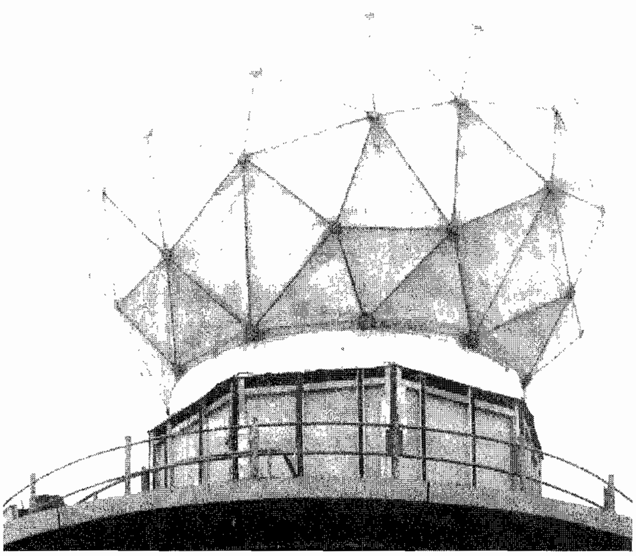
Vele vlakjes maken een bol. De architectuur die hierbij wordt gebruikt, berust op een mengeling van meetkunde en combinatoriek. Een rijk onderwerp dat helaas niet past in het reguliere wiskundeonderwijs, maar wel geknipt lijkt voor een zebra of praktische opdracht. **Martin Kindt** ontvouwt een aantal kanten.

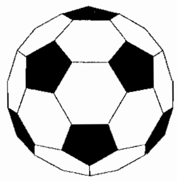
Geodes en fullerenen

De toren van het KNMI in De Bilt was tot januari '97 getooid met een bolachtig veelvlak. Het skelet van de bol bestond, zoals op de foto duidelijk te zien is, geheel uit driehoeken. In een eerste opwelling zou je kunnen denken dat er om elk hoekpunt van het skelet *zes* driehoeken samenkomen, maar als je goed kijkt, zie je op de foto vier punten waaromheen *vijf* driehoekjes zijn gegroepeerd. Een gril van de ontwerper? Die lijkt dan wel besmettelijk, want ook bij andere getrianguleerde koepels worden groepjes van zes afgewisseld door groepjes van vijf, al is dat soms lastig te ontdekken.



Voormalige koepel KNMI, De Bilt. Foto: Dhr. van Dijk

Dit artikel gaat over de structuur van zulke 'geodetische koepels', kortweg 'geodes' genoemd. Met verrassend elementaire wiskunde kan een classificatie worden gevonden en dit geeft de knutselaar een middel in handen om fascinerende bouwsels te maken.
De structuur van geodes blijkt ten nauwste samen te hangen met molecuulstructuren die thans in de scheikunde worden bestudeerd, de 'fullerenen' (ook wel: 'buckeyballen), waarvan het eenvoudigste voorbeeld de voetbal is, gemaakt van vijf- en zeshoekige lapjes.



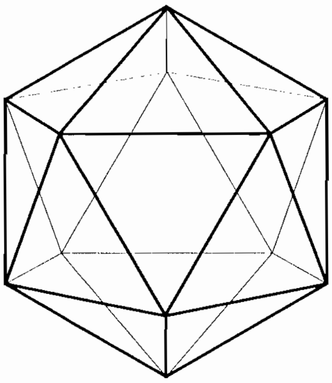
Aan de voetbal valt het een en ander te tellen. In bovenstaand plaatje is precies de helft van het aantal zwarte vlakjes zichtbaar, in totaal zijn er 12. Net zo kun je 'zien' dat er 20 witte zeshoekjes zijn. Om elk vijfhoekje ligt een krans van 5 zeshoekjes en elk zeshoekje grenst aan 3 vijfhoekjes. Proef op de som: $12 \times 5 = 20 \times 3$.
In totaal heeft het 'voetbalveelvlak' $12 + 20 = 32$ zijvlakjes. Al redenerend kun je vinden dat het voetbalveelvlak 90 ribben (12 vijfhoekjes hebben 60 ribben, 20 zeshoekjes hebben er 120, elke ribbe ligt in 2 vlakjes) en 60 hoekpunten (analoog verhaal, maar het kan hier ook simpeler) moet hebben. Terzijde: het geven en het netjes opschrijven van zo'n typisch combinatorische redenering lijkt me heel nuttig voor jonge HAVO/VWO-leerlingen.
Als je het aantal hoekpunten (60) en het aantal zijvlakken (32) bij elkaar optelt, kom je in de buurt van het aantal ribben. Het scheelt slechts 2. Dit is exemplarisch voor een van de mooiste formules uit de wiskunde (formule van Euler):

$$Z + H = R + 2$$

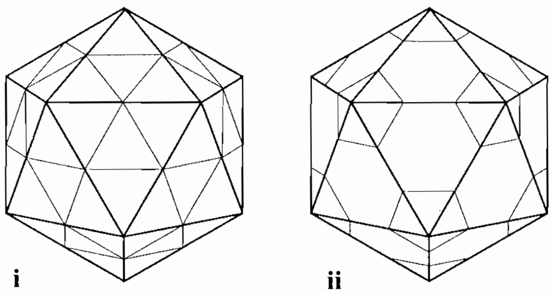
met Z, H, R voor respectievelijk de aantallen zijvlakken, hoekpunten en ribben.
Deze wet, geldig voor alle 'gezonde' veelvlakken, heeft het nooit tot verplichte schoolstof gebracht. Ik heb dat altijd betreurd. Mijn ervaring is dat leerlingen zich snel uitgedaagd voelen om de validiteit van de formule aan allerlei figuren te onderzoeken. Dit geeft bovendien aanleiding tot zinvolle algebra: test de formule van Euler voor de n-zijdige piramide, het n-zijdige prisma en eventuele combinaties hiervan (dubbelpiramide, toren met spits, ...). En: hoe veranderen Z, H, R als je van een veelvlak een puntje afzaagt? In het kader van Euler's formule past ook mooi een kennismaking met de vijf regelmatige (of Platonische) veelvlakken.

Icosaëder in moederrol

Van de vijf Platonische veelvlakken kies ik nu de allermooiste, het regelmatig twintigvlak of *icosaëder* ($Z = 20$, $H = 12$, $R = 30$) als startpunt van onderzoek naar de geode-structuur. Een vlak door het middelpunt van de omgeschreven bol van de icosaëder en een ribbe snijdt het boloppervlak volgens een 'geodetisch boogje' dat twee hoekpunten van het viervlak verbindt. Op deze wijze ontstaan er dus 30 boogjes, die als het ware een geraamte van de bol vormen.



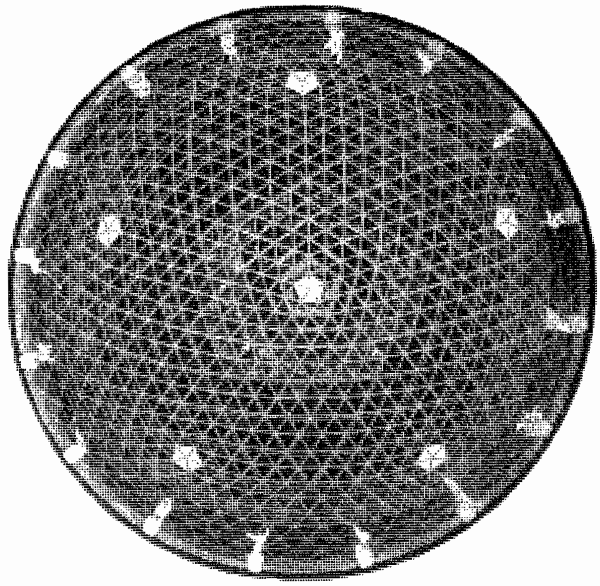
Zo'n geraamte van (bol)driehoekjes noemt men een geodetische koepel of een geode. In het spraakgebruik veroorloven we ons enige soepelheid: ook het veelvlak waarvan de ribben de koorden zijn bij de geodetische boogjes wordt een geode genoemd.
Met de icosaëder als basis kunnen nu fijnere bolskeletten worden geconstrueerd:



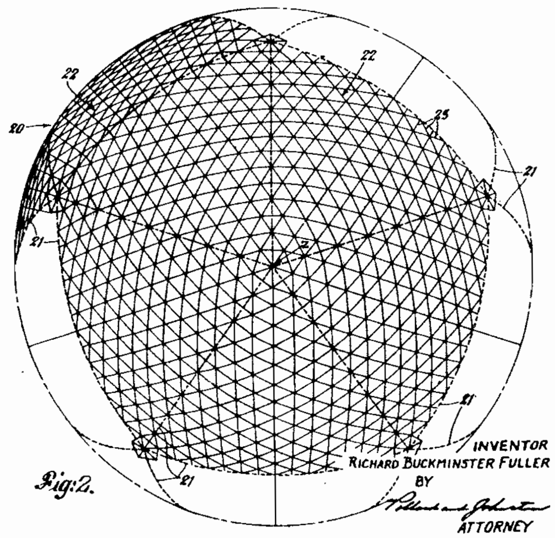
i **ii**

In figuur **i** is elk zijvlak verdeeld in vier gelijkzijdige driehoeken. De 80 ($= 20 \times 4$) driehoekjes die je nu krijgt, kunnen vanuit het centrum worden geprojecteerd op de omgeschreven bol van de icosaëder en zo ontstaat een geode met 80 zijvlakken.
In figuur **ii** is elke ribbe in drie gelijke stukken verdeeld, waardoor 20 regelmatige zeshoeken en 12 regelmatige vijfhoeken ontstaan. Als je vervolgens de piramides op de vijfhoeken wegsnijdt, krijg je een half-regelmatig (of Archimedisch) veelvlak, dat je dan weer tot bol kunt buigen zodat de voetbal, een lid van de familie van 'fullerenen', ontstaat. Op de architectuur van fullerenen kom ik later terug, voorlopig richt ik me op de geodes.
Figuur **i** geeft gemakkelijk een idee om oneindig veel verschillende geodes te maken. Je verdeelt alle ribben van de icosaëder in n gelijke stukken en na projectie op de bol krijg je dan een geode met $20 \times n^2$ vlakjes.

Een mooi voorbeeld van dit type geode is de koepel van het Dali-museum in Figueras.

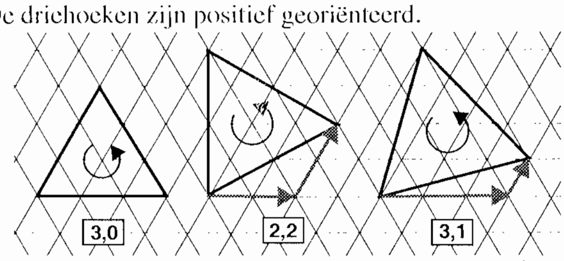


De vijfhoekjes markeren de hoekpunten van het moedertwintigvlak. Enig telwerk leert dat $n = 12$, dus het geraamte van de koepel is een deel van een 2880-vlak.
Andere beroemde voorbeelden van dit type zijn: de Expohal in Montreal ($n = 16$) en La Géode in Parijs ($n = 18$).
Als pionier op het gebied van geodetische koepels geldt de architect Richard Buckminster Fuller, wiens eerste ontwerp hieronder is afgebeeld.



Het driehoekjespatroon ligt ten opzichte van een zijvlak van het moedertwintigvlak nu gedraaid, en wel over een hoek van 30°. Merk op dat er per ribbe van het twintigvlak nu 16 'grensdriehoekjes' zijn. Het is geen heksenwerk om uit te zoeken dat de oppervlakte van de grote driehoek 192 ($= 3 \times 64$) kleine driehoekjes bedraagt. Na projectie op de omgeschreven bol verdwijnt de knik uit de grensdriehoekjes en ontstaat er een geode met 3840 driehoekjes.

Vanuit een twintigvlak kun je dus op twee manieren tot een geode komen. Maar daarmee is de kous niet af. Er zijn ook oneindig veel asymmetrische manieren om een isometrisch rooster op een twintigvlak te plakken.
Zo'n manier kan worden gekarakteriseerd door een paar gehele getallen, zeg x en y. Het plaatje hieronder laat zien hoe dat werkt voor de paren $(x, y) = (3, 0)$, $(2, 2)$ en $(3, 1)$. De driehoeken zijn positief georiënteerd.



Het eerste geval ($y = 0$) correspondeert met een koepel zoals die van Dali, het tweede geval ($x = y$) met eentje zoals in het ontwerp van Buckminster Fuller.
De figuur hiernaast toont de uitslag van een icosaëder getekend op een isometrische ondergrond, op basis van het paar $(x, y) = (1, 2)$. Als je nu het twintigvlak in elkaar zet, merk je dat stukjes van driehoeken op de ribben elkaar precies aanvullen (gevolg van rotatiesymmetrie!) en zo kun je begrijpen dat bij het 'opbollen' weer complete driehoekjes ontstaan. Omdat de oppervlakte van één grijze driehoek gelijk is aan 7 driehoekscellen, krijg je zo een geode met 140 driehoekjes. Dit blijkt juist de structuur te zijn van de voormalige koepel in De Bilt!
Het getal 7 is te vinden via knippen en plakken, maar deze strategie is zeer onhandig als x en y een stuk groter zijn. Met hulp van de cosinusregel kun je de zijde ($= r$) van een in het rooster geplaatste (x, y)-driehoek gemakkelijk uitdrukken in x en y. Als x en y beide positief (of beide negatief) zijn, geldt immers:

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120°$$
$$\text{ofwel} \quad r^2 = x^2 + xy + y^2$$

Eenvoudig is na te gaan dat als x en y verschillend teken hebben, dezelfde betrekking wordt gevonden.
De oppervlakte van een (x, y)-driehoek uitgedrukt in roostercellen is dus gelijk aan het gehele getal r^2.
Gevolg: voor de geode gebouwd op de (x, y)-icosaëder, voortaan genaamd de 'geode $[x, y]$', geldt:

$$Z = 20(x^2 + xy + y^2)$$

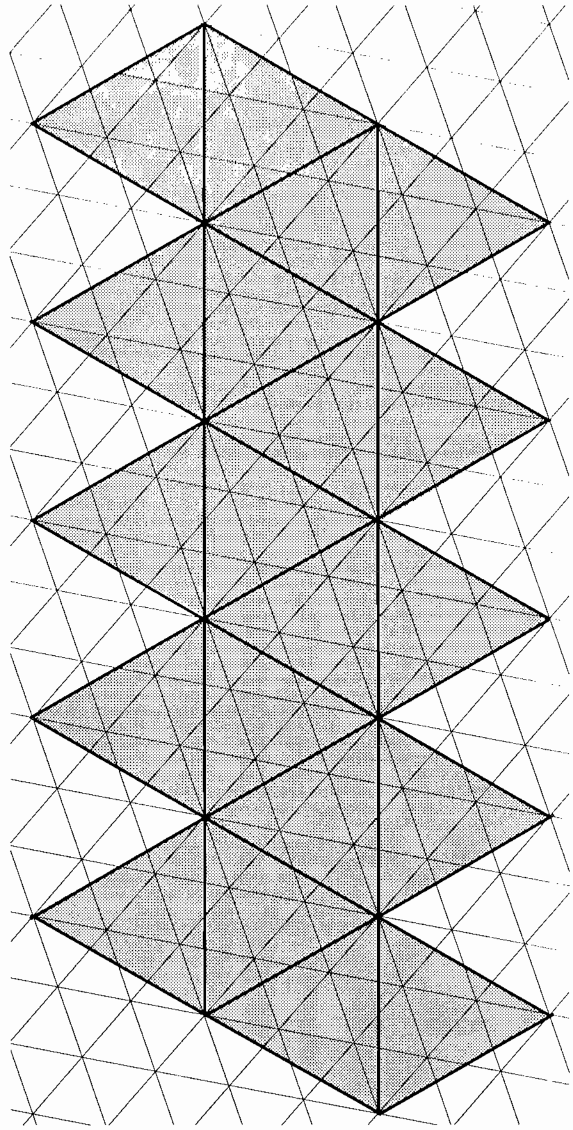
Uit $Z \times 3 = R \times 2$, volgt direct:

$$R = 30(x^2 + xy + y^2)$$

Omdat er 12 hoekpunten zijn (die van de icosaëder) waarin 5 driehoekjes samenkomen, terwijl dat aantal in de ander hoekpunten 6 is, geldt:

$$Z \times 3 = 12 \times 5 + (H - 12) \times 6$$
$$\text{ofwel}$$
$$H = \tfrac{1}{2}Z + 2 = 10(x^2 + xy + y^2) + 2$$

En dit alles past weer mooi in de formule van Euler!



Met behulp van de zojuist gevonden formules kan nu een geode-tabel met aantallen zijvlakken worden opgesteld:

x	y	r^2	Z
1	0	1	20
1	1	3	60
2	0	4	80
2	1	7	140
2	2	12	240
3	0	9	180
3	1	13	260
3	2	19	380
3	3	27	540

Hoe ordelijk zijn geodes?

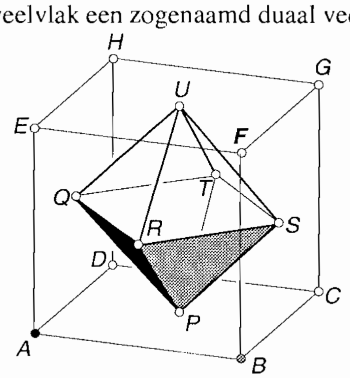
Het aantal driehoekjes dat samenkomt in een hoekpunt van een veelvlak begrensd door driehoekjes, noemen we de *orde* van dat hoekpunt. Het aantal hoekpunten van de orde n ($n \geq 3$) noteer ik verder als H_n.
Voor 'homogene driehoeksstructuren' (alle punten van dezelfde orde H_n) geldt: $Z \times 3 = H_n \times n$.
In combinatie met $Z \times 3 = R \times 2$ en $Z + H_n = R + 2$, leidt dit na wat algebra tot $(6 - n)H_n = 12$.
$6 - n$ is alleen deelbaar op 12 voor $n = 3, 4, 5$ en die waarden corresponderen juist met drie Platonische veelvlakken: tetraëder, octaëder en icosaëder.
Veel ingewikkelder wordt het voor heterogene driehoeksstructuren. Uit elk veelvlak met omgeschreven bol kun je via triangulatie van de zijvlakken een geode produceren: zo kom je tot een bonte verzameling. Het leven wordt een stuk overzichtelijker indien je als extra eis stelt dat een geode slechts punten van de orde 5 en 6 mag hebben!
Er geldt dan: $H = H_5 + H_6$ en $2R = 3Z = 5H_5 + 6H_6$.
Dit combineren we nu met $H + Z = R + 2$ of makkelijker met $6H + 6Z = 6R + 12$.
Er komt dan:

$$6H_5 + 6H_6 + 10H_5 + 12H_6 = 15H_5 + 18H_6 + 2$$

Verrassing! De term met H_6 rolt eruit en er volgt $H_5 = 12$.
Er zijn onherroepelijk precies 12 punten van de orde 5.
Als je die 12 punten gelijkmatig over het oppervlak van de geode wilt verdelen, zit er niets anders op dan uit te gaan van de oervorm: de geode [1, 0] ofwel de icosaëder.

Dualiteit

Drie *punten* niet op één lijn, bepalen één *vlak* en drie *vlakken* niet door één lijn, bepalen één *punt* (dat punt kan eventueel 'oneigenlijk' zijn).
Dit is een voorbeeld van wat in de projectieve ruimtemeetkunde het *dualiteitsbeginsel* wordt genoemd.
Als een uitspraak over punten, lijnen en vlakken uitsluitend betrekking heeft op *incidentie* (dat wil zeggen op relaties zoals 'ligt op', 'gaat door', enzovoort), dan kun je in die uitspraak systematisch de woorden *punt* en *vlak* verwisselen en je krijgt weer een geldige uitspraak.
Volgens het principe van de punt-vlak-verwisseling kun je bij elk veelvlak een zogenaamd duaal veelvlak maken.



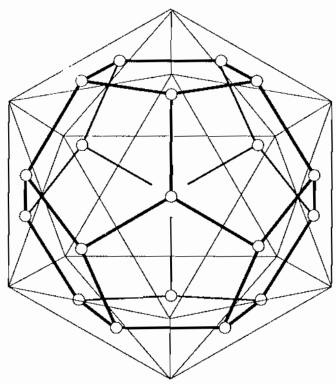
duale kubus = achtvlak

Zo is het achtvlak (octaëder) duaal met de kubus.
De correspondentie:

$ABCD \to P$, $ADHE \to Q$, ...
$A \to PQR$, $B \to PRS$, ...
$AD \to PQ$, $AE \to QR$, ...

noem ik een *dualiteit*.
Zo'n dualiteit koppelt *hoekpunten* aan *zijvlakken*, *ribben* aan *ribben*, *zijvlakken* aan *hoekpunten* en is bovendien *incidentietrouw*.
Zo wordt in het voorbeeld van kubus en octaëder de snijribbe AD van de zijvlakken $ABCD$ en $ADHE$ gekoppeld aan de verbindingsribbe van de met die vlakken corresponderende hoekpunten P en Q.
Snijding (van vlakken) en *verbinding* (van punten) zijn blijkbaar duale begrippen!

Een ander stel duale veelvlakken is: dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en icosaëder. Als je de zwaartepunten van de twintig zijvlakken van de icosaëder als hoekpunten neemt en juist die hoekpunten verbindt die in 'buurvlakken' liggen, ontstaat het regelmatige twaalfvlak.
Het is een leuk spel om bij veelvlakken het duale veelvlak te vinden.

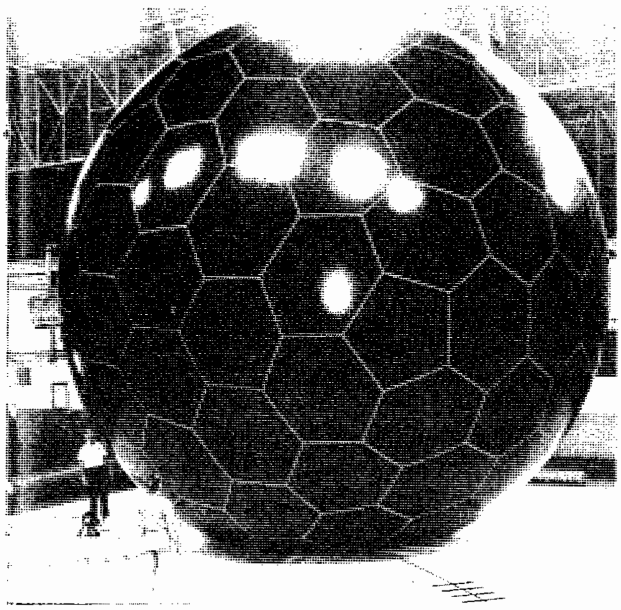

duaal twintigvlak = twaalfvlak

Soms vinden we bij het dualiseren dezelfde vorm terug (piramide!) en men spreekt dan van een zelfduale figuur.
En als je met een duale blik naar de formule van Euler kijkt, begrijp je waarom die symmetrisch in H en Z is.

Fullerenen

Het duale veelvlak van een 'ordelijke geode' bestaat uit vijfhoekjes en zeshoekjes. De orde van een hoekpunt van de geode bepaalt of dat punt met een vijf- dan wel een zeshoek correspondeert.
Een duale geode heet (naar Richard Buckminster Fuller) *buckybal*, *buckminsterfullereen* of kort *fullereen*.
Omdat een geode precies 12 punten van de orde 5 heeft, moet een fullereen altijd precies 12 vijfhoekige zijvlakjes hebben!
De fullerenen kunnen, als duale geodes, ook worden gekarakteriseerd door paren natuurlijke getallen.
De (oer-) fullereen [1, 0] is de dodecaëder en het fullereen [1, 1] is de bekende voetbal.

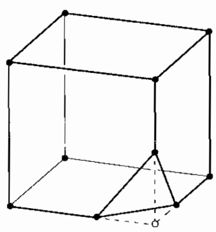
Onderstaande foto, afkomstig uit *Pythagoras* 6(6), toont de fullereen [4, 0]. Via de formules voor de geode wordt duidelijk dat de bol uit 162 vlakjes is gemaakt, waarvan 12 vijfhoeken. Verder zijn er 320 hoekpunten en 480 ribben.



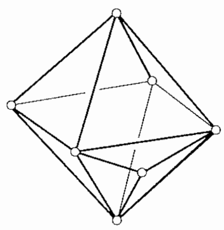
De voetbalfullereen [1, 1] staat model voor de molecuulstructuur van koolstof 60 (C_{60}), een in 1985 gevonden stof met bijzondere eigenschappen: veerkrachtig en sterker dan diamant. In 1996 ontvingen Curl, Kroto en Smalley de Nobelprijs voor scheikunde voor die ontdekking. Inmiddels droomt men van grotere molecuulstructuren als C_{240}, C_{540}, C_{960} die corresponderen met de fullerenen [2, 2], [3, 3] en [4, 4]. Er bestaan ook minder regelmatige koolstofverbindingen, C_{70} bijvoorbeeld, waarbij een aantal extra zeshoeken zijn tussengevoegd in de voetbal.
Uit de dualiteit met de geode volgt dat het aantal hoekpunten van een fullereen type [x, y] gelijk moet zijn aan $20(x^2 + xy + y^2)$.

Afknotting en uitstulping

Uit een veelvlak kun je een nieuw veelvlak maken door een piramidetje af te knotten bij één, of meer, hoekpunten. De duale actie hiervan is uitstulpen: je kunt het duale veelvlak uitbouwen met een piramide op een (of meer) zijvlakken.

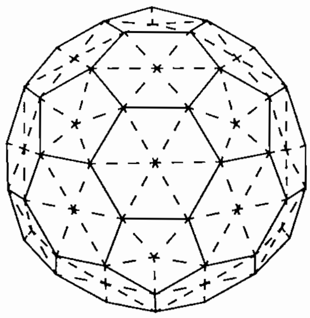


afknotten



uitstulpen

De figuur toont die transformaties toegepast op duale veelvlakken. De afgeknotte kubus heeft 10 hoekpunten, 15 ribben en 7 zijvlakken; het uitgestulpte achtvlak, duaal met de afgeknotte kubus, heeft 7 hoekpunten, 15 ribben en 10 zijvlakken.
Al eerder zagen we dat complete afknotting van het twintigvlak de voetbal geeft, dus uit de geode [1, 0] ontstaat de fullereen [1, 1].
Dualiter ontstaat uit het twaalfvlak door complete uitstulping de geode [1, 1].
Er is dus, behalve de dualiteit, een tweede manier om een geode om te toveren tot fullereen of vice versa, namelijk complete afknotting of uitstulping.
Als je bovenstaande figuur nauwkeurig bekijkt, dan kun je zien dat door uitstulping van de voetbalfullereen [1, 1] de geode [3, 0] ontstaat.



Bij uitstulping (afknotting) van een fullereen (geode) veranderen de parameters. Allicht, want het aantal ribben neemt flink toe. Dat dit aantal in feite met drie wordt vermenigvuldigd, is eenvoudig aan de hand van een uitgestulpt fullereen te beredeneren.
Voor de fullereen geldt namelijk:

$$12 \times 5 + (Z - 12) \times 6 = R \times 2$$

In het linkerlid staat precies het aantal ribben dat door uitstulping wordt toegevoegd! Het nieuwe aantal ribben is dus $R + 2R = 3R$.

De vragen die bij mij rezen, waren:
- als de fullereen/geode [x, y] uitgestulpt/afgeknot wordt tot de geode/fullereen [X, Y], welk verband bestaat er dan tussen [x, y] en [X, Y]?
- welke geodes/fullerenen kunnen worden verkregen door uitstulping/afknotting?

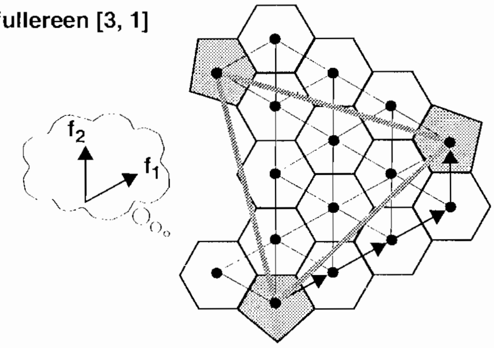
Uit bovenstaande redenering over de aantallen ribben volgt in elk geval dat moet gelden:

$$X^2 + XY + Y^2 = 3(x^2 + xy + y^2)$$

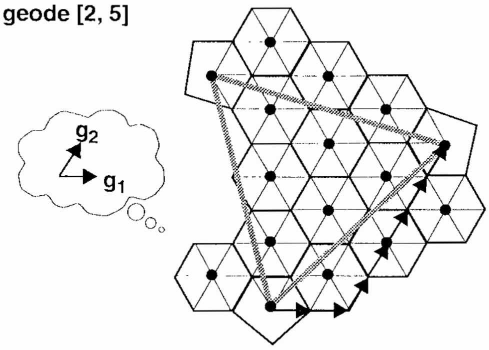
Als je even uitgaat van een lineair verband tussen de paren [x, y] en [X, Y] kun je na wat algebraïsch puzzelwerk vermoeden dat: X en Y in een of andere volgorde gelijk moeten zijn aan $x + 2y$ en $x - y$.
Dit vermoeden klopt inderdaad met de meest eenvoudige voorbeelden: icosaëder $\rightarrow$ voetbal $\rightarrow$ geode [3, 0].

Neem nu bijvoorbeeld fullereen [3, 1]. Hieronder zie je daar een platgewalst en vertekend stukje van. Uitstulpen heeft een fijnere triangulatie tot gevolg en volgens de formule zou dan een stukje van de geode [5, 2] of zijn spiegelbeeld [2, 5] zichtbaar moeten worden. Het laatste blijkt het geval te zijn.

fullereen [3, 1]



geode [2, 5]



Voor degenen die hun lineaire algebra niet vergeten zijn: er is duidelijk sprake van een basistransformatie. De twee netten van driehoekjes (die voor het gemak gelijkzijdig getekend zijn, maar dat op de bol beslist niet zijn) worden opgespannen door de bases $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ en $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$.
Als je de netten over elkaar legt, volgt eenvoudig:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 \text{ en } \mathbf{f}_2 = -\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2$$

Met als gevolg:

$$\begin{aligned} &x\mathbf{f}_1 + y\mathbf{f}_2 = \\ &x(\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2) + y(-\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2) = \\ &(x - y)\mathbf{g}_1 + (x + 2y)\mathbf{g}_2 \end{aligned}$$

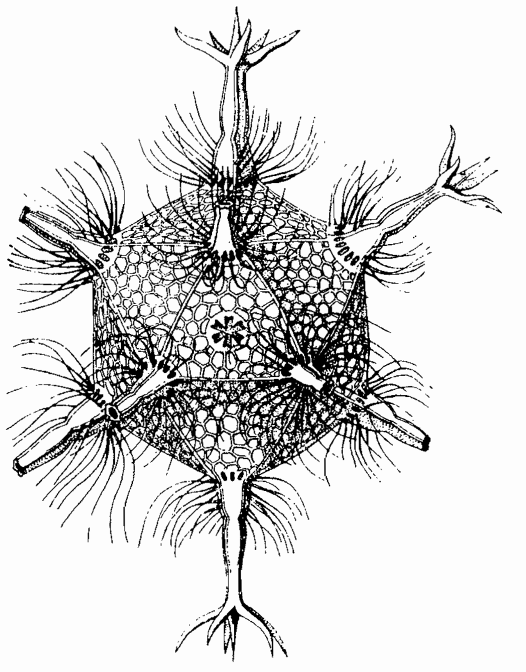
waarmee het vermoeden is aangetoond.

Het blijkt gemakkelijk dat je door uitstulping/afknotting precies die geodes/fullerenen $[X, Y]$ krijgt met de eigenschap dat $X^2 + XY + Y^2$ een drievoud is. Dat komt erop neer dat X en Y dezelfde rest moeten hebben bij deling door 3. Met een beetje rekenen modulo 3 is dat snel duidelijk.

Geodes en fullerenen geven op natuurlijke wijze aanleiding tot combinatoriek en algebra. Een geheel ander aspect is de metrische kwestie: hoe zit het met de lengte van de ribben? Bij het regelmatige twintigvlak en twaalfvlak zijn ze even lang, maar bij alle andere geodes en fullerenen kan dat onmogelijk het geval zijn! Om daadwerkelijk een geode te bouwen, heb je meer nodig dan inzicht in de topologische structuur.

Hoe maak je een goede geode?

Met limonaderietjes en pijpenragers kun je geodes bouwen. Bij een beetje geode zijn er echter al gauw aardig wat verschillende lengten nodig en dat vraagt veel rekenwerk. In het boek *Polyhedra, a visual approach* (4b) zijn in een appendix lijsten van 'koorde-factoren' opgenomen. De getallen zijn gerelateerd aan de straal van de omgeschreven bol van het moedertwintigvlak. Daarbij heeft de auteur zich beperkt tot de types $[x, 0]$ met $x = 1, ..., 9$ en $[x, x]$ met $x = 1, ..., 4$. Het gaat dan om de ribben van een echt veelvlak. Ook voor bolveelvlakken (of moet het 'veelbolvlakken' zijn?) zijn er nog enige gegevens opgenomen.
Als je voor de verschillende lengten verschillende kleuren neemt (en voor dezelfde lengte dezelfde kleur), krijg je fraai ogende modellen.
Als je bijvoorbeeld de geode [1, 1] wilt maken, dan kan dat bijvoorbeeld met 30 blauwe staafjes van 7.14 cm en 60 rode van 6.41 cm. De blauwe staafjes vormen dan een dodecaëder die de geode door uitstulping heeft voortgebracht. Als je dit bouwwerk zou willen maken met Zometool (zeer fraai, maar kostbaar materiaal voor het maken van veelvlakken door middel van staafjes), dan zit je met het probleem dat je geen invloed hebt op de lengten.
Wel kun je (met de zojuist genoemde kleuren) een veelvlak met 60 driehoeken maken, maar die blijken in tweetallen in één vlak te liggen, zodat je eigenlijk een 30-vlak in handen hebt. Dat is trouwens wel een hele mooie: het zogenaamde ruiten-dertigvlak. De blauwe staafjes zijn dan diagonalen van de rode ruiten, maar die kun je beter niet weghalen (de driehoeken garanderen stevigheid!).



Afbeelding van micro-organisme uit Haeckel's 'Monograph of the Challenger Radiolaria'. Bron: D'Arcy Thompson, On Growth and Form.

Opmerkingen over literatuur

In Ian Stewart's *Game, Set and Math* is een zeer geestig hoofdstuk (getiteld 'Build your own virus') gewijd aan geodes en fullerenen. Een wiskundige bezoekt een arts die zich afvraagt of wiskunde ooit iets voor geneeskunde heeft gedaan. Het gesprek komt, ook al vanwege het ziektebeeld van de wiskundige, al gauw terecht op virussen die de geodestructuur blijken te hebben. Een aantal voorbeelden passeert de revue, waaronder het adenovirus type 12 die volgens de mathematicus de structuur van de geode [5, 0] heeft. Naast de macro-architectuur (de geweldige koepels en paviljoens die overal ter wereld als geodes of fullerenen gebouwd zijn) bestaat er dus in de natuur een gelijkvormige micro-architectuur!
In dit verband is het ook aardig om in het klassieke *On growth and form* te bladeren waarin fraaie afbeeldingen van allerlei micro-organismen staan.
Een werkelijk prachtig geïllustreerd en zeer recente uitgave is *Your private sky, R. Buckminster Fuller*. Het behelst een biografie van de architect en talloze voorbeelden van zijn curieuze ontwerpen. De geodes (ze worden ook geoscopen genoemd) zijn zeer prominent aanwezig.
Het reeds genoemde *Polyhedra, a visual approach* is deel van een serie waarin ook de titels *Geodesic Math and how to use it* en *Introduction to Tensegrity* voorkomen. Het zijn praktisch georiënteerde boekjes waarin de meetkunde heel concreet en constructiegericht ter sprake komt.
Ook op het web is veel informatie te vinden over Buckminster Fuller en geodesic domes.

Een belangrijke inspiratiebron voor dit artikel was het eerder genoemde hoofdstuk van Ian Stewart. Op de Nationale Wiskundedagen heb ik twee keer een voordracht over dit onderwerp mogen houden en daartoe heb ik met veel plezier een aantal modellen gebouwd. Dat gaf mij meer inzicht in de wiskundige structuur en de aansporing zelf wat onderzoek te doen. Zo ontdekte ik de transformatieformules bij afknotting en uitstulping.
Ik ben ervan overtuigd dat het onderwerp ook HAVO/VWO-leerlingen tot onderzoek kan uitdagen. Dat hoeft natuurlijk niet zo ver te gaan als dit artikel. Een sterke troef is het aspect van de handvaardigheid, of zo men wil, techniek; want een werkstuk over dit onderwerp zal toch moeten uitmonden in een fraai bouwwerk.

Martin Kindt, Freudenthal Instituut

Literatuur

Stewart, I. (1991). *Game Set and Math*, Penguin.

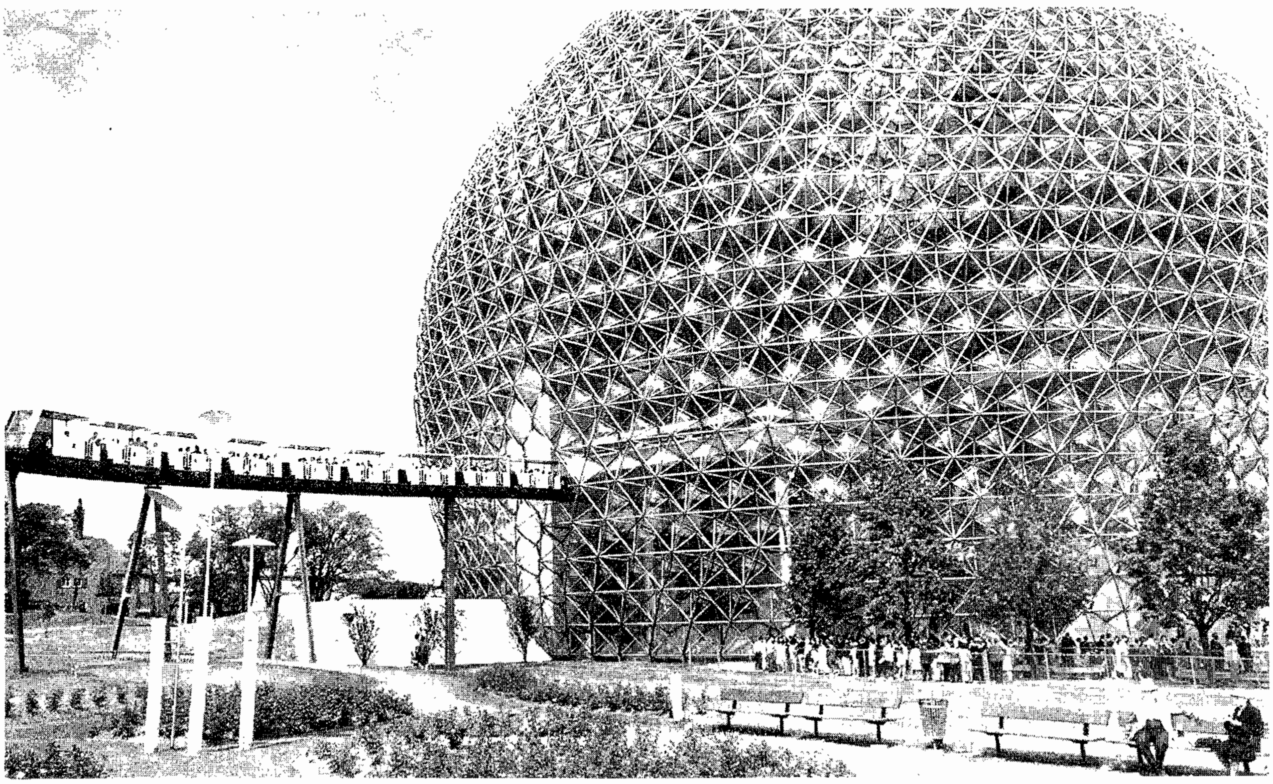
Thompson, Sir D'Arcy W. (1961). *On Growth and Form.* Cambridge University Press.

Krausse J. en C. Liechtenstein (1999). *Your private sky, R. Buckminster Fuller.* Baden/Switzerland: Lars Muller Publishers.

Kenner, H. (1976). *Geodesic Math and how to use it.* Berkeley: University of California Press

Pugh A. (1976). *Polyhedra, a visual approach.* Berkeley: University of California Press

Pugh A. (1976). *Introduction to Tensegrity.* Berkeley: University of California Press



De bol van Montreal. Bron: Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren 12(4), 1972/1973.