In het TWIN-project voor het MTO worden complexe getallen geïntroduceerd binnen de context van wisselstroom. **Tom Goris** en **Wim Laaper** schetsen hoe dit idee in het lesmateriaal van TWIN is uitgewerkt.

Complexe getallen, dat is toch i^2 is -1?

Inleiding

Complexe getallen worden gebruikt in de elektriciteitsleer; één van de hoofdvakken van een MTO-student Elektrotechniek. Tot voor kort begon iedere wiskundemethode met het abstracte '$i^2 = -1$' waardoor je vrijwel zeker weet dat iedere MTO-er afhaakt.
Wisselstroomsignalen en hun eigenschappen kunnen met behulp van complexe getallen beschreven worden. Maar wat is er nu imaginair aan een elektrisch stroompje? Virtuele elektronen die loodrecht op de stroomdraad bewegen misschien? Kortom, redenen genoeg voor het TWIN-team om zich in het complexe vlak en in de elektrotechniek te begeven. Deze zoektocht leidde tot het hoofdstuk 'Wisselkunde' zoals dat te vinden is in TWIN Wiskunde deel 3.

Wat is er complex in de elektriciteitsleer?

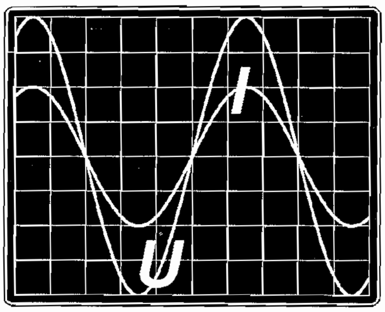


fig. 1

Tussen de (sinusvormige) wisselspanning U (in Volt) over en de wisselstroom I (in Ampère) door een weerstand R (in Ohm) bestaat een vaste verhouding. Dat is de bekende wet van Ohm: $U = I \times R$.
In figuur 1 is een scoopbeeld te zien van dit verschijnsel. Een scoop maakt grafieken met op de verticale as de spanning of de stroom en op de horizontale as de tijd. Door slim aan allerlei knoppen te draaien, krijg je een stilstaand beeld.

Voor de niet-elektrotechnici: je stelt de scoop in op een aantal Volt of Ampère 'per hokje' en je kunt dan spanning en stroom tegelijkertijd aflezen. Stel dat bovenstaande scoop ingesteld is op 10 Volt en 2 Ampère per hokje, dan blijkt uit dit scoopbeeld dat de weerstand 10 Ohm bedraagt.

De wet van Ohm is, wiskundig gezien, een redelijk eenvoudige formule. De formule drukt een evenredigheid uit tussen spanning en stroom met de weerstand als evenredigheidsfactor. Maar je kunt de formule ook iets 'dynamischer' beschouwen. Je kunt '$\times R$' ook zien als een operator die iets met de stroom doet; hij maakt er een spanning van. Wiskundig gezien is de bewerking '$\times R$' te beschouwen als een soort één-dimensionale operator op een sinusoïde; in dit geval een verticale vermenigvuldiging. De 'toppen' van de spanning en de stroom blijven op dezelfde plaats liggen.
Heel anders wordt het wanneer de wisselspanning over en de wisselstroom door bijvoorbeeld een spoel of een condensator bekeken wordt.

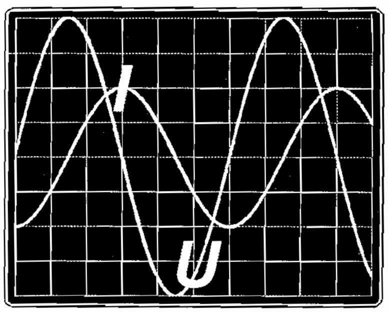


fig. 2

De toppen van de spanning en de stroom liggen nu niet meer netjes boven elkaar. Elektrotechnisch gesproken: de spoel en de condensator veroorzaken een faseverschil tussen de spanning en de stroom.
Wiskundig gezien veroorzaken een spoel en een condensator naast een verticale vermenigvuldiging óók nog een horizontale verschuiving. De periode (frequentie) van het signaal verandert niet. Het gedrag van één component is

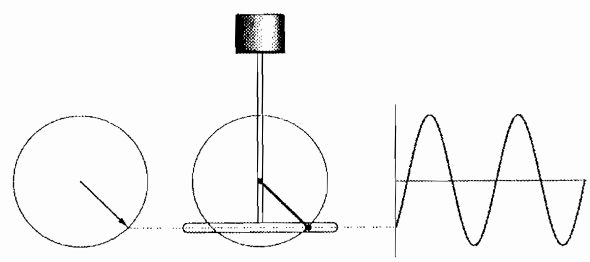
nog wel te beschrijven met de verhouding tussen de maxima van de signalen en de verschuiving over een bepaalde hoek, maar met deze twee losse gegevens kan geen schakeling worden doorgerekend.
Om het gedrag van schakelingen te kunnen voorspellen, is er een 'twee-dimensionale' operator '$\times Z$' nodig.
Elementaire schakelingen zijn opgebouwd uit weerstanden, spoelen en condensatoren die in serie of parallel kunnen staan. De kunst van de elektrotechniek schuilt onder andere in het voorspellen van het gedrag van schakelingen met behulp van een vervangingsoperator: een operator die van de héle schakeling bepaalt wat er met spanning en stroom gebeurt. En juist voor het bepalen van deze vervangingsoperator moet er ook met de individuele operatoren van de componenten gerekend kunnen worden.
En op dit moment gaat de elektrotechniek 'complex'.
In het kort komt het erop neer dat het signaal beschreven wordt met een ronddraaiende vector en dat die vectoren op hun beurt weer als complexe getallen worden weergegeven. De operator '$\times Z$' wordt dan uiteindelijk een vermenigvuldiging met een complex getal. In schema:

sinusoïde
↓
vector
↓
complex getal

Het nieuwe van 'Wisselkunde' schuilt met name in het feit dat de operator '$\times Z$' in de 'vector-fase' ontdekt wordt én in het feit dat *alle* representaties van een elektrisch signaal (scoopbeeld, formule, vector en complex getal) aan elkaar gerelateerd worden. De complexe getallen worden ontdaan van hun mysterieuze karakter, dus niks $i^2 = -1$, en geïntroduceerd als een boekhoudkundig hulpmiddel ......

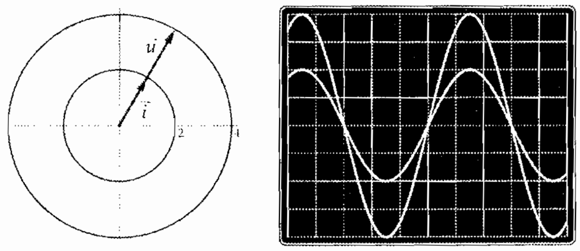
Hoe moet dat nu voor de leerling?

Aan de hand van een reeks opgaven uit het TWIN-materiaal is te zien hoe dat in zijn werk gaat.
Allereerst wordt het scoopbeeld omgezet naar een vectorvoorstelling. Leerlingen zijn al in staat om grafieken van sinusoïden om te bouwen naar formules en omgekeerd. In het TWIN hoofdstuk 'Goniometrie' is de sinusoïde geïntroduceerd aan de hand van een krukstang-zuiger machine (waar overigens ook een Java-applet van gemaakt is, zie de homepage van TWIN: www.fi.uu.nl/twin).
Deze machine levert nu de vectorvoorstelling: het is de krukstang voorzien van een pijltje. De leerling ontdekt dat een signaal bijna volledig beschreven kan worden met één zo'n vector. De enige informatie die de vectorvoorstelling niet geeft, is de frequentie van het signaal, maar deze verandert toch niet door de schakeling en speelt in

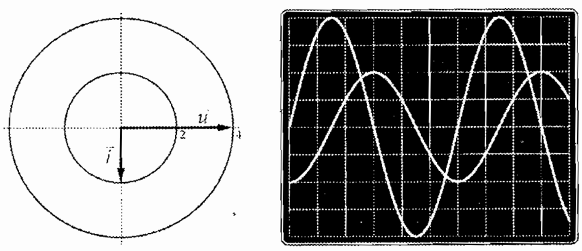


14 a Waar komt de lengte van de krukstang mee overeen in de hoogte-tijd grafiek van de zuiger?
b Wat stelt dus de lengte van de ronddraaiende vector voor?
c Als de ronddraaiende vector een spanningssignaal beschrijft, wat stelt dan de lengte van de vector voor?

deze fase een ondergeschikte rol.
Het gedrag van weerstanden, spoelen en condensatoren kan nu ook in vectorvoorstellingen gevangen worden. De vectorvoorstelling van figuur 1 ziet er zó uit:



De operator '$\times R$' is niets anders dan de scalaire vermenigvuldiging van een vector: $\vec{u} = \vec{i} \times R$.
Maar bekijken we nu de vectorvoorstelling van figuur 2 dan zien we dat we het niet redden met een scalaire vermenigvuldiging. En ook niet met de vermenigvuldigingen die voor vectoren bestaan, in- en uitproduct.
In het TWIN-materiaal worden nu eerst de eigenschappen van de nieuw te ontdekken operator geschetst:



Ook hier willen we nu een verband beschrijven tussen u en i. We zoeken dus een 'bewerker' die de stroomvector $\vec{i}$ twee keer zo lang maakt en 90° verdraait.
Je krijgt dan de stroomvector $\vec{u}$.
We noemen de 'bewerker': $\bullet\, 2\, \llcorner$ (Spreek uit: maal 2 over 90°).
Nu geldt $\vec{u} = \vec{i} \bullet 2\, \llcorner$.

De 'bewerker' • 1 ∟ schrijven we vanaf hier kortweg als • *i*. Dit betekent dus dat, als je • *i* op een vector langs een as loslaat, je een even lange, over 90° gedraaide vector krijgt.

Maar met de operator '• i', die later in het hoofdstuk omgedoopt wordt tot '• j' om verwarring met de *i* als symbool voor de wisselstroom te voorkomen, heb je nog geen complex vlak. Dit probleem wordt opgelost door vectoren te zien als 'aanwijsstokken' van getallen. In het kort komt het hierop neer dat de vector $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ het reële getal 1 aanwijst, dat $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \times 2$ het getal 2 aanwijst, dat $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \times -3$ het getal -3 aanwijst en dat $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \times$ i het imaginaire getal i aanwijst. In dat laatste geval staat de 'aanwijsstok' wél loodrecht op de horizontale as.
De complexe getallen worden vervolgens voorgesteld als vectoren:

51 a Teken de vector $\vec{a}$ die het getal 2i aanwijst.
b Vector $\vec{b}$ wijst het getal 3 aan. Teken $\vec{b}$.
c Teken de vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Voor de vector $\vec{c}$ uit opgave **51** schrijven we nu $\vec{c}$ = 3 + 2i. De vector $\vec{c}$ is immers verkregen door de pijlen die 3 en 2i aanwijzen op te tellen.

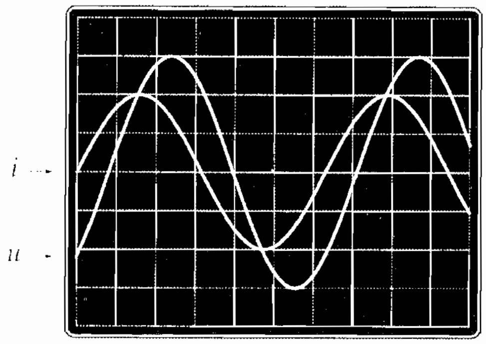
En van het niet te bevatten '$i^2 = -1$' blijft eigenlijk alleen dit over:

54 a Teken 3i.
b Laat in de tekening op 3i de 'bewerker' • 3i los.
c Hoeveel is 3i • 3i?

Elektrotechnicus complex aan het werk

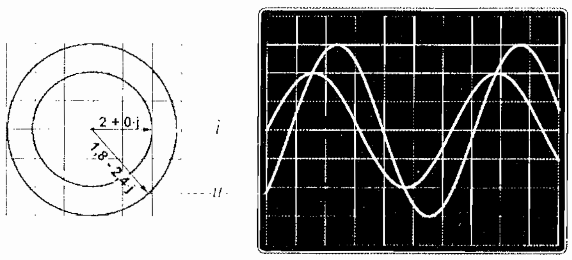
De elektrotechnicus beschikt nu over een operator '× *Z*' die een wisselstroom $\vec{i}$ omrekent naar een wisselspanning $\vec{U}$ volgens de formule $\vec{U} = \vec{i} \times Z$.
Z is een complex getal dat de twee transformaties die we in figuur 2 gezien hebben, in zich herbergt; de verticale vermenigvuldiging én de horizontale verschuiving.
Die *Z* heet de *complexe impedantie* van een schakeling of een component. De modulus van *Z* heet de *impedantie* en dat is in feite de verhouding tussen de hoogten van toppen van de wisselspanning en de wisselstroom. Het argument van *Z* heet de *faseverschuiving*, uitgedrukt in graden.

De elektrotechnicus heeft een schakeling gebouwd en meet de spanning en de stroom op zijn scoop. Dat levert dit beeld op:



De scoop is ingesteld op 1 Ampère per hokje en 1 Volt per hokje.

De berekening van de complexe impedantie verloopt nu als volgt:



De wisselstroom wordt gerepresenteerd door het complexe getal 2 + 0·j en de wisselspanning door 1,8 – 2,4·j.
Voor de complexe impedantie geldt:

$$(1{,}8 - 2{,}4 \cdot j) = (2 + 0 \cdot j) \times Z$$

hetgeen voor *Z* oplevert: 0,9 – 1,2·j.
De modulus van *Z* is 1,5 en het argument van *Z* is -53°, zoals ook uit het scoopbeeld blijkt.

Het gereken met complexe getallen laten we aan de Grafische Rekenmachine over. Daarover meer in een volgend artikel.

Tom Goris, medewerker TWIN-*project / ROC Eindhoven*
Wim Laaper, Koning Willem II College, Tilburg

Literatuur

TWIN Wiskunde III, SMD Leiden, 1998.
ISBN 90 23837584