Met de komst van de Tweede Fase is de grafische rekenmachine ingevoerd, ook op het HAVO. **Jos Geerlings** beschrijft aan de hand van enkele opgaven zijn eerste ervaringen met leerlingen uit de M-profielen.

De grafische rekenmachine in de M-profielen van havo-4

Inleiding

Bij de invoering van de Tweede Fase op mijn school, in augustus van het lopende schooljaar, voelde ik mij enigszins onzeker ten aanzien van het gebruik van de grafische rekenmachine (GR) in mijn HAVO-4 groepen. Die jonge gasten waren met machines en apparaten toch veel handiger dan een docent? Aanvankelijk werden mijn ideeën wat dat betreft bevestigd: de leerlingen vermaakten zich met allerlei spelletjes op hun nieuw aangeschafte TI-83. Ze kopieerden die spelletjes van elkaar via de meegeleverde verbindingskabel. De bron van de spelletjes bleef daarbij onduidelijk. Het gerucht ging dat er websites op het Internet bestonden waar je die spelletjes kon downloaden. Hoe dat dan moest en om welke websites het ging, was aanvankelijk onduidelijk.
Overigens is gebleken dat die spelletjes er nogal eens voor zorgen dat de GR niet goed meer functioneert bij het uitvoeren van wiskundige handelingen.[1]

Het schoolplan

Om de leerlingen uit de M-profielen van HAVO-4 snel te leren omgaan met hun GR, was er door de wiskundesectie van mijn school voor een tweesporenbeleid gekozen:

- In de wiskundelessen werd gestart met hoofdstuk A4 'Rekenen' uit HAVO A1B1 deel 1 van *Moderne Wiskunde*. De bedoeling hiervan was om de leerlingen eerst te laten wennen aan de nieuwe gebruikersinterface van hun GR, waarbij ze deze voorlopig alleen nog als een gewone rekenmachine hoefden te gebruiken. Pas later werd gestart met de hoofdstukken waarin het maken van tabellen en het tekenen van grafieken aan bod kwam.
- Daarnaast moesten de leerlingen aan het begin van het nieuwe schooljaar zelfstandig in hun studie-uren het eerste deel van een oefenboekje[2] over de GR doorwerken. De volgorde van de onderwerpen in dit boekje kwam mooi overeen met de gekozen hoofdstukvolgorde van het wiskundeboek.

Al kort na het begin van de lessen bleek dat mijn onzekerheid volstrekt ten onrechte was: de leerlingen waren wel veel handiger met hun GR waar het spelletjes betrof, maar niet als het ging om het oplossen van wiskundevraagstukken.
De navolgende vraagstukken illustreren op welke problemen mijn HAVO-4 leerlingen zoal stuitten.

Rekenen met de GR

Allereerst een rekenvraagstuk met daaronder de door veel leerlingen gekozen aanpak.

Een lichtjaar is de afstand die het licht in één jaar aflegt. Dat is ongeveer $9{,}46 \times 10^{12}$ km. De ster Castor staat $4{,}3 \times 10^{14}$ km van ons vandaan. Hoeveel lichtjaren is de afstand van Castor tot de aarde?

```
4.3*10^14/9.46*1
0^12
    4.545454545E25
█
```

Het antwoord dat uiteindelijk in het schrift komt te staan, is dan meestal: 'ongeveer 4,5 lichtjaren'.
De volgende zaken vallen daarbij op:

- Er wordt van tevoren geen schatting gemaakt van het goede antwoord.
- De betekenis van '4.545454545E25' is kennelijk niet bekend, hoewel daar zowel in het oefenboekje voor de GR als in het wiskundeboek wel degelijk aandacht aan wordt besteed.
- Op de voorrangsregels van 'Mijnheer Van Dalen ...' wordt niet gelet. Ten gevolge daarvan worden er geen haakjes in de berekening gebruikt en is het verkregen antwoord fout.

Een uitgebreide bespreking van dit vraagstuk bleek zeer heilzaam. Soortgelijke rekenproblemen deden zich natuurlijk ook in de afgelopen jaren voor, toen de leerlingen nog met de 'oude' rekenmachines werkten. Het voordeel van de GR ten opzichte van deze 'oude' rekenmachines is dat de uitgevoerde berekening in het venster zichtbaar blijft. Daardoor kun je, als docent en als leerling, makkelijker nagaan waar de eventuele fout in de berekening zit.

Grafieken en tabellen

Ook het leren omgaan met grafieken en tabellen vergt kennelijk gewenning, getuige de beantwoording van het volgende vraagstuk.

Op 1-1-2000 wordt er euro 5000 op een rekening gezet tegen een vaste rente van 4 procent per jaar. De formule voor het kapitaal is: $K = 5000 \times 1{,}04^t$
De rente wordt jaarlijks op 1 januari op de spaarrekening bijgeschreven.
a. Plot en schets de grafiek van *K*.
b. Bereken de rentebedragen voor de komende 10 jaar.

Veel voorkomende onhandigheden bij de beantwoording van dit vraagstuk waren:

Vraag a
In het WINDOW-menu worden de waarden voor X_{min}, X_{max}, Y_{min} en Y_{max} niet aangepast aan de context, zodat er bij het plotten een leeg assenstelsel zonder grafiek verschijnt.
Bij HAVO-leerlingen uit de M-profielen spreek ik in dit verband trouwens liever niet over het 'domein' en 'bereik' van een functie, maar over het 'geldigheidsgebied' van een formule.

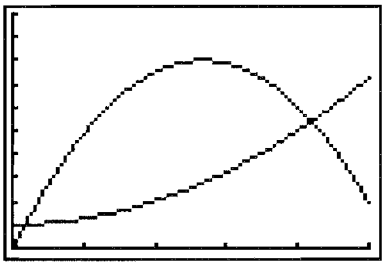
Vraag b
Er wordt een tabel gemaakt bij de formule $Y_1 = 5000*1.04\text{^}X$ en vervolgens worden de tien rentebedragen stuk voor stuk in het rekenscherm uitgerekend, bijvoorbeeld voor het derde jaar via het intypen van 5624.3 – 5408. Niemand komt (uiteraard) op het idee om een extra tabel te laten maken voor $Y_2 = Y_1(X) - Y_1(X-1)$.
Met name het bespreken van vraag *b* met behulp van een GR-docentenmodel met overheadprojectorscherm bleek bij veel leerlingen de ogen te openen voor de onvermoede mogelijkheden van hun grafische rekenmachine.

Van context naar wiskunde bedrijven met de GR

Hiernaast staat een vraagstuk over de interpretatie van grafieken waarbij allerlei zaken misgingen.

Bij vragen over grafieken geef ik meestal, onder andere door de ervaringen uit het vorige voorbeeld, het plaatje er gewoon bij. Dit om te voorkomen dat leerlingen, bijvoorbeeld door intypfouten, met de verkeerde grafieken werken. Bovendien kunnen ze op deze wijze controleren of ze de X- en Y-waarden in het WINDOW-menu op de juiste wijze hebben ingesteld.

In een fabriek worden doosjes met potloden geproduceerd.
Per week kunnen er maximaal 2500 doosjes worden gemaakt.
De totale opbrengst per week kan worden berekend met de formule:
$O = -0{,}0045A^2 + 12A$
Voor de totale wekelijkse kosten geldt de formule:
$K = 0{,}001A^2 + 1000$.
Daarbij is *O* de opbrengst in guldens, *K* de kosten in guldens en *A* het aantal per week verkochte doosjes.
In het plaatje hieronder zie je een plot van de grafieken van *O* en *K*.



a. Bepaal met behulp van je grafische rekenmachine de snijpunten van beide grafieken.
Leg duidelijk uit hoe je dit hebt gedaan.
b. Voor welke waarden van *A* maakt de fabriek winst en voor welke waarden van *A* draait de fabriek met verlies?
Motiveer je antwoord.
c. Bij welke weekproductie stijgen de grafieken van *O* en *K* even sterk?

Zaken die opvielen bij de antwoorden:

Vraag a
Dit is een vaardighedenvraag.
Aardig is dat je hier kunt kiezen voor verschillende aanpakken, bijvoorbeeld:
- een combinatie van TRACE en ZOOM
- tabellen laten maken en daaruit de X-coördinaten van de snijpunten aflezen
- in het CALC-menu de optie 'intersect' gebruiken.

Over het algemeen weten de meeste leerlingen hier wel raad mee. Problemen zijn er alleen bij leerlingen die hun X- en Y-waarden in het WINDOW- of TBLSET-menu niet juist hebben ingesteld.

Vraag b
Hoewel veel leerlingen ook het vak economie in hun profiel hebben, ontgaat toch kennelijk een flink aantal van hen de betekenis van de snijpunten die bij vraag *a* gevonden zijn.

Vraag c
Sommige leerlingen denken dat je de helling van beide grafieken kunt vergelijken door met een voldoende grote

kunt op deze wijze niet zien of de hellingen gelijk zijn bij X = *a* of een stukje verderop.
Met behulp van differentiaalrekening kan dit vraagstuk natuurlijk op eenvoudige wijze worden aangepakt, en wel door de vergelijking $O' = K'$ op te lossen. De differentiaalrekening behoort echter niet tot de wiskundeleerstof van de M-profielen in HAVO-4.
Toch kunnen ook HAVO 4-leerlingen dit vraagstuk aanpakken, en wel met behulp van de volgende redenering.
Je ziet aan de plot dat aanvankelijk het verschil tussen *O* en *K* toeneemt doordat de helling van *O* groter is dan die van *K*. Later neemt het verschil tussen beide weer af doordat de helling van *O* kleiner is dan die van *K*. De hellingen van *O* en *K* zijn dus gelijk wanneer het verschil tussen *O* en *K* maximaal is.
(Merk op dat hier in termen van differentiaalrekening zo ongeveer staat: $O - K$ maximaal $\rightarrow (O - K)' = 0 \rightarrow O' = K'$.)
Een GR-aanpak die bij deze redenering past, zou bijvoorbeeld kunnen zijn:
Maak een tabel bij $Y_3 = Y_1 (=O) - Y_2 (= K)$ en zoek met behulp van deze tabel uit waar Y_3 zijn grootste uitkomst heeft.
De hierboven geschetste redenering blijkt helaas voor veel leerlingen, zelfs als met soortgelijke vraagstukken is geoefend, te veel gevraagd.

Conclusies

In de korte tijd waarin ik tot nu toe in de M-profielen van HAVO-4 met het nieuwe wiskundeprogramma en de GR heb gewerkt, heb ik het volgende opgemerkt:

- de meeste leerlingen leren vrij snel om te gaan met de knoppen van hun GR
- een GR-docentenmodel met overheadprojectorscherm is een belangrijk didactisch hulpmiddel
- bij veel leerlingen verschijnen de te plotten grafieken niet of onvolledig in het venster van hun GR doordat ze niet in staat zijn of vergeten op grond van de gegeven context de juiste waarden voor X_{min}, X_{max}, Y_{min} en Y_{max} in het WINDOW-menu in te stellen. Dit lijkt een belangrijk aandachtspunt voor de docent
- meer in het algemeen hebben HAVO-leerlingen uit de M-profielen vaak problemen om de vragen in de gegeven context te vertalen naar een wiskundige strategie en bijbehorende GR-aanpak en vervolgens de wiskundige resultaten weer terug te vertalen naar de context.

Al met al vind ik de invoering van de GR in het voortgezet onderwijs, en zeker ook voor de leerlingen uit de M-profielen van het HAVO, een verheugende zaak. In het 'oude' programma zaten analyse-onderdelen, zoals het oplossen van vergelijkingen en het tekenen van grafieken, die door de zwakkere leerlingen als een groot struikelblok werden ervaren. Dit werk wordt voor een groot deel uit handen genomen door de GR. Daardoor komen iets complexere en door de leerlingen als minder 'kinderachtig' ervaren situaties binnen handbereik. Maar zoals uit bovenstaande voorbeelden blijkt, zijn daarmee de problemen natuurlijk nog niet opgelost. Het blijft verstandig om je als docent te realiseren dat zich in de M-profielen van het HAVO leerlingen bevinden die in het 'oude' programma wellicht helemaal geen wiskunde in hun vakkenpakket zouden hebben gekozen. Ik heb in korte tijd geleerd daar ook bij het samenstellen van toetsen en proefwerken rekening mee te houden.

Jos Geerlings, docent wiskunde RSG Broklede, Breukelen
website: http://home.hccnet.nl/j.geerlings

Noten

[1] Voor informatie over het downloaden van allerlei programmaatjes en spelletjes voor de GR en het oplossen van problemen met de GR kun je onder andere terecht op de volgende Internet-sites:
de GraphLink-pagina van TI, webadres:
http://www.ti.com/calc/docs/link.htm
de Rekenmachine-homepage, webadres:
http://www.euronet.nl/users/visboer
de ftp-site van TI, webadres:
ftp://ftp.ti.com/pub/graph-ti/calc-apps/83/
de Hyperbytes-pagina, webadres:
http://hysoft-automation.com/hyperbyte/

[2] Het gaat hier om het boekje:
Drijvers, Paul & Michiel Doorman (1997). *De TI-83, kennismaken en toepassen*. Groningen: Wolters-Noordhoff. ISBN 90 01 83290 3

SPOREN 2000

Op donderdag 13 en vrijdag 14 april organiseren CINOP en het Freudenthal Instituut voor de derde keer de conferentie SPOREN over reken- en wiskundeonderwijs in de BVE-sector.
De conferentie is bedoeld voor docenten rekenen en wiskunde uit zowel de educatie als het beroepsonderwijs.
Centraal thema van SPOREN 2000 is de integratie van rekenen en wiskunde in het dagelijks leven en de beroepspraktijk. Dit thema komt aan de orde in drie plenaire lezingen en een gemeenschappelijk practicum. Daarnaast zijn er nog drie rondes met werkgroepen rondom diverse onderwerpen.
SPOREN 2000 wordt gehouden in Golden Tulip Conference hotel Koningshof in Veldhoven.
U kunt zich nog aanmelden bij:
CINOP, Dominique Overwijn, tel: 073-6800744, email: doverwijn@cinop.nl
Bezoek ook de sporen website: www.fi.uu.nl/sporen