Met de terugkeer van de vlakke meetkunde in het examenprogramma krijgen we te maken met typische probleemoplossende vaardigheden rondom het redeneren en bewijzen. **Sieb Kemme en Wim Groen** analyseren wat belangrijke vaardigheden zijn bij het oplossingsproces en hoe we dat kunnen onderwijzen.

Probleemoplossen is een ambacht

Inleiding

Hoe los je een probleem op uit de vlakke meetkunde? Hoe onderwijs je dat?
Op die twee vragen zullen docenten wiskunde de komende jaren een passend antwoord moeten zien te vinden. Voor de ouderen onder ons zal de eerste vraag niet al te veel problemen opleveren. Zij zijn tenslotte nog opgegroeid met een flinke portie vlakke meetkunde en hebben het wellicht in de pre-mammoet periode zelf onderwezen. Voor anderen zal het even hard werken worden. Allereerst om zichzelf vertrouwd te maken met het voor hen nieuwe vak en vervolgens om de juiste manier te vinden dit op een efficiënte en prettige manier aan hun leerlingen te onderwijzen.
In dit artikel benaderen we het oplossen van problemen uit de vlakke meetkunde vanuit het gezichtspunt van het onder de knie krijgen van een ambacht. Het oplossen van een probleem uit de vlakke meetkunde bestaat uit een serie (cognitieve) handelingen die vergelijkbaar is met het maken van, bijvoorbeeld, een nieuwe stoel. Door de parallel te trekken met een ambachtelijke activiteit maken we het proces zichtbaar van het probleemoplossen en het onderwijzen.

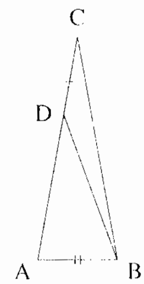
Hoe maak je een nieuwe stoel?

Wat is er allemaal voor nodig om een nieuwe stoel te maken? Allereerst zul je een beeld moeten hebben hoe die stoel eruit zal gaan zien. Dat *ontwerp* kan een nauwkeurige bouwtekening zijn, voorzien van precieze maten. Of een vage schets, waarin de uiteindelijke afwerking zich wel in het werk regelt. Naar gelang de nauwkeurigheid geeft het ontwerp een voorschrift waarmee stapsgewijs een stoel in elkaar gezet kan worden, of geeft het een richting aan over het uiterlijk van de stoel.
Daarnaast zul je de nodige *materiaalkennis* moeten hebben om te kunnen beslissen welke houtsoort en welke lijm het beste passen bij het ontwerp.
Ook is *kennis van het gereedschap* nodig en *beheersing van het gereedschap* om te weten hoe je uit het materiaal de nodige vormen en verbindingen kunt maken.

Hoe los je een probleem uit de vlakke meetkunde op?

Veel meetkundige problemen vragen om een constructie. Ook een bewijs is een constructie van een geldige keten van geldige argumenten. Zoals bij de constructie van een stoel een ontwerp hoort, zo hoort ook bij de oplossing van het meetkundige probleem een *ontwerp*. Dat is het beeld dat je hebt van de oplossing dat aangeeft om wat voor soort probleem het gaat en wat voor soort oplossing daarbij past. Gaat het om de constructie van een meetkundige figuur? Gaat het om het zoeken naar een wetmatigheid of het bewijzen van een eigenschap?
Vervolgens komt de *materiaalkennis* aan bod. Dat is het materiaal waarmee je de oplossing kunt leveren. Zoals het algoritme om een regelmatige vijfhoek te construeren. Of een notie van de middelen waarmee je denkt een bewijs te kunnen leveren. Bijvoorbeeld met omgeschreven cirkels of gelijkvormigheid.
Ten slotte is er het *gereedschap*. Dat is het geheel aan voorkennis, inclusief vaardigheden, waarmee je uiteindelijk de oplossing van het probleem construeert.

Het probleem van Langley

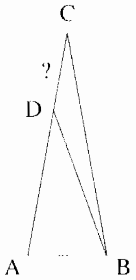


Het voorgaande lichten we toe aan de hand van twee verschillende oplossingen van één probleem. De oplossingen zijn onafhankelijk van elkaar tot stand gekomen. In beide gevallen wordt de oplossing gepresenteerd in de vorm van een reconstructie van het gedachtenproces. Tussendoor zijn belangrijke stappen cursief aangegeven.
Het probleem is een klassieker die wordt toegeschreven aan *Langley*:

> Gegeven een gelijkbenige driehoek *ABC* waarvan $\angle A = \angle B = 80°$.
> Vanuit *C* pas je langs de zijde *AC* een stuk *CD* af met lengte *AB*.
> Bewijs dat $\angle DBC = 10°$.

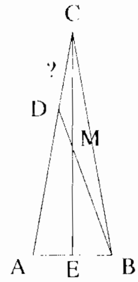
De eerste oplossing (Wim Groen)
Hoe bewijs je dat een hoek tien graden is? Daar zijn geen directe aanpakken van bekend. Er zijn wel methoden om te bewijzen dat twee lijnstukken even lang zijn.

Daarom is de eerste stap:
Herformuleer de probleemstelling.
Als volgt:
Gegeven een gelijkbenige driehoek ABC waarvan $\angle A = \angle B = 80^\circ$.
Kies op AC punt D zo dat $\angle DBC = 10^\circ$.
Bewijs nu dat $CD = AB$.



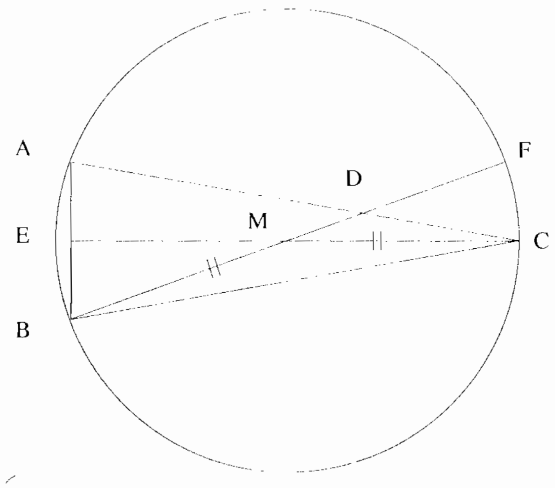
Voor het bewijzen van de gelijkheid van twee lijnstukken zou congruentie een mogelijk middel zijn. Maar dan heb je meer driehoeken en gelijke hoeken nodig.

De tweede stap is daarom:
Trek een of meer hulplijnen die de weg naar congruentie of gelijkvormigheid openen.
Een goede kandidaat is de hoogtelijn uit C.
Noem M het snijpunt van die hoogtelijn met BD.
Dat heeft als voordeel dat je bij punt C ook hoeken van tien graden krijgt, zodat driehoek BMC gelijkbenig wordt.



Even kijken naar de figuur die er nu staat en je ziet dat M het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC. Dat zie je door AM te trekken en de gelijke lijnstukken te markeren.

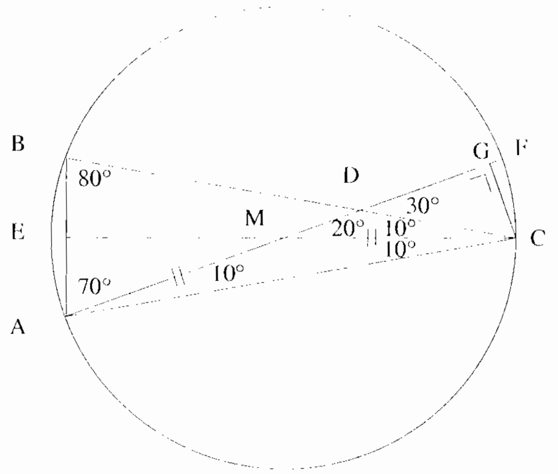
Teken dus de omgeschreven cirkel van driehoek ABC. (Tussendoor is de driehoek bijna ongemerkt liggend en groter gemaakt.)



Het ligt voor de hand BD te verlengen tot de cirkel. Er staan nu twee middellijnen, namelijk BF en CE.
Hoe nu verder?
Kun je AB en CD met elkaar in verband brengen? Moet je misschien de symmetrie van de cirkel gebruiken?

Denk bij problemen in een driehoek waarin de grootte van hoeken een rol speelt aan de omgeschreven cirkel. De stellingen over omtrekshoeken en middelpuntshoeken zijn vaak handige hulpmiddelen.
Omdat niet duidelijk is hoe het verder moet, zet je eerst maar eens de grootte van de hoeken in de figuur. Dat is vaak een goed idee.

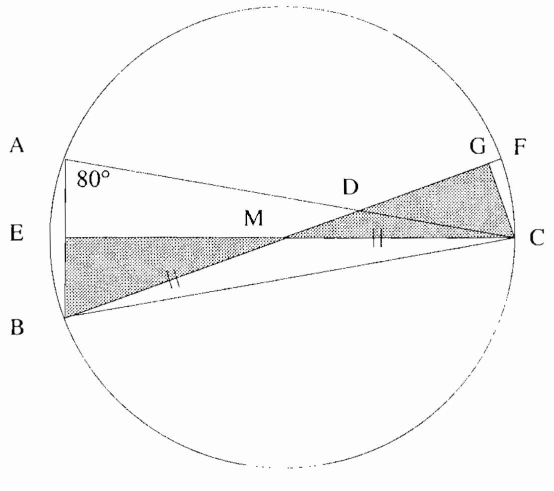
Als je de grootte van hoeken weet, zet die dan in de figuur.



Direct valt natuurlijk op dat bij punt D een hoek van 30 graden is gekomen. Een hoek van 30 graden is altijd prettig, want die komt voor in figuren waar je meer van weet, zoals bijvoorbeeld tekendriehoeken.

Een volgende stap is dan ook: trek CG maar eens loodrecht op AF. Je krijgt dan een zogenaamde tekendriehoek CGD. Misschien kom je daarmee wel verder.

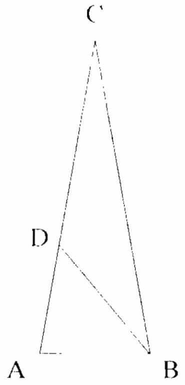
Vul eventueel de figuur aan met bekende figuren (rechte hoeken, gelijkbenige driehoeken, tekendriehoeken en dergelijke).
En dan zie je dat het bewijs geleverd is. Immers uit de congruentie van de driehoeken CGM en BEM volgt dat $CG = BE$.



Verder is $CG = \frac{1}{2} CD$ (tekendriehoek) en $BE = \frac{1}{2} AB$, zodat direct volgt dat $AB = CD$.

De tweede oplossing (Sieb Kemme)

Eerst een tekening maken.

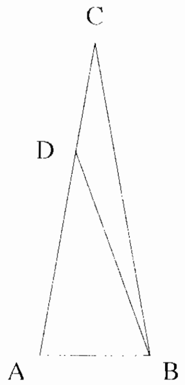


Maar dat lijkt nergens op. Die hoek bij B zal nooit 10^o kunnen zijn. Even rekenen. Tophoek 20^o, dus de basishoeken bij A en B zijn ieder 80^o. Driehoek BAD is ook weer gelijkbenig. Met tophoek A van 80^o.

Blijft voor de basishoeken bij B en D ieder 50^o over. Resteert 30^o bij hoek DBC.

Er moet iets mis zijn. Nog maar eens goed lezen.

Ja natuurlijk, niet $AD = AB$ maar $CD = AB$.



Dan nu de goede tekening.

Er zit iets geks in de opgave. Gegeven is de grootte van een hoek. Gevraagd is een grootte van een andere hoek te bewijzen. Die gevraagde hoek is precies de helft van de gegeven hoek. Ook zit in de weg dat je van die gelijke lijnstukken AB en CD niet zo gauw één gelijkbenige driehoek kunt maken. Ze liggen te ver uit elkaar. Je krijgt het gevoel van een mop die leuk moet zijn, maar die je niet snapt. Vertel het me maar.

Terugredeneren.

(De opgave blijft broeien. Ik hou me er niet echt mee bezig, maar ik denk er wel regelmatig aan. Na een paar dagen ga ik er maar weer eens voor zitten.)

Weer de tekening gemaakt.

$\angle DBC$ moet $10°$ zijn.

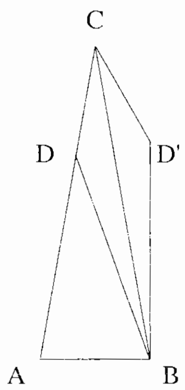
$\angle ABC$ is $80°$.

$80° + 10° = 90°$.

Dat is een rechte hoek.

Hoe plak je die $10°$ aan hoek B vast?

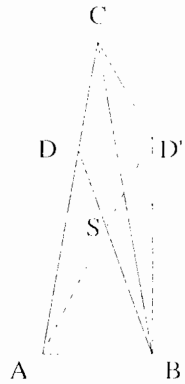
Door te spiegelen in BC.



Kortom, weer even terug: gegeven die $20°$ bij hoek C en gegeven $AB = CD$ en de spiegeling van D in BC, hoe kun je dan laten zien dat $\angle D'BA$ recht is?

Mogelijkheden zoeken.

Hoe bewijs je dat een hoek recht is? Door er een rechthoek van te maken met A, B en D' als hoekpunten. Dat vierde punt komt raar ten opzichte van de driehoek te liggen.



Een andere mogelijkheid is laten zien dat A, B en D' op een cirkel liggen met AD' als middellijn.

Dat belooft meer.

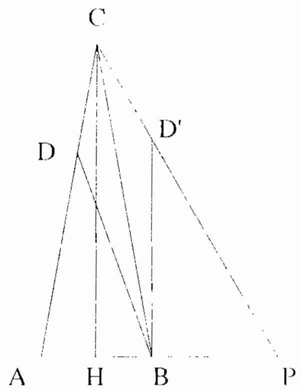
Kun je laten zien dat $AS = BS = SD'$?

Moet kunnen, maar hoe?

Een derde mogelijkheid is laten zien dat BD' evenwijdig is met de hoogtelijn CH vanuit C op AB.

Op bekend terrein zien te komen.

Als je CD' doortrekt en in P snijdt met het verlengde van AB, dan ontstaat driehoek PBD' in driehoek PHC waarin je misschien kunt beredeneren dat $PB : PH = PD' : PC$.



HB is de helft van AB omdat de hoogtelijn in een gelijkbenige driehoek ook symmetrieas is.

Dus $HB = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} D'C$.

Dan moet eigenlijk ook $PH = \frac{1}{2} PC$.

Maar dat ruikt naar hoeken van 30^o en 60^o.

Daar bovenin zit een hoek HCB van 10^o (hoogtelijn is bissectrice) en een hoek BCD' van 20^o (vanwege de spiegeling in BC), dus $\angle HCP = 30^o$, ΔHPC is de helft van een gelijkzijdige driehoek en dus $HP = \frac{1}{2} PC$.

Nog even voor de zekerheid doorrekenen:

$PB : PH = (PH - HB) : PH = (\frac{1}{2} PC - \frac{1}{2} D'C) : \frac{1}{2} PC =$

$= \frac{1}{2} [(PC - D'C) : PC] =$

$= PD' : PC$.

Klopt, dus $BD' \parallel CH$ en dus is $\angle PBD' = 90^o$.

Een eerste analyse

De moeilijkheidsgraad van het probleem ligt waarschijnlijk net boven dat wat de gemiddelde leerling aankan. Een enkele bolleboos zal er aan het eind van klas 6 met enig gezwoeg wel uitkomen. Het is zeker niet de bedoeling om dit probleem te presenteren als een soort standaardprobleem voor het meetkundeonderwijs. De keuze is volledig bepaald door het toeval en door het feit dat er zoveel aan de oplossingen is te zien.

Wat direct opvalt is het *verschil in aanpak* tussen beide oplossers.

De eerste oplossing werkt toe naar de omgeschreven cirkel, bevindt zich dan op bekend terrein en vindt vervolgens snel een bewijs. Voor de tweede oplossing vormt gelijkvormigheid in driehoeken het bekende terrein.

Opvallend is dat beide oplossers zich doelgericht op voor hen *bekend terrein* proberen te manoeuvreren. Voor oplosser 1 is dat de omgeschreven cirkel, voor oplosser 2 is dat de gelijkvormigheid in driehoeken. Kennelijk hebben

beide hun eigen favoriete aanpakken waarmee ze zich vertrouwd voelen en die voor hen succesvol zijn.
Ook een *gemeenschappelijk element* in beide aanpakken is het andersom redeneren: als je niet direct een bewijs ziet, ga je uit van wat je moet bewijzen en kijk je hoever je daarmee komt. In dit geval is er ook weinig keus. De opdracht geeft weinig houvast voor een directe strategie. Beide oplossers melden dit ook. Duidelijk levert hier de verwisseling van het gegeven met het te bewijzen meer inspiratie op.
In beide oplossingen zitten *overbodigheden en onnodige zijpaden*. In oplossing 1 kan de omgeschreven cirkel gewoon verdwijnen en vervangen worden door een directe redenering. Oplossing 2 begint met een verkeerde figuur en slaagt pas bij zijn derde poging in de speurtocht naar geschikte bewijsmiddelen.
En natuurlijk zijn beide oplossers heel *vaardig in het manipuleren* van tekeningen. Een omgeschreven cirkel, een spiegeling, een extra hulplijntje, het gaat bijna allemaal even gedachteloos en vanzelfsprekend.

Terug naar het ambacht

Hoe vinden we nu de ambachtelijke elementen terug in beide oplossingen?
In *het ontwerp* heeft de oplosser een beeld van de richting waarin hij de oplossing moet zoeken. Die ontwerpfase is in beide gevallen goed zichtbaar. Beide oplossers melden dat ze de oplossing niet zo gauw zien en storten zich vervolgens in de 'andersom-aanpak', waarin het gegeven en het te bewijzen worden verwisseld. Die andersom-aanpak geldt hier als het ontwerp van de oplossing. Duidelijk is ook dat de status daarvan maar heel voorlopig is. Deze aanpak wordt in de steek gelaten zodra deze geen inspiratie meer oplevert.

Met welk *materiaal* gaan de oplossers aan de slag bij het maken van het bewijs? Anders gezegd: welke meetkundige middelen gebruiken de oplossers bij het realiseren van het bewijs? Oplosser 1 grijpt al snel naar het middel van de omgeschreven cirkel. Oplosser 2 manoeuvreert zich met een spiegeling in een situatie waarin een rechte hoek optreedt. Op die manier kunnen de middelen van beide oplossers op een rij gezet worden:
Oplosser 1: tekening, hulplijn, omgeschreven cirkel, grootte van hoeken, de tekendriehoek, ...
Oplosser 2: tekening, rechte hoek, spiegeling, hulplijnen, gelijkvormigheid in driehoeken, ...

Ten slotte: welk *gereedschap* hanteren de oplossers?
Als meetkundige experts bezitten beide oplossers vanzelfsprekend over een perfecte *tekentechniek*. Een omgeschreven cirkel tekenen, spiegelen in een lijn, hulplijnen trekken, het is allemaal geen enkel probleem. Belangrijker is dat het redeneren en tekenen hand in hand gaat. Iedere gedachte kan bijna ogenblikkelijk in beeld worden gebracht.
Ook beheersen beide oplossers de techniek van het *logisch redeneren*. Ze houden het gegeven en het te bewijzen correct uit elkaar en weten hoe ze daarmee creatief om kunnen gaan. Ze weten hoe ze vanuit de ene eigenschap kunnen doorredeneren naar een andere eigenschap.
Ten slotte zien we dat ze de techniek van het *reflecteren op het eigen oplossingsproces* beheersen. Opvallend is dat dat niet achteraf gebeurt, maar gelijktijdig en in wisselwerking met het oplossen zelf. Het lijkt wel of er een teller meeloopt die aangeeft hoever ze zijn gevorderd en die ze na iedere stap even raadplegen. Deze zogenaamde 'metacognitieve' vaardigheid komt overeen met het timmermansoog van de meubelmaker, die van tijd tot tijd even een stap achteruit doet om zijn eigen werk op een afstand te bekijken.

Hoe onderwijs je het oplossen van meetkundige problemen?

Even vooraf. Er zijn veel manieren waarop het oplossen van meetkundige problemen kan worden onderwezen. In lijn met het voorgaande bepleiten we hier een 'ambachtelijke' aanpak. Het handige van deze benadering is dat je die ook aan leerlingen duidelijk kunt maken. Iedere leerling heeft wel een beeld bij het leren maken van een stoel. Het verwijzen naar deze beelden kan steun geven in het begrijpen van het eigen onderwijs- en leerproces.

Begin eenvoudig maar uitdagend
Op de vroegere ambachtsschool begon je met het maken van een krukje met drie poten. Hoe mooi ook uitgevoerd, het krukje leek nergens op en het verdween algauw in de kachel. In tegenstelling daarmee mocht je op de vrijetijdscursus voor meubelmaken je eigen stoel ontwerpen en vervolgens maken. De technieken van het nauwkeurig leren werken (aftekenen, zagen) en het maken van de geschikte verbindingen leerde je in het werk zelf. De docent stond met raad en daad terzijde. Hij waakte er ook voor dat je niet teveel hooi op de vork nam, zodat er altijd een min of meer bevredigend resultaat was. Deze tweede aanpak is effectiever en inspireert meer dan de eerste.

Even terug naar de meetkunde. Kies een eenvoudig maar uitdagend onderwerp om te beginnen. Niet te moeilijk, bevattende de essenties van het vak en met voldoende mogelijkheden voor eigen constructies van leerlingen. Nog eens de stelling van Pythagoras bewijzen is dus niet geschikt. Ook ongeschikt is de eindeloze exercitie van congruentiebewijzen zoals die vroeger in klas 2 werden doorgeworsteld. De congruentiebewijzen zijn de houtverbindingen. Die leer je niet geïsoleerd, maar die krijg je onder de knie als je met een mooi werkstuk bezig bent. Ken je er twee en zijn die goed gelukt, dan word je vanzelf nieuwsgierig naar de volgende. Ga dus op zoek naar meetkundige situaties waarin leerlingen zelf iets kunnen ontdekken en waarin ze zelf (met enige hulp) een eenvoudig bewijs leren leveren. Die keuze moet echter wel voldoende elementen van ontwerp, materiaalkennis en gereedschapskennis in samenhang bevatten. Het hele verhaal van omtrekshoeken in een cirkel, compleet met koordenvierhoeken, is zo'n mogelijke goede keuze. Ook het redeneren in gelijkvormige figuren kan zo'n keuze zijn. Misschien startte de leerweg van oplosser 1 wel met de eerste mogelijkheid en die van oplosser 2 met de laatste en verklaart dat het verschil in aanpak tussen beide.

Zorg voor een opbouwende ontwikkeling
Technieken en vaardigheden moet je onderhouden, anders gaan ze verloren. Niets is zo onbevredigend als het nooit meer hoeven gebruiken van een eenmaal aangeleerde techniek.
Deze suggestie werkt naar twee kanten. Het betekent dat het begin geen doodlopende weg mag zijn. De elementen die daarin aan de orde komen, moeten een vanzelfsprekend vervolg krijgen. Aan de andere kant is er sprake van een uitbouwende ontwikkeling, niet van een herhaling. Dat betekent dat de meetkundige situaties steeds complexer worden, zodat van leerlingen steeds meer wordt gevraagd. Iedere volgende stap bevat een nieuw element zonder dat de vorige verloren gaan.

Onderwijs het leren kijken met een timmermansoog
In de meeste van de wiskundemethoden zult u het bovenstaande terugvinden. Maar het leren kijken met een timmermansoog is iets dat je moeilijk uit een schoolboek kunt leren. Het gaat hier vooral om een houding ten opzichte van je eigen werk. Durf je kritisch te zijn over je eigen prestaties? Durf je het oplossingsproces een ogenblik te stoppen om even terug te kijken en eventueel een ander pad in te slaan? Sta je open voor suggesties van anderen? Het zijn allemaal zaken die zich bij het leren van meubelmaken afspelen tussen docent en leerling. Niet achteraf, niet vooraf, maar tijdens het werk.
In de praktijk van de wiskundeles betekent dit dat je beter één opgave vanuit verschillende kanten kunt bespreken, zelfs als die niet tot een goed einde is gebracht, dan snel door de antwoorden heen wandelen. Het betekent ook dat je van tijd tot tijd naast de leerling gaat zitten als die aan het werk is met een opgave. Dat kan uiteraard ook goed tijdens een klassengesprek waarin leerlingen gezamenlijk naar een oplossing zoeken.

Maak het oplossingsproces zichtbaar
Het expliciet aangeven in welke fase je bezig bent, zorgt voor een doelgerichte aanpak. Gaat het om het vinden van een geschikt ontwerp? Of zijn we met de uitvoering bezig? In het eerste geval proberen we zoveel mogelijk geschikte, maar oppervlakkige ideeën te verzamelen. In het tweede geval zijn we bezig met het uitwerken van een bepaald idee en gaan we meer de diepte in door een aantal stappen achter elkaar door te denken. Het is goed om je daarvan bewust te zijn, zodat je niet te gauw de diepte in gaat in de ontwerpfase of jezelf laat afleiden door een nieuw creatief idee in de uitvoerende fase.

Het leren beheersen van bewijsvaardigheden
In het voorgaande zijn een aantal bewijsvaardigheden genoemd zoals: kunnen tekenen, ideeën in een tekening kunnen weergeven, gegeven en te bewijzen kunnen omdraaien, een logische redenering stap voor stap in elkaar kunnen zetten. Daarnaast zijn er de metacognitieve vaardigheden: kunnen bijhouden hoever je gevorderd bent met de oplossing, naar bekend terrein kunnen toewerken, kunnen controleren of de redenering tot nu toe juist was, naar nieuwe mogelijkheden zoeken, ...
Het leren van deze kernvaardigheden vereist een zekere discipline. Te beginnen met het maken van nette tekeningen. Maar ook met het precies opschrijven wat de gegevens zijn en wat het eigenlijke probleem is.
Ook op metacoginitief niveau is het verstandig bewust en gedisciplineerd te werken. Probeer eerst het ontwerp helder te krijgen voordat je aan de uitvoering begint. Neem de rust om in de uitvoeringsfase van tijd tot tijd terug te kijken.
Vaardigheden vragen om oefening en onderhoud. Het kan helemaal geen kwaad om in een zinvolle situatie vier keer hetzelfde te doen. Bijvoorbeeld bewijsjes met congruentie. Bovendien zal de vaardigheid van tijd tot terug moeten komen in nieuwe situaties. Anders zakken ze weg en gaan ze verloren.

Geluk en vakmanschap

Ondanks alle goede vakmanschap blijft het vinden van een oplossing van een meetkundig probleem ook een kwestie van geluk hebben. Je moet maar precies op het goede ogenblik de juiste gedachte vinden. 'Geluk hebben' kun je niet leren, maar je kunt het wel een handje helpen. Bijvoorbeeld door de durf te hebben verschillende aanpakken te proberen en niet bij de pakken neer te gaan zitten als het niet direct lukt. Garanties voor een juiste oplossing geeft dit echter niet. Gelukkig maar.

Sieb Kemme, Lettelbert
Wim Groen, Vrije Universiteit, Amsterdam