Van oudsher worden eenvoudige algebra-wetten gekoppeld aan meetkundige voorstellingen. Ook vandaag vind je in de schoolboeken het rechthoeksmodel om de distributieve wet te verduidelijken. Naar de mening van **Martin Kindt** zou dit type voorstelling didactisch veel meer moeten worden uitgebuit.

Legpuzzel-algebra

Rechthoeksmodel

Een voorkamer met een lengte van a *meter en een achterkamer met een lengte van* b *meter vormen samen een suite. De breedte van beide kamers is* c *meter. Gevraagd wordt de oppervlakte van de suite.*

Aldus een voorbeeld in het eerste deel van *Leerboek der Algebra* ten dienste van de Hoogere Burgerschool, tweede druk 1933[1]. De tekst, verluchtigd met twee rechthoeken, vervolgt met twee oplossingen en dat leidt tot de formule: $c(a + b) = ac + bc$. Direct daarna komen de bekende rijtjes opgaven, waarbij 'haakjes moeten worden verdreven'. Zo was het toen, zo is het nu. Want in de huidige schoolboeken wordt zo'n beetje dezelfde strategie gevolgd. Een plaatje, een snelle conclusie, en dan oefenen zonder plaatjes. Als de leerlingen al een beeld vasthouden, dan is dat van de verdwijnende haakjes.

Nu onderscheidde het betreffende algebraboek zich tamelijk gunstig van zijn concurrenten uit die tijd.

De auteurs, dr. W.F. de Groot en dr. C. de Jong, zeggen in hun voorwoord:

> Het aantal formules is tot een minimum beperkt en vaak is van concrete gevallen uitgegaan om achterna wat theorie te geven. Het is namelijk onjuist, den leerlingen het denkbeeld bij te brengen dat de ontwikkeling der mathematische wetenschappen steeds gaat in de richting van theorie naar praktijk; wellicht is veel meer het omgekeerde het geval, en is de theorie de neerslag van doordachte en geordende ervaring.

Inderdaad hebben de auteurs moeite gedaan om de algebra zinvol te laten zijn voor de leerling en is het boek enigszins probleem-georiënteerd. Verrassend aardig is een zeer contextrijk hoofdstuk met de naam 'grafische voorstellingen', dat je zou kunnen bestempelen als realistisch wiskundeonderwijs avant la lettre.

Verdient het aangeklede rechthoeksmodel, de twee kamers en suite, ook dat predikaat? Dat is op zijn minst twijfelachtig door de didactische presentatie en uitwerking. Een kamer van a bij c meter, dat doet toch gekunsteld aan. Logischer lijkt het om eerst een serie concrete voorbeelden (dus met getallen) te laten maken, vervolgens te reflecteren op de twee mogelijke oplossingswijzen om daarna al generaliserend tot een formule te komen. Je zou dan verder kunnen gaan met een aantal plaatjessommen om het meetkundige beeld van de distributieve wet te verankeren. De afwisseling kan zitten in het mengen van variabelen en constanten, van niet-vierkanten en vierkanten, van het aantal compartimenten, enzovoorts. In een volgende fase, die zeker niet direct hoeft te volgen, zou dan de formalisering kunnen plaatsvinden. Een van de grootste misvattingen in het algebraonderwijs, van heden en verleden, is dat er zo gauw mogelijk gescoord moet worden. De als motiverend bedoelde inleidingen worden snel overschaduwd door het 'echte' werk en bijgevolg door de leerling vergeten. Aan het beoogde doel, het leggen van een concrete oriënteringsbasis, schiet men geheel voorbij; wat dat betreft is de moderne rekendidactiek een stuk verder. Algebra wordt een formeel spelletje met een lelijk jargon, waarbij je de ene keer 'haakjes moet wegwerken' en de andere keer 'buiten haakjes moet brengen' (haakjes die er bij het begin van de opdracht niet zijn, hoe kun je daar iets buiten brengen?).

De gewone leerling onthoudt slechts (of onthoudt slecht) bepaalde schema's, zoals de 'papegaaienbek' bij het vermenigvuldigen van veeltermen of het 'wegstrepen uit teller en noemer', zonder dat dit gepaard gaat met inzicht. Als dan het aantal schema's progressief toeneemt, slaat de verwarring toe en ontstaan er de bekende rare fouten; mensen zijn in het algemeen niet in de wieg gelegd voor automaat. Natuurlijk weet ik ook wel dat je in de wiskunde veel steun hebt aan optische schema's (zoals bijvoorbeeld bij het berekenen van determinanten) en dat je, als je steeds wilt teruggrijpen op inzicht, misschien niet hard genoeg opschiet en op den duur zelfs vastloopt.

Het fundamentele probleem is echter dat het schematiseren vrijwel altijd wordt geforceerd, voordat het aan te leren procédé begripsmatig is verwerkt; het schema vervangt het inzicht. Dat is, ook na de invoering van het humane programma W12-16, nog niet zo veel anders met ons algebraonderwijs. Het gaat bij het 'symbolisch rekenen' nog steeds vooral over het 'hoe', niet over het 'waarom'. Het lijkt er wel op of de klassieke algebra een ander soort wiskunde is, dat je alleen kunt aanleren via nadoen en oefenen en waarbij je eigenlijk maar zo min mogelijk moet nadenken.

Algebra bij Euclides

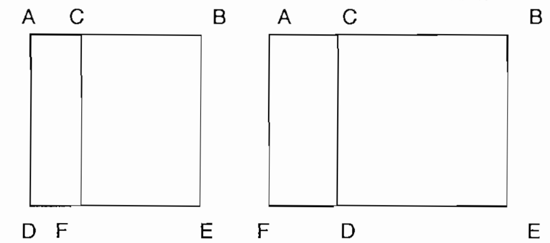
Het idee van een meetkundige onderbouwing van algebra-wetten door middel van rechthoeken is zeer oud. Van der Waerden spreekt in zijn boek *Ontwakende Wetenschap*[2] van 'meetkundige algebra', daarmee doelend op de algebra zoals die in het tweede deel van de *Elementen* van Euclides te vinden is. De eerste propositie daarin luidt:

> Indien van twee lijnen de ene in willekeurige delen verdeeld wordt, dan is de rechthoek, omvat door de twee lijnen, gelijk aan de rechthoeken, omvat door de onverdeelde lijn en de afzonderlijke delen van de andere tezamen.

Als je deze stelling uit je hoofd moet leren, ben je nog niet jarig. Trouwens, het doorgronden van wat er precies staat, vraagt ook wel enige tijd. Met 'lijn' wordt hier steeds 'lijnstuk' bedoeld. Een 'rechthoek omvat door twee lijnen' is per definitie een rechthoek (Euclides spreekt van rechthoekig parallellogram) waarvan die lijnstukken de zijden zijn.
Opvallend is dat er kennelijk sprake is van een dubbele willekeurigheid: zowel het aantal delen als de grootte ervan zijn vrij te kiezen. De propositie komt aldus overeen met een algemene vorm van de distributieve wet:

$$a(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \ldots + ab_n$$

Het is interessant om Euclides een poosje op de voet te volgen. Bij de propositie 2 en 3, die eveneens in volzinnen zijn geformuleerd, horen de volgende plaatjes en de volgende vertalingen in algebra-taal:



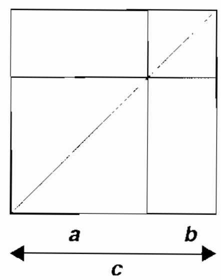
propositie 2 vertaald in algebra:

als $c = a + b$, dan $ca + cb = c^2$

propositie 3 vertaald in algebra:

als $c = a + b$, dan $cb = ab + b^2$

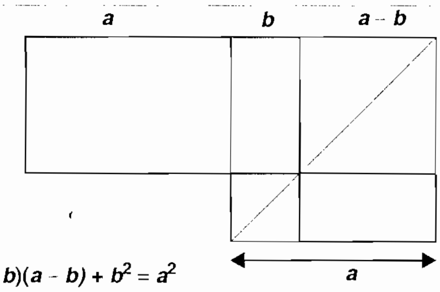
De rechthoeken *ADEB* (propositie 2) en *CDEB* (propositie 3) zijn vierkant van vorm. De lezer kan zelf uitvinden waar de symbolen *a, b* en *c* in de 'vertaling' voor staan. Beide proposities worden door Euclides bewezen in de stijl waarin hij alle meetkundige stellingen bewijst.
Het is toch een beetje merkwaardig dat deze stellingen door Euclides niet worden gezien als bijzondere gevallen van propositie 1. In zijn commentaar bij de *Elementen*[3] schrijft Thomas Heath dat Heron (die zo'n 400 jaar na Euclides leefde) misschien de eerste is geweest die in wezen de algebraïsche methode hanteerde en deze proposities (en de daaropvolgende) rechtstreeks afleidde uit propositie 1. Om misverstand te voorkomen: met algebraïsche methode wordt hier niet bedoeld 'symbolische methode'; Heron hanteerde eveneens de meetkundige taal. Van de andere algebraïsch getinte proposities vermeld ik hier allereerst nog het bekende merkwaardige product (propositie 4) met bijbehorende illustratie:



als $c = a + b$,

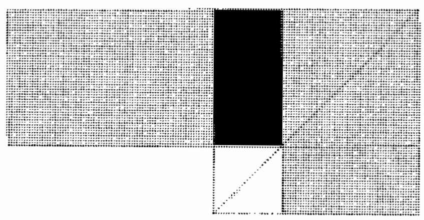
dan $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Wat opvalt, is de diagonaal in de tekening. In de latere algebraboeken wordt die meestal weggelaten, maar wat mij betreft houden we haar erin; zij accentueert het vierkante karakter van twee deelgebieden en de gelijkheid van de beide niet-vierkanten. Een ander merkwaardig product is door Euclides wat dieper verstopt:



$(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$

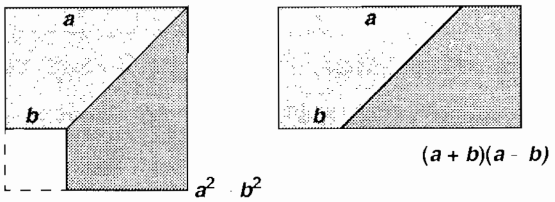
Met een beetje puzzelen wordt dit snel duidelijk, de clou is dat de grijs getinte rechthoeken congruent zijn.



Plak je nu de zwarte rechthoek beurtelings aan beide vast, dan ontstaat links de rechthoek met zijden $a + b$ en $a - b$, en rechts een figuur die door Euclides *gnomon* wordt genoemd. De oppervlakte van de gnomon is gelijk aan het verschil van de vierkanten a^2 en b^2. Euclides vermijdt het aftrekken van oppervlakten en vergelijkt de gnomon links (grijs-zwart-wit) met het grote vierkant rechts.
De figuur inspireert tot een nog aanschouwelijker manier om de formule

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

te demonstreren. Gebruik het stuk diagonaal dat de gnomon in twee spiegelhelften verdeelt; de ene helft kan nu worden omgeklapt om daarna weer te worden vastgeplakt aan de andere.



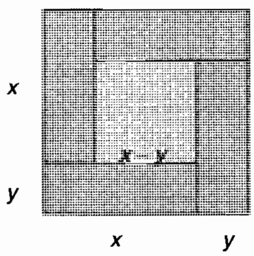
Dit merkwaardige product, dat mij altijd heeft geïmponeerd door zijn eenvoud, zou veel meer kunnen worden uitgebuit in het algebraonderwijs. Lang voor Euclides werd zij door de Babyloniërs gebruikt om bij een gegeven som en product de oorspronkelijke getallen te vinden. In feite kun je de gehele theorie van de vierkantsvergelijking hierop laten steunen.
Stel $a + b = A$ en $a - b = B$, dan $A + B = 2a$ en $A - B = 2b$, zodat geldt:

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 = AB$$

Dit is een wat minder vriendelijk ogende gedaante van dezelfde wet, die door latere algebra-beoefenaars (Fibonacci bijvoorbeeld) soepel werd gehanteerd.
Via de substitutie $A = 2x$ en $B = 2y$, levert dit op:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

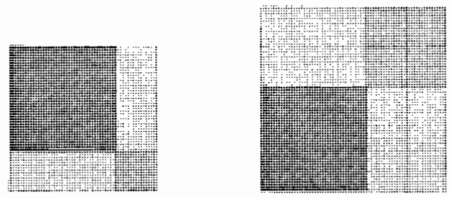
een regel die na enige moeite terug te vinden is bij Euclides als propositie 8. Zijn bewijs daarvan is tamelijk complex, maar er is een fraai alternatief:



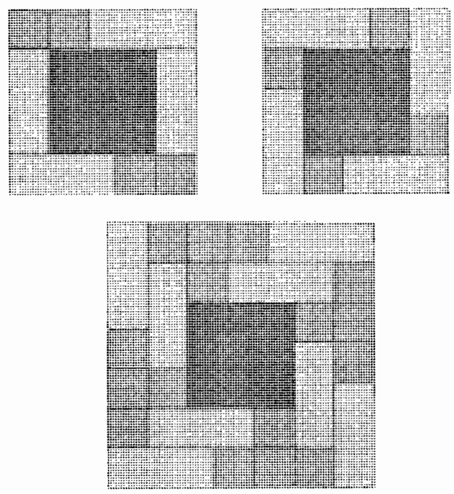
Wij weten (net als Heron) dat alle hier getoonde formules gevolgen zijn van die ene distributieve wet. De proposities van Euclides' meetkundige algebra kunnen bijna volautomatisch worden gegenereerd. De meetkundige aanpak vraagt meer creativiteit en dat is tegelijk de charme ervan. Misschien is het wel zo dat we in het onderwijs niet ongestraft deze puzzelfase kunnen overslaan en heeft de symbolische algebra naast een rekenkundige ook een meetkundige voedingsbodem nodig om echt wortel te schieten. In het vervolg van dit artikel wil ik enkele, deels oude, deels nieuwe ideeën hiertoe schetsen.

Mozaïeken en formules

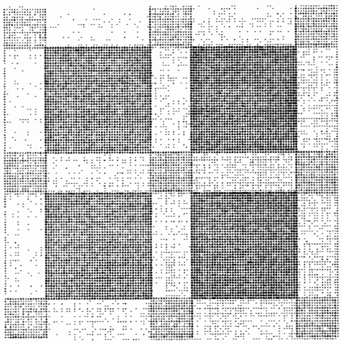
In de jaren zeventig vond de geboorte plaats van de *Wageningse Methode* en met enkele toenmalige collega's bedachten we Roosterdam, een stad waarvan de plattegrond aanleiding tot meetkundige algebra is. Jaren later, in een werkgroep op een studiedag van de NVVW, presenteerden twee KPC-medewerkers het mooie idee om met kleurige vierkantjes in twee maten en rechthoekjes waarvan de ene zijde aan het kleine en de andere zijde aan het grote vierkant paste, mozaïeken te ontwerpen. Onlangs ontdekte ik een Amerikaans werkboek, gebaseerd op soortgelijke ideeën. Kenmerkend voor genoemde benaderingen is de directe koppeling van figuren met formules. Ik ben nu geneigd te denken dat het beter is om die koppeling een poosje te laten voor wat zij is en je aanvankelijk te concentreren op de patronen en de aantallen die hierbij een rol spelen.
Het komt er dan op neer dat je het maken van mozaïeken met de genoemde stukjes als anticiperende activiteit beschouwt; van de inzichten die worden ontwikkeld, kan dan later worden geprofiteerd.
Een eenvoudige opdracht zou kunnen zijn: *probeer vierkanten te leggen met behulp van de drie soorten puzzelstukken en inventariseer hoeveel je van elk nodig hebt.*



Deze opdracht liet ik uitvoeren door wiskundeleraren in een werkgroep op een buitenlandse conferentie. Tot mijn verrassing waren er betrekkelijk weinig die – vermoedelijk met in hun achterhoofd het bekende merkwaardige product – figuren als hierboven produceerden.
De meesten leefden zich uit in fraaiere ontwerpen:



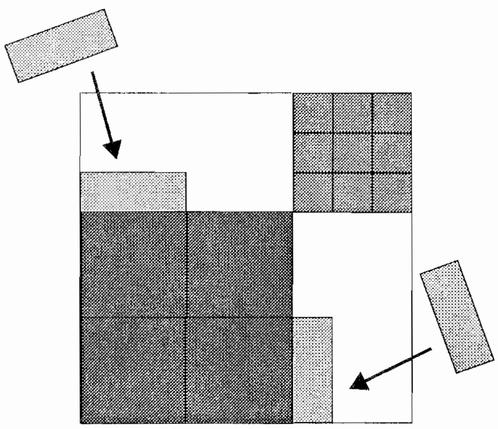
De spelregel is dat er absolute zekerheid moet zijn over het passen; als het er bijvoorbeeld op lijkt dat vijf kleine vierkantjes samen even lang zijn als twee grote vierkanten, dan mag je dat niet gebruiken. De voorgaande patronen zijn steeds met één groot vierkant gemaakt, maar dat is geen regel. Een populaire keuze bleek de volgende met vier grote vierkanten, negen kleine vierkanten en twaalf rechthoeken, een variant op Brabants bont.



In een klas zou je een tentoonstelling van de producten kunnen organiseren en vervolgens de leerlingen aanzetten tot een inventarisatie: Hoeveel van elke soort zijn er gebruikt? Dat kan leiden tot zo'n soort tabel:

Groot vierkant	***Klein vierkant***	***Rechthoek***
1	4	4
1	9	6
4	9	12
4	25	20
...	...	...

Ongeacht de vorm van het patroon zijn de aantallen grote en kleine vierkanten steeds kwadraten! Het aantal rechthoeken is duidelijk steeds even en, minder duidelijk, het dubbele van het product van de wortels uit de kwadraten. Zo'n ontdekking zou eventueel klassikaal kunnen worden gedaan. Vervolgens kan dan weer worden geëxperimenteerd of het onder deze voorwaarden altijd lukt. De strategie voor een goede redenering is: opschuiven van de puzzelstukken zodat alle grote vierkanten bijvoorbeeld links onderin en alle kleine rechts bovenin komen.



De afmetingen van het vierkant blijven dan hetzelfde, dat geldt dus ook voor het aantal rechthoekjes. Nu wordt het 'dubbele product' zichtbaar! Didactisch en wiskundig is dit een rijke situatie, waarbij:
- patronen worden ontworpen en er, ondanks de noodzaak tot structurering, toch sprake is van een behoorlijke mate van creatieve vrijheid
- niet-triviale numerieke wetten worden ontdekt die vervolgens empirisch getest kunnen worden
- meetkundig-rekenkundig wordt geredeneerd, met toepassing van een transformatieprincipe.

Dat bij elk mozaïekje een formule hoort, bijvoorbeeld

$$(2G + 3K)^2 = 4G^2 + 9K^2 + 12GK$$

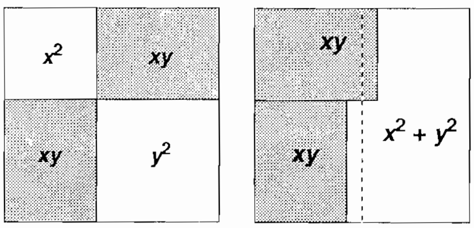
kan wachten tot een latere fase. Het lijkt me een, in dit stadium overbodige, sprong naar een hoger abstractieniveau die verkregen inzichten eerder versluiert dan verheldert. Wel een geschikt vervolg, maar ook dat hoeft zeker niet meteen, is om vierkante mozaïeken te verruimen tot rechthoekige. Bijvoorbeeld met één groot vierkant, zes kleintjes en vijf rechthoekjes lukt zoiets. Dit anticipeert op het vermenigvuldigen van lineaire tweetermen en het ontbinden in factoren van drietermen van de tweede graad. Nogmaals: de nadruk ligt op 'anticipeert', de oogst komt later. Ik laat het aan de fantasie van de lezer over welke patronen er hierbij zouden kunnen ontstaan.
Ten slotte wil ik opmerken dat, als men opziet tegen het 'fröbelen', er gedacht kan worden aan het maken van mozaïekjes op het computerscherm. Inmiddels wordt er gewerkt aan het ontwikkelen van een geschikte applet hiertoe die straks op het Wisweb van het Freudenthal Instituut te vinden zal zijn (www.fi.uu.nl/wisweb).

Numeriek aspect

Een gevaar van het veel nadruk leggen op de meetkundige algebra is misschien dat de variabelen te eenzijdig aan meetkundige grootheden zijn gekoppeld en dat de 'numerieke interpretatie' verwaarloosd wordt. Op de een of andere manier en in een of ander stadium moeten beide aspecten aan elkaar worden geknoopt.
In een recent boek van David Wells[4] vond ik op de achterflap de grappige vraag: *als x en y twee willekeurige verschillende positieve getallen zijn, welke is dan groter, $x^2 + y^2$ of $2xy$?*
Dit vind ik een mooi voorbeeld van een algebra-onderzoeksvraag voor wat rijpere leerlingen, een vraag die zowel vanuit een numerieke als een meetkundige invalshoek kan worden benaderd. Een aanpak via een zelf gemaakte tabel (of een spreadsheet!) geeft de indruk dat de eerste het steeds wint en dat het verschil tussen $x^2 + y^2$ en $2xy$ groter is naarmate het verschil tussen x en y groter is. Zie de tabel op de volgende bladzij.
Het is niet ondenkbaar dat een leerling ontdekt dat de verschillen tussen de getallen in de laatste twee kolommen juist de kwadraten van de verschillen in de eerste twee kolommen zijn. Dit vermoeden vertalen in een formule

x	y	$x^2 + y^2$	$2xy$
1	2	5	4
1	3	10	6
1	4	17	8
2	3	13	12
3	4	25	24

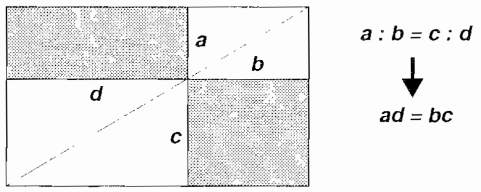
en vervolgens verifiëren, is waardevolle algebra.
Een ander zou op het idee kunnen komen om bijvoorbeeld y te vervangen door $x + c$ en te kijken hoe het verschil van c afhangt en dat leidt bijna direct tot de oplossing. Weer een ander zal misschien op de verhouding van x en y willen letten. Daarmee kan het probleem worden teruggebracht tot het vergelijken van $1 + t^2$ en $2t$, waarbij dan bijvoorbeeld ook grafieken zouden kunnen helpen.
Leerlingen die intensief met legpuzzel-algebra zijn bezig geweest, zouden bij hun onderzoek een plaatje kunnen betrekken:



Omdat $x \neq y$ (in de figuur $x < y$) zijn de grijze rechthoeken zeker niet vierkant. Dat het witte gebied groter is dan het grijze is in het linker plaatje niet gemakkelijk te zien, in het rechterplaatje echter wél! Dat wit dominanter is naarmate x en y meer verschillen, is ook duidelijk. Dat het verschil tussen de witte en de grijze oppervlakte gelijk is aan het kwadraat van $y - x$ is niet direct te zien en vereist veel hersengymnastiek.

Kruiselings vermenigvuldigen

Een berucht voorbeeld van mechanistische algebra is de wet van het kruiselings vermenigvuldigen, het toverwoord bij gebroken vergelijkingen. Voor de leerlingen is het niets meer en niets minder dan een optische truc: er staan twee breuken en links-boven maal rechts-onder is rechts-boven maal links-onder. Zo werkt dat en als je onderweg geen rekenfouten maakt, gaat alles gesmeerd.
Populair in de didactiek voor het rekenen met evenredigheden is thans het werken met de verhoudingstabel. Als ik bedenk hoe ik als leerling een stuk of acht regels van buiten moest leren over verwisseling van buitenste of binnenste termen, enzovoort, is dit werkelijk een enorme vooruitgang. Voor berekeningen in een realistische context of toepassingen in andere schoolvakken is de verhoudingstabel (die ook meer etages dan twee kan hebben!) absoluut een adequaat middel. Van Hiele introduceerde destijds de 'evenredigheidsmatrix', wat in wezen hetzelfde model is. Kruiselings vermenigvuldigen kun je missen bij elementaire vraagstukjes, maar bij het formuleren van wetten of bij gebroken vergelijkingen kan de gelijkheid van producten heel handig zijn. Idealiter zou je willen dat leerlingen al werkende met evenredigheidstabellen het principe zelf ontdekken. Vooral een tabel met meer dan twee etages zou daar een aanleiding toe kunnen zijn. Bij goed onderwijs breekt dan een moment aan waarop de leerling trek krijgt in een verklaring. De uitleg kan natuurlijk formeel-algebraïsch (links en rechts vermenigvuldigen met het product van de noemers), maar voor zo'n mooie wet wil je toch iets eleganters. Verhoudingen, schaal, evenredigheid, de eerste prille ervaringen met deze begrippen zijn meetkundig gekleurd. Met gelijkvormigheid van figuren zijn we vanaf de kleutertijd min of meer vertrouwd. Dus waarom niet iets in die richting gezocht? En ja, de volgende uitleg met rechthoeken kan toch niet anders dan bevredigend worden genoemd.



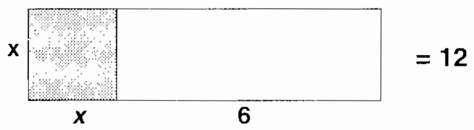
De witte rechthoeken zijn gelijkvormig, de diagonaal staat hiervoor garant, dus $a : b = c : d$ (om typografische reden vermijd ik de breukstrepen). Even puzzelen leert dat de grijze rechthoeken even groot van oppervlakte zijn: aangevuld met een kleine en een grote witte driehoek vormt elk de helft van de rechthoek.
Conclusie: $a \times d = b \times c$.
Is het niet treurig dat in een boek als *Getal en Ruimte* (3HV1, 1995), volstaan wordt met een paar getallenvoorbeelden (via de kleinst denkbare verhoudingstabel), waarna de wet in zijn algemeenheid gewoon wordt meegedeeld? Om over het vervolg, een puur receptmatige beoefening van de 'regel van drie' maar niet te spreken: zo wordt er een karikatuur van wiskunde gemaakt!
Ik wil er nog even op wijzen dat de stelling over de gelijkheid van de grijze rechthoeken zeer klassiek is. Samen met haar omgekeerde (als de rechthoeken gevormd door de horizontale en verticale lijn gelijk zijn, dan ligt het gemeenschappelijke hoekpunt op de diagonaal) heeft zij een groot toepassingsbereik. Helaas een beetje vergeten in ons onderwijs zijn eenvoudige constructieopgaven over figuren met gelijke oppervlakte. Uitgaande van een gegeven rechthoek kun je, lettend op bovenstaand plaatje, snel een heleboel andere rechthoeken construeren met dezelfde oppervlakte (een kwestie van draaien van de diagonaallijn). Deze activiteit zou dan kunnen leiden tot het langs meetkundige weg bepalen van punten (hoeveel je maar wilt) van een belangrijke grafiek: de orthogonale hyperbool.

De vierkantsvergelijking

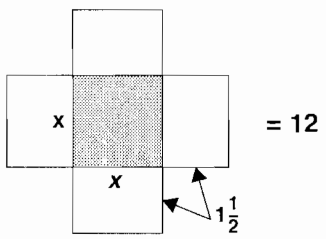
De vierkantsvergelijking – de naam is veelzeggend – is een schoolvoorbeeld van een stukje algebra waarbij de legpuzzelaanpak veel vruchten afwerpt. Bovendien kan deze aanpak in een historische context worden geplaatst (denk aan Al Khwarizmi!), waardoor er nog een verrijkende en motiverende component toegevoegd wordt. Neem een simpel ogende vergelijking als

$$x^2 + 6x = 12$$

Het raden van oplossingen, een leuke en nuttige sport, helpt niet, omdat er geen 'mooie' oplossingen voorhanden zijn. Als je nog niet met het *abc*-kanon hebt leren schieten, ligt wellicht de inklemmethode het meest voor de hand, maar dat is eigenlijk analyse. Meetkundig gezien (met vermijding van negatieve oplossingen) is er sprake van een 'oppervlakte-vergelijking'



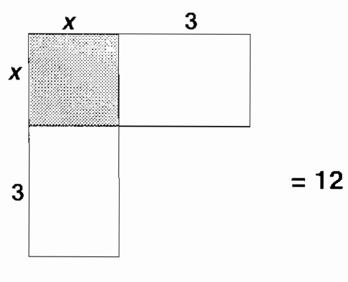
Helaas zijn er oneindig veel verschillende rechthoeken met oppervlakte 12. De kunst is nu om de figuur zo te veranderen, dat er geen vrijheid overblijft. Al Khwarizmi paste daartoe deze transformatie toe:



De oppervlakte van het kruis kun je nu ook vinden door er een vierkant omheen te bouwen. Zo kom je vrij gemakkelijk tot:

$$(x+3)^2 = 12+9$$

De gebruikelijke strategie is om het witte balkje in twee gelijke stukjes te splitsen en een gnomon te vormen:



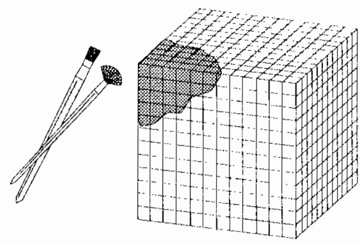
Ook dit puzzeltje willen leerlingen wel oplossen. Het kan bijna uit het hoofd: 12 + 9 = 21 en als je van de wortel uit 21 nu 3 aftrekt, heb je x. Dit is geen fantasie, maar een ervaring (toegegeven geen recente) met leerlingen van HAVO 3. Tot op het eindexamen bleven leerlingen dit model hanteren. Wel hadden we toen natuurlijk allang voor de symbolische vorm gekozen, al was het alleen maar om de negatieve oplossingen te kunnen rechtvaardigen. Opvallend daarbij was dat bijna iedereen begon met $6x$ te vervangen door $3x + 3x$ en niet door $2 \cdot 3x$, dat soort ogenschijnlijke kleinigheden zijn niet onbelangrijk voor leerlingen. Het mooie van de visuele kwadraatafsplitsing is dat zij op de een of andere manier minder getruct lijkt, ook al is de transformatie-stap er niet een die iedereen onmiddellijk spontaan zelf ontdekt. Het is echter niet zo moeilijk om inleidende oefeningen te verzinnen die het voor veel leerlingen mogelijk maken die stap wel uit te vinden! Ook generalisatie, die via

$$x^2 + px = q$$

ten slotte naar de *abc*-formule leidt, ligt, mits meetkundig ondersteund, binnen de mogelijkheden van veel leerlingen.

Een staaltje ruimte-algebra

Tot slot een uitstapje naar de ruimte, geïnspireerd door een aardige probleemstelling van Pierre van Hiele.



Een kubus, opgebouwd uit een aantal kubusblokjes (in de figuur 12 bij 12 bij 12), wordt aan de buitenkant geheel rood geschilderd. Hoeveel blokjes krijgen drie, twee, één en nul kleurvlakjes? Van de eerste categorie zijn er 8, van de tweede 12 × 10, van de derde 6 × 100 en van de laatste 1000. Alles uitgerekend en opgeteld geeft 1728 en dat moet dan gelijk zijn aan 12^3. Variatie van de aantallen en generalisatie leidt dan tot een indrukwekkende formule:

$$n^3 = (n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 12(n-2) + 8$$

die na de substitutie $n = k + 2$ wat vertrouwder oogt.
Dit laatste voorbeeld is ook een staaltje van 'discrete algebra' (de variabele staat voor natuurlijke getallen) en op dat terrein wil ik mij in een volgend artikel begeven.

Martin Kindt, Freudenthal Instituut

Literatuur

[1] De Groot W.F. en C. de Jong (1933). *Leerboek der Algebra*. Groningen: Wolters.
[2] Van der Waerden, B.L. (1950). *Ontwakende Wetenschap*. Groningen: Noordhoff.
[3] Heath Th.L. (1956). *Euclid, the thirteen books of the Elements*. New York: Dover Publications.
[4] Wells, D. (1995). *You are a Mathematician*. New York: John Wiley & Sons.