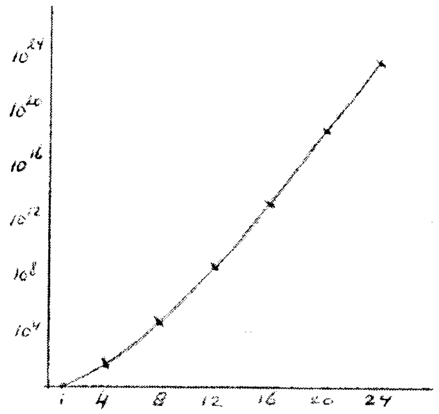
Hoeveel cijfers heeft 1000! ? **Bert Boon** vroeg zich af of er een benaderingsformule voor n! is te vinden die bovendien valt uit te leggen aan een bovenbouwer van het vwo.

De formule van Stirling gekraakt

Op een middag bladerend in wat oude tijdschriften kwam ik het vraagstuk tegen:

> Hoeveel cijfers heeft 1000! ?[1]

Nu de leerlingen over een grafische rekenmachine beschikken, is dat probleem aardig genoeg voor de klas. Toch hebben die machines nog wel even wat tijd nodig om sommaties uit te rekenen, zeker als we er nog een paar nullen bij zetten. Kortom, ik dacht, is er nu geen aardige benaderingsformule voor $n!$ die een beetje uit te leggen valt aan een welwillende bovenbouwer. De formule van Stirling[2] schoot mij te binnen en een collega bracht me de gammafunctie van Euler[3] in herinnering. Een goed boek zette mij beide zaken weer helder voor de geest, maar ik zag me dat nog niet uitleggen aan de welwillende bovenbouwer. Ik besloot met een blanco blad te beginnen en zelf op onderzoek uit te gaan, alleen gewapend met de grafische rekenmachine. Mijn mond viel open van verbazing hoe snel en natuurlijk ik op het spoor van Stirling zat. Ik wil u die speurtocht niet onthouden.
De functie $f(x) = x!$ is alleen gedefinieerd voor positieve gehele getallen. In de figuur zijn zeven punten van de grafiek van f op logaritmisch papier getekend. Door die punten is een vloeiende kromme getekend. Zou bij die kromme een functievoorschrift te vinden zijn?



Zoals bekend, stijgt de functie $x!$ razend snel.
De 'groeifactor' is

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{(x+1)!}{x!} = x + 1$$

Eerste poging

Een functie met een constante groeifactor, bijvoorbeeld 4, heeft functievoorschrift $g(x) = 4^x$.
Een functie met groeifactor $x + 1$ zou dan $g(x) = x^x$ kunnen zijn.

Laten we $x!$ eens vergelijken met x^x (in een tabel).

x	$x!$	x^x
1	1	1
2	2	4
5	120	3125
10	3628800	1010
20	$2{,}43 \cdot 10^{18}$	$1{,}05 \cdot 10^{26}$
50	$3{,}04 \cdot 10^{64}$	$8{,}88 \cdot 10^{84}$
100	$9{,}33 \cdot 10^{157}$	10^{200}

We zien dat x^x te snel groeit.
Laten we de 'groeifactor' eens uitrekenen.

$$\frac{g(x+1)}{g(x)} = \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x} = \frac{(x+1)^x}{x^x} \cdot (x+1) =$$
$$= (1 + \frac{1}{x})^x \cdot (x+1)$$

De groeifactor van x^x is dus een factor $(1 + \frac{1}{x})^x$ te groot.

Nu is bekend dat

$$(1 + \frac{1}{x})^x$$

voor grote waarden van x steeds dichter bij het getal e komt.
(Met een tabel vind je dat de afwijking van e bij $x = 10$ al minder dan 5% is, bij $x = 100$ minder dan 0,5%.)

Tweede poging

We proberen de functie

$$g(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

In de tabel zien we dat de benadering wat de orde van grootte betreft al veel dichter in de buurt komt.

x	$x!$	$(x/e)^x$
1	1	0,37
2	2	0,54
5	120	21
10	3628800	453999,3
20	$2{,}43 \cdot 10^{18}$	$2{,}16 \cdot 10^{17}$
50	$3{,}04 \cdot 10^{64}$	$1{,}71 \cdot 10^{63}$
100	$9{,}33 \cdot 10^{157}$	$3{,}72 \cdot 10^{156}$

Zou $x!$ evenredig zijn met $g(x)$? Dan zou moeten gelden

$x! = C \cdot g(x)$ of ook $\dfrac{x!}{g(x)} = C$.

Enkele waarden van $\dfrac{x!}{g(x)}$ zijn hieronder berekend.

x	$C(X) = x!/g(x)$
10	8,00
20	11,26
30	13,77
40	15,89
50	17,75
60	19,44
70	21,00
80	22,44
90	23,80
100	25,09

Conclusie: $x!$ is niet evenredig met $g(x)$, of, anders gezegd: C is afhankelijk van x:

$$x! = C(x) \cdot g(x)$$

Het zou mooi zijn als we een functievoorschrift voor C zouden kunnen vinden.
Laten we de tabel nog eens bekijken. Allereerst valt op dat de verschillen tussen de opeenvolgende waarden steeds kleiner worden:
$C(20) - C(10) = 3{,}26$, maar $C(100) - C(90) = 1{,}29$.
$C(x)$ kan dus geen lineaire functie van x zijn.

Bekijken we de tabel wat nauwkeuriger, dan valt op dat $C(40)$ ongeveer tweemaal zo groot is als $C(10)$ en $C(90) \approx 3\ C(10)$.

Zou $C(x)$ evenredig zijn met $\sqrt{x}$?

In vier decimalen nauwkeurig ziet de tabel voor $C(x)/\sqrt{x}$ er als volgt uit.

x	$C(x)/\sqrt{x}$
10	2,5276
20	2,5171
30	2,5136
40	2,5118
50	2,5108
60	2,5101
70	2,5090
80	2,5087
90	2,5085
100	2,5084

Zoals we zien is $C(x)/\sqrt{x}$ nagenoeg constant. Als formule voor onze benaderingskromme vinden we dus:

$$g(x) \approx 2{,}5\left(\frac{x}{e}\right)^x \cdot \sqrt{x}$$

Als je deze formule controleert voor $x = 10$ en $x = 100$ blijkt de fout voor $x = 10$ gelijk te zijn aan 1% en voor $x = 100$ teruggelopen tot 0,3%.
Vergelijken we ons resultaat met de formule van Stirling, dan zien we dat we heel dichtbij zijn: de constante uit die formule $\sqrt{2\pi} \approx 2{,}50663$. Overigens maken die decimalen op den duur – voor grote waarden van n – behoorlijk wat uit. De lezer wordt zelf uitgenodigd via $\log n!$ en de formule van Stirling het aantal cijfers van 1000! af te schatten en te vergelijken met het resultaat van de sommatie met de grafische rekenmachine[4].

Bert Boon, Chr. Gymnasium Sorghvliet, Den Haag
E-mail: aw.boon@hccnet.nl

Noten

[1] Via $\log 1000! = \sum_{k=1}^{1000} \log k$ en een grafische rekenmachine is dat snel uit te zoeken.
[2] De Schotse wiskundige James Stirling (1692-1770) publiceerde in 1730 de naar hem genoemde formule voor de benadering van $n!$:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

[3] De Zwitserse wiskundige Euler (1707-1783) construeerde een functie, de zogenaamde gammafunctie $\Gamma(p)$, met de eigenschap $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ en $\Gamma(1) = 1$. Voor gehele p volgt dan direct $\Gamma(p+1) = p!$
[4] De gebruikte rekenmachine is een HP 38G (rekent tot en met 253!). De overige rekenmachines tot 69!.