgave van het afgelopen examen.

Discrete Dynamische Modellen op het eindexamen

Inleiding

Eén van de nieuwe elementen in het wiskundeprogramma voor het profiel Economie & Maatschappij van het VWO is het domein Discrete Dynamische Modellen. In dit domein wordt onder meer aandacht besteed aan economische toepassingen van (stelsels) differentievergelijkingen en recurrente betrekkingen. Eerder (zie [1]) is de inhoud van dit domein in de Nieuwe Wiskrant globaal beschreven. Al enkele jaren maakt Discrete Dynamische Modellen deel uit van het wiskunde A-programma van twee Profi-proefscholen, het Cals College in Nieuwegein en het Liemers College in Zevenaar. In VWO-5 werken de leerlingen een lespakket door (zie [2]) en bij wijze van examenvoorbereiding is er voor VWO-6 een opgavenbundel beschikbaar (zie [3]).
Het eerste tijdvak van het aangepaste examen wiskunde A van 1999 bevat een opgave die geheel aan Discrete Dynamische Modellen is gewijd. In dit artikel zetten we de resultaten van deze opgave op een rij.

Globale resultaten

De tekst van de opgave, getiteld 'Het verspreiden van nieuwtjes', staat op de volgende pagina.

De opgave kent zes onderdelen en vervangt opgave 4 (over het leveren van ijs) van het reguliere examen. In totaal zijn er met de vervangende DDM-opgave evenveel punten te verdienen als met de ijs-opgave, namelijk 19. Dit maximum wordt natuurlijk zelden of nooit gehaald: de gemiddelde score van de 135 kandidaten die aan het experimentele examen meedoen, ligt op 9,26 van de 19 punten. De reguliere ijs-opgave brengt het er met een gemiddelde van 12,8 punten beter vanaf, maar bij die opgave hadden twee van de vier onderdelen wel een zeer hoge p'-waarde. (De p'-waarde geeft aan hoeveel procent de gemiddelde score op een vraag is van de maximumscore.) Omdat de leerlingen van de proefscholen op de andere vragen vergelijkbaar scoren met de kandidaten uit de rest van het land, heeft de CEVO besloten voor de experimentele opgave 4 punten bij te tellen.

De tabel hieronder geeft voor de zes deelvragen van de experimentele opgave de maximale scores, de gemiddeldes en de p'-scores per deelvraag.

Vraag	Maximum	Gemiddelde	p'-score
11	2	1,48	74
12	4	1,32	33
13	3	1,26	42
14	4	2,68	67
15	3	1,98	66
16	3	0,54	18

In het oog springt dat de vragen 12, 13 en 16 matig tot slecht gemaakt zijn, terwijl 11, 14 en 15 behoorlijk scoren. Laten we eens kijken wat daarvoor de redenen zouden kunnen zijn.

De deelvragen langs

Vraag 11 komt neer op het substitueren van $t = 0$ in de differentievergelijking voor D. De aldus gevonden fractie van 0.32 moet nog worden vermenigvuldigd met het totale aantal van 210. Dat geeft 67.2, afgerond tot 67. In het algemeen levert deze vraag niet veel problemen op. Een enkeling lijkt niet te begrijpen hoe het model in elkaar steekt en gaat helaas bij dit eerste onderdeel al de mist in:

'Ik heb de formule ingevuld, maar daar kwam alleen maar onzin uit, dus ga ik het beredeneren.
Ik ga ervan uit dat de onderzoekers alleen op de eerste dag 42 vrouwen informeren en daarna hun mond houden. Als iedere vrouw iedere dag één andere vrouw ontmoet, dan zullen deze 42 vrouwen het nieuwtje dus doorvertellen aan 42 andere vrouwen. Dus kan ik de conclusie hieruit trekken dat 42+42 vrouwen het nieuwtje de volgende dag zullen weten. Dat maakt bij elkaar dus 84 vrouwen in de categorie 'doorvertellers' (op de 2e dag).'

Opgave 4 Het verspreiden van nieuwtjes

In de vijftiger jaren sponsorde de luchtmacht van de VS een aantal experimenten om na te gaan hoe goed informatie zich verspreidt. Een van de experimenten bestond eruit dat in een bepaald dorp een aantal vrouwen informatie kreeg over een nieuw merk koffie. De onderzoekers vroegen de vrouwen om deze informatie door te vertellen aan andere vrouwen in het dorp. Alle vrouwen die het nieuwtje wisten als de onderzoekers terugkwamen, zouden een gratis pak koffie krijgen.

Voor het verspreiden van nieuwtjes kan een wiskundig model gemaakt worden.
Dit model is gebaseerd op de volgende aannames:

- Elk tweetal vrouwen ontmoet elkaar met dezelfde waarschijnlijkheid.
- Elke vrouw ontmoet elke dag één andere vrouw.
- Als een vrouw het nieuwtje weet, vertelt ze het door aan elke vrouw die ze ontmoet, totdat ze iemand tegenkomt die al op de hoogte is van het nieuwtje. Dan stopt ze onmiddellijk met doorvertellen, want niemand wil aangezien worden voor iemand die oud nieuws doorvertelt.

In het model worden drie groepen onderscheiden, Doorvertellers, Stoppers en Niet-weters.
Doorvertellers: D_t is de fractie vrouwen die na t dagen het nieuws weet en doorvertelt.
Stoppers: S_t is de fractie vrouwen die na t dagen het nieuws weet, maar gestopt is met het doorvertellen ervan.
Niet-weters: N_t is de fractie vrouwen die na t dagen het nieuws nog niet weet.

Er geldt $D_t + S_t + N_t = 1$.
Het model kan beschreven worden door de volgende differentievergelijkingen.

$$D_t = D_{t-1} + D_{t-1} * N_{t-1} - D_{t-1} * (D_{t-1} + S_{t-1})$$
$$S_t = S_{t-1} + D_{t-1} * (D_{t-1} + S_{t-1})$$
$$N_t = N_{t-1} \text{......}$$

Bij de start van het experiment werden 42 van de in totaal 210 vrouwen door de onderzoekers over het nieuwe merk koffie ingelicht. In het model zijn de beginwaarden $D_0 = 0{,}2$, $S_0 = 0$ en $N_0 = 0{,}8$.

Van de vrouwen die de volgende dag in de categorie 'Doorvertellers' zitten, heeft een deel het nieuwtje rechtstreeks van de onderzoekers gehoord, terwijl een ander deel het doorverteld heeft gekregen van andere andere vrouwen in het dorp.

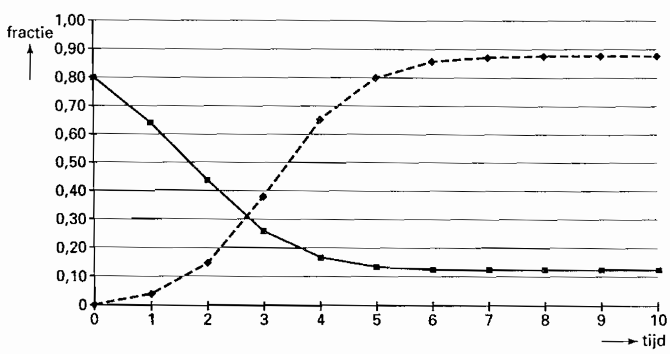
11. Bereken hoeveel vrouwen er volgens dit model na één dag in de categorie 'Doorvertellers' zitten.

12. Bereken hoeveel van deze vrouwen het nieuwtje rechtstreeks van de onderzoekers hebben gehoord en hoeveel het doorverteld hebben gekregen van een andere vrouw uit het dorp.

13. Maak de modelvergelijking voor N_t af. Licht je antwoord toe.

Figuur 4 geeft de ontwikkeling weer van twee van de drie modelvariabelen in de loop van de tijd. Figuur 4 is ook afgebeeld op de bijlage.

14. Teken in de figuur op de bijlage de grafiek van de derde modelvariabele. Licht je werkwijze toe.



figuur 4

De onderzoekers die het experiment uitvoerden, kwamen na vijf dagen terug in het dorp en gingen van alle vrouwen na of de informatie hen bereikt had. Het bleek dat 26 vrouwen van niets wisten. De overige vrouwen waren op de hoogte van het nieuwtje en kregen dus een gratis pak koffie.

15. Is dit aantal in overeenstemming met het model? Licht je antwoord toe.

Als het aantal Doorvertellers eenmaal afneemt, kan het volgens dit model niet meer toenemen.

16. Geef hiervoor een verklaring.

De resultaten bij vraag 12 vallen tegen. De slechte deelscore wordt voornamelijk veroorzaakt doordat leerlingen zich niet realiseren dat er de eerste dag al Stoppers ontstaan: Doorvertellers kunnen elkaar ook nu al tegenkomen en stoppen dan met doorvertellen. De meest voor de hand liggende oplossing is om uit S_1 het aantal Stoppers te berekenen en dat van het oorspronkelijke aantal Doorvertellers af te trekken. Deze aanpak is terug te vinden in onderstaande uitwerking:

$$\text{Rechtstreeks} = D_{t-1} - D_{t-1}(D_{t-1} + S_{t-1})$$
$$= 0{,}2 - 0{,}2 \cdot (0{,}2 + 0)$$
$$= 0{,}16 \Rightarrow 33{,}6 \text{ (34 vrouwen)}$$
$$\text{Doorverteld} = D_{t-1} \cdot N_{t-1}$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}8$$
$$= 0{,}16 \Rightarrow 33{,}6 \text{ (34 vrouwen)}$$

aangezien het een schatting is
is het beter om het onafgeronde
getal te nemen van 33,6.

Overigens lijkt een aantal leerlingen het woord 'deze' in 'Bereken hoeveel van *deze* vrouwen ...' niet juist te hebben opgevat.

Ook het resultaat van vraag 13 valt niet mee. Een aantal leerlingen gebruikt niet het gegeven dat het een 'gesloten systeem' betreft van 210 vrouwen. Van de leerlingen die de vraag wel goed hebben, kiezen sommigen een algebraïsche benadering, terwijl een minderheid een meer kwalitatieve aanpak kiest. Twee voorbeelden van leerlingenwerk:

$$D_t + S_t + N_t = 1$$
$$(D_{t-1} + D_{t-1} \cdot N_{t-1} - D_{t-1} \cdot (D_{t-1} + S_{t-1}) + (S_{t-1} + D_{t-1} \cdot (D_{t-1} + S_{t-1}) + N_t = 1$$
$$D_{t-1} + D_{t-1} \cdot N_{t-1} - \cancel{D_{t-1} \cdot D_{t-1}} - \cancel{D_{t-1} \cdot S_{t-1}} + S_{t-1} + \cancel{D_{t-1} \cdot D_{t-1}} + \cancel{D_{t-1} \cdot S_{t-1}} = 1 - N_t$$
$$D_{t-1} + D_{t-1} \cdot N_{t-1} + S_{t-1} - 1 = -N_t$$
$$N_t = -1(D_{t-1} + D_{t-1} \cdot N_{t-1} + S_{t-1} - 1)$$
$$= -D_{t-1} - D_{t-1} \cdot N_{t-1} - S_{t-1} + 1 \quad \rightarrow \quad N_t = N_{t-1} \cdot -D_{t-1} \; -D_{t-1} - S_{t-1} + 1$$

Niet weters kunnen alleen doorvertellers worden en
er kunnen geen niet-weters bijkomen
m.a.w. afname v. niet weters = toename van
doorvertellers ten koste van niet weters = $D_{t-1} \cdot N_{t-1}$

$\rightarrow N_t = N_{t-1} - D_{t-1} \cdot N_{t-1}$

Vraag 14 is vrij goed gemaakt. Het identificeren van de al getekende grafieken en het toevoegen van de ontbrekende levert niet zoveel problemen op.

Ook vraag 15 is redelijk gemaakt. Veel leerlingen lezen af uit de grafiek. Ze geven hieraan kennelijk de voorkeur boven het doorrekenen van de differentievergelijkingen met de grafische rekenmachine die ze tot hun beschikking hebben. Dat is wel voorstelbaar, want het intypen van de vergelijkingen is vrij bewerkelijk in dit geval. Een enkeling die bij vraag 14 het model al in de GR had ingevoerd, gebruikt hier nogmaals de met de GR berekende waarden:

t = 5 → tabel: u(5)=D(5) = 0,06058...
v(5)=S(5) = 0,00437...
w(5)=N(5) = 0,13605...
aantal vrouwen dat van niets weet: 0,13605 · 210 = [illegible] 28,3
→ 28 vrouwen. De 26 vrouwen uit de tabel komt dus redelijk
overeen met de 28 vrouwen uit het model.

Ten slotte vraag 16, die de laagste score kende. Zoals een van de docenten opmerkte: 'Dat was bijna allemaal gezwam.' De clou is dat, wil D afnemen, $D + S$ groter dan N moet zijn. Aangezien het aantal Niet-Weters alleen maar kan afnemen, zal dit, als dit eenmaal optreedt, niet meer veranderen. Een redenering als deze is kennelijk te hoog gegrepen, al speelt wellicht ook mee dat ze moeilijk is op te schrijven. In elk geval was de p'-score van deze vraag een dieptepunt.... Een positieve uitzondering was de leerling die kwam met de volgende redenering:

'Dat komt door de gegeven formule.
Op het moment dat N_{t-1} kleiner wordt dan $D_{t-1} + S_{t-1}$ kan D nooit meer groeien, want N_{t-1} wordt met D_{t-1} vermenigvuldigd, maar daar gaat $D_{t-1} \cdot (D_{t-1} + S_{t-1})$ vanaf, is dat tweede deel dus groter, groeit D never nooit meer!'

Conclusie

De leerlingen vonden de DDM-opgave een moeilijk onderdeel van het examen. De docenten zelf waren over de opgave wel te spreken. Ook volgend jaar zal er op deze twee scholen weer een aangepast examen afgenomen worden, met daarin aandacht voor DDM. Zo wordt er enige examenervaring opgedaan, waar dan bij de tweede fase examens in 2001 gebruik van gemaakt kan worden. Daarbij moet wel bedacht worden dat de zuivere E&M populatie die dan examen aflegt, een andere is dan de huidige wiskunde A populatie.

Paul Drijvers / Heleen Verhage, Freudenthal Instituut

Literatuur

[1] Doorman, L.M. & H. Verhage (1997). Discrete Dynamische Modellen voor Wiskunde A. *Nieuwe Wiskrant. 17*(1), 24-29.
[2] Doorman, L.M., W. Reuter & H. Verhage (1998). *Discrete Dynamische Modellen - Profiel E&M.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
[3] Doorman, L.M. & H. Verhage (1998). *Discrete Dynamische Modellen – Profiel E&M. Opdrachtenbundel DDM.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Magiorama

Proeven van wetenschap, kunst en techniek in Groningen

Een boeiende melée van wetenschap, kunst en techniek. De reacties in de media waren unaniem lovend over de manifestatie Magiorama '95. De organisatoren waren toen al overtuigd van de noodzaak deze fascinerende manifestatie in de *Martinihal in Groningen* te herhalen. Van *16 tot en met 31 oktober 1999* kunnen de liefhebbers weer genieten van dit evenement. Magiorama laat zien hoe boeiend en spannend wetenschap en techniek kunnen zijn. Instituten uit binnen- en buitenland presenteren honderden uitdagende demonstraties en proeven.

Kunstenaars tonen werk met een knipoog naar de wetenschap. Soms subtiel, vaak overdonderend en altijd spraakmakend. Vier jaar geleden werd het Martinihal Complex overstroomd door mensen uit het hele land. De meeste bezoekers konden er geen genoeg van krijgen. Ook dit jaar heeft de organisatie Stichting Expo Noord in Groningen honderden opstellingen voor Magiorama gereserveerd. Muziek uit betonijzer, waarom niet? Vliegen als een vogel, het kan! Reactiesnelheden meten, warmteverschillen voelen, nog nooit eerder is de mens zo diep tot de mogelijkheden van techniek en wetenschap doorgedrongen.
De expositie beslaat 6000 vierkante meter en is zo groot en divers dat een bezoeker er ten minste een dag door moet kunnen brengen zonder zich te vervelen. Magiorama is voor jong en oud, voor techneuten, muziek- en kunstliefhebbers en zeker voor iedereen die het onmogelijke mogelijk wil maken.

Magiorama is dagelijks open van 10.00 tot 19.00 uur en op donderdag en vrijdag tot 22.00 uur.
De entreeprijs bedraagt f 12,- per persoon.
Bezoek onze website www.magiorama.nl voor meer informatie en voor kortingsmogelijkheden voor scholen..

Magiorama is een initiatief van de Stichting Expo Noord te Groningen.