Wat te bewijzen is

Rubriek

Wat te bewijzen was

De vorige aflevering van deze rubriek ging over een mooi patroon van kwadraten en driehoeksgetallen:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

enz.

Gerrit de Bruijn uit Amersfoort maakte mij attent op een stijlvolle variatie van de door mij gekozen aanpak.
Zoals vaak in de wiskunde kan keuze van een andere startvariabele tot een flinke vereenvoudiging leiden. Laat x nu niet het eerste getal van een regel voorstellen, maar het laatste getal van het linkerlid!
De als paradigma gebruikte zeventiende regel van het schema vind je dan via de vierkantsvergelijking:

$$(x-17)^2 + \ldots + x^2 = (x+1)^2 + \ldots + (x+17)^2$$

ofwel:

$$x^2 - 4(1 + \ldots + 17)x = 0$$

Ik citeer nu verder letterlijk de briefschrijver:
Naast de triviale oplossing 0 *vinden we dus* 4 *maal het zeventiende driehoeksgetal! En opnieuw: de stap van* 17 *naar n is slechts een formaliteit. Ten slotte: regel n van het (niet-triviale) patroon begint met het kwadraat van:*

$$4 \cdot \tfrac{1}{2}n \cdot (n+1) - n = n \cdot (2n+1)$$

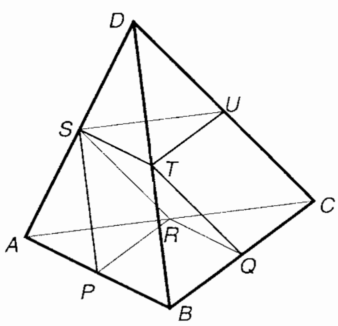
hetgeen juist driehoeksgetal numero 2n is.

Na het schaamrood de reflectie. Ik was zo gretig om de door mij bewonderde formules van som en product van de wortels nog eens ten tonele te voeren, dat ik de zojuist beschreven oplossing, die even simpel als elegant is, over het hoofd zag.
Verder bracht het me een wijze les in herinnering: het transformeren van een vergelijking of formule naar gemakkelijker hanteerbare vorm is een principe dat in het algebraonderwijs nooit te veel aandacht kan krijgen.

De inhoud van een piramide

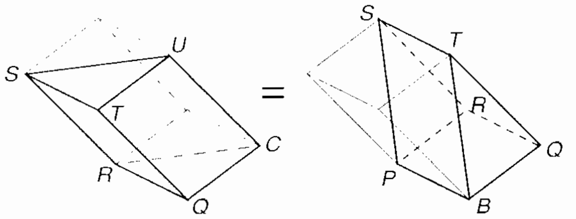
De oppervlakte van een driehoek is de *helft* van die van elk parallellogram waarvan basis en hoogte gelijk zijn aan die van de driehoek; daarvan zijn een aantal zeer aanschouwelijke bewijzen in omloop. De inhoud van een viervlak (of algemener een piramide) is een *derde* van die van elk prisma waarvan basis en hoogte gelijk zijn aan die van de piramide; het is irritant dat dit een stuk lastiger te begrijpen is. Lang geleden sprak ik als onervaren leraar een door de wol geverfde collega van een naburig lyceum daarover aan. Tot mijn verbijstering vertelde hij zonder de minste gêne hoe hij in HBS B de stelling demonstreerde met behulp van plastic modellen en wat leidingwater. Drie keer overgieten en klaar.
Empirie in de wiskundeles kan prima zijn, mits het daar niet bij blijft! Een proef is geen 'proof', waarnemen is geen 'zien'. Had de man de moeite genomen om te beredeneren dat, uitgaande van de regel voor die ene piramide en dat ene prisma waar hij toevallig een model van beschikbaar had, onomstotelijk volgt dat voor elke andere piramide dezelfde regel geldt, ik zou een stuk coulanter hebben geoordeeld. Maar ja, dan ben je eigenlijk ook bijna klaar, want het lukt wel met behulp van een kubus om een zeer speciale piramide te vinden waarvoor de regel ook zonder water te zien is.

In oude schoolboeken voor stereometrie vind je allerlei strategieën: berekening van de inhoud via oneindig veel oneindig dunne prismaplakjes bijvoorbeeld. Of, wat eigenlijk op hetzelfde neerkomt, een behandeling via het doorsnede-principe van Cavalieri. Na de invoering van de analyse op de HBS in 1958 werd de integraalrekening meestal gebruikt als bewijsmiddel, een mooi dwarsverband tussen meetkunde en analyse!
In geen enkel schoolboek vond ik een oplossing zoals die in de *Elementen* van Euclides te vinden is en waarbij werd uitgegaan van onderstaande figuur met de middens *P, Q, R, S, T, U* van de ribben van het viervlak *ABCD*.



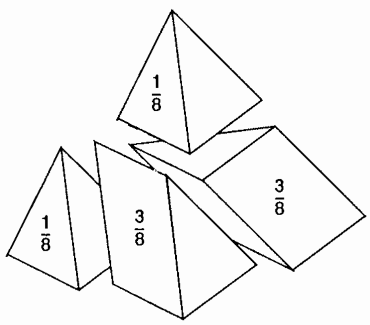
Euclides merkte op dat de beide prisma's *PRS-BQT* en *CRQ-UST* gelijke inhoud hebben; dat kan elementair (knippen en plakken!) worden bewezen.

De beide driezijdige prisma's zijn namelijk de helften van congruente vierzijdige prisma's.

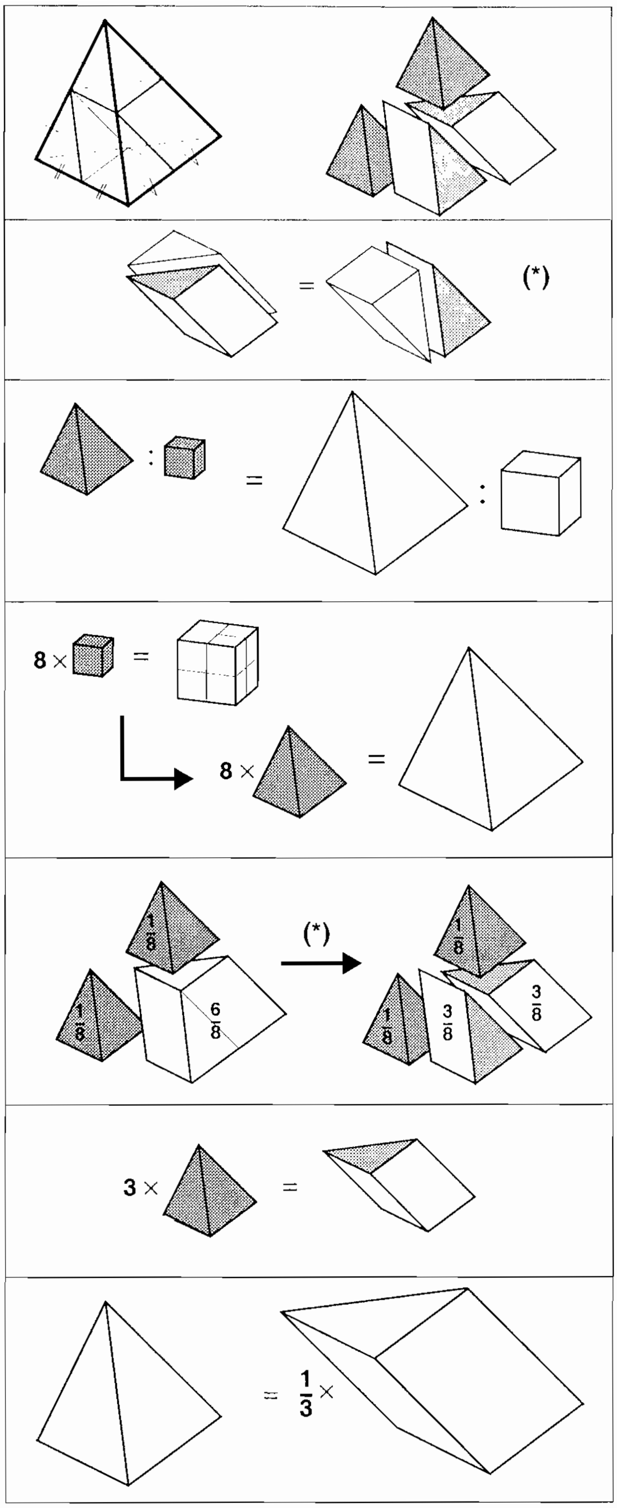


Euclides beredeneerde vervolgens dat die twee prisma's samen meer dan de halve inhoud van viervlak *ABCD* hebben en via een subtiele methode – uitgevonden door Eudoxus – bewijst hij uit het ongerijmde de sleutelstelling: 'twee driezijdige piramiden met gelijke basis en gelijke hoogte zijn precies even volumineus'. Het is schijn dat hij daarmee het gebruik van een oneindige verdeling vermeed: een component van de redenering berust op het naar nul convergeren van de oneindige rij: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$.

Ik sla nu een geheel andere weg in. Als ik de prisma's wegneem, blijven er twee viervlakken over, die elk gelijkvormig zijn met het oorspronkelijke viervlak (ribben half zo groot) en waarvan de inhoud dus gelijk is aan één achtste van die van viervlak *ABCD*. Hoezo 'dus'? Steunt dat niet juist op de inhoudsformule voor een piramide die ik wil aantonen? Zoals steeds in de wiskunde, hangt alles af van het gekozen uitgangspunt. Mijn postulaat luidt:
de verhouding van de inhouden van twee lichamen verandert niet bij schaalvergroting (-verkleining) van beide met dezelfde factor.
Plausibel als wat. Omdat bij schaalvergroting-met-zekere-factor de inhoud van een *kubus* wordt vermenigvuldigd met de *derde macht van* die factor, geldt hetzelfde voor *ieder lichaam*! Dat is het gevolg van het postulaat. Daarmee is die 'één achtste' van zo-even gelegitimeerd. Voor elk van de beide prisma's blijft nu 'drie achtste' van de *ABCD*-koek over.



Nu weet ik genoeg. De inhoud van de 50%-kopie van *ABCD* is blijkbaar gelijk aan één derde van het prisma *RQC-STU*, juist de 50%-kopie van een prisma waarvan basis en hoogte gelijk zijn aan die van *ABCD*. Nog één



keer het postulaat van de schaalvergroting toepassen en het bewijs is klaar. In de kolom hierboven is de totale gedachtengang in beeldtaal weergegeven.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl