Krijgt de wiskunde A-lympiade een B alternatief? Bij wijze van experiment organiseerde het Freudenthal Instituut een wiskunde B-dag voor een beperkt aantal scholen. De opzet is vergelijkbaar met die van de A-lympiade, alleen de opdracht heeft een B-karakter. **Monica Wijers** bespreekt de opdracht en de zes beste werkstukken.

Mobiel bellen bij wiskunde B

Inleiding

Mobiel telefoneren is een onderwerp dat volop in de belangstelling staat, niet alleen bij de consumentenbond en bij consumentenprogramma's als Kassa maar ook in het Nederlandse wiskundeonderwijs. Blijkbaar biedt deze context voldoende mogelijkheden voor interessante (praktische) opdrachten. Zo laat de www-lympiade dit jaar de deelnemers een onafhankelijk adviesbureau oprichten dat op basis van een zelf ontwikkeld beslismodel elke klant een advies op maat over het meest geschikte toestel met pre-paid of abonnement kan geven (zie www.fi.uu.nl/wwwlympiade/). Het ordenen van informatie in een handig model wordt daarbij gecombineerd met berekeningen over de kosten op korte en lange termijn.
In dit artikel gaan we in op de opgave voor de experimentele 'wiskunde B-dag' die ook als context mobiel telefoneren heeft. Daar echter gaat het om keuzes die een nieuwe aanbieder, genaamd Mercuur, moet maken. De opdracht is, kort samengevat:
Hoe moet Nederland zo gunstig mogelijk overdekt worden met zend- en ontvangmasten en torens om tegen zo laag mogelijk kosten een zo goed mogelijke dekking te verkrijgen?

De wiskunde B-dag

Dit jaar is op 26 november 1999 voor het eerst op een beperkt aantal scholen geëxperimenteerd met een wiskunde B-dag. De wiskunde B-dag is simpel gezegd de wiskunde A-lympiade voor B-leerlingen.
Het Freudenthal Instituut zag diverse redenenen om zo'n wiskunde B-dag te organiseren:

- scholen die deelnemen aan de wiskunde A-lympiade vragen steeds vaker of teams van B-leerlingen ook mee mogen doen
- praktische opdrachten zijn in het studiehuis van belang voor alle leerlingen
- voor de nieuwe wiskunde B in de N-profielen zijn nog weinig praktische opdrachten beschikbaar.

Omdat het een eerste experiment betreft, zijn er gericht scholen gevraagd om deel te nemen. Het meest geschikt hiervoor leken de elf Profi-volgscholen. Deze scholen zijn de voorhoedescholen die het nieuwe wiskunde B-programma uittesten en daar dus het langste ervaring mee hebben. Van de elf volgscholen hebben er uiteindelijk negen meegedaan, daarnaast hebben zich nog spontaan twee andere – ervaren wiskunde A-lympiade – scholen aangemeld om mee te doen. De elf scholen deden mee met 75 teams.
De opdracht van de wiskunde B-dag is, net als die van de wiskunde A-lympiade, bestemd voor teams van drie of vier leerlingen en moet in één dag voltooid worden. Het eindproduct is een verslag of werkstuk. Anders dan de wiskunde A-lympiade heeft de B-dag dit jaar maar één ronde, er is dus geen finale. Er is wel een beoordeling in twee rondes ingebouwd. De 75 ingezonden werkstukken zijn eerst, elk in verschillende combinaties van zes werkstukken, door drie verschillende docenten nagekeken. Daaruit zijn de zes beste werkstukken naar voren gekomen en hieruit zijn door een deskundige jury de winnaars aangewezen. Voor we de uitslag presenteren, gaan we eerst in op de opgave zelf en de op de gemaakte werkstukken.

De opgave

De volledige tekst van de opgave vindt u aan het eind van dit artikel.
De opgave bestaat uit twee delen. Het eerste deel is een meer theoretisch deel waarin regelmatige patronen van zendmasten en -torens ontworpen en onderzocht worden, om zo het meest geschikte overdekkingspatroon – voor een onbegrensd oppervlak – te vinden. Wat precies onder 'meest geschikt' verstaan moet worden, kan een team zelf bepalen. Wel wordt aangegeven dat de dekkingsgraad en de kosten per oppervlakte-eenheid in beschouwing moeten worden genomen.
In het tweede, praktische deel van de opdracht, moeten de leerlingen een advies schrijven aan Mercuur (de nieuwe aanbieder) hoe die Nederland het best kan overdekken. Ook hierbij geldt dat de teams een zekere vrijheid hebben in het bepalen van wat onder 'best' wordt verstaan. In de opdracht worden wel enkele mogelijke criteria genoemd:

de kosten, de overdekkingsgraad per deel van Nederland, de eventuele uitbreidingsmogelijkheden, enzovoort.

De zes beste werkstukken

Opvallend is dat vorm, structuur en uiterlijk van de zes werkstukken behoorlijk verschillen. Slechts één van de teams heeft het 'verslag' gegoten in een brief aan Mercuur. Alle berekeningen, onderzochte patronen en overdekkingen zijn daaraan toegevoegd als bijlagen. In de brief die het advies aan Mercuur bevat, wordt steeds naar deze bijlagen verwezen. Deze vorm doet het meest recht aan het 'realistische' karakter van de opdracht. Bij de wiskunde A-lympiade is het meer gebruikelijk dat de teams het verslag in een dergelijke, door de context van de opdracht aangegeven, vorm schrijven.
De meeste teams volgen in hun verslag de structuur van de opgave en schrijven een verslag in drie delen: Inleiding, opdracht 1, opdracht 2. De berekeningen, patronen en de overdekkingskaarten worden daarbij meestal opgenomen in bijlagen. In een enkel geval is er eigenlijk geen sprake van een samenhangend verslag, maar is de opdracht uitgewerkt in losse onderdelen.
Het is jammer dat, mogelijk mede door de gekozen vorm, in bijna alle verslagen een echte afsluitende conclusie of terugblik ontbreekt.

Opdracht 1: het theoriedeel

In de opzet van de opdracht is bewust gekozen voor een 'theorie'-gedeelte. Van B-leerlingen zou je immers mogen verwachten dat ze zelfstandig in staat zijn een stukje wiskundige theorie te ontwikkelen rondom een gegeven probleem. In dit geval gaat het om het rangschikken van kleine en grote cirkels zodat de overdekkingsgraad zo gunstig mogelijk is en je toch zo weinig mogelijk cirkels nodig hebt.
De meeste teams beginnen met het vergelijken van het bereik en de prijs van torens en masten. Uit een eenvoudige oppervlakteberekening volgt dat de torens (met een groot bereik), die vijf keer zoveel kosten als de masten (met een klein bereik), maar een vier keer zo groot oppervlak bestrijken. De meeste teams trekken hieruit de conclusie dat 'het gebruik van alleen torens dus niet voordelig is'.

Patronen

Vervolgens worden er door elk team patronen van masten en/of torens ontworpen en onderzocht.
Een verwachting hierbij was dat de teams zouden onderbouwen waarom ze bepaalde patronen wel en andere niet onderzochten, of misschien meer concreet: hoe en waarom ze op een eenmaal onderzocht patroon varieerden in de hoop daarmee de kosten te drukken en of de dekking te optimaliseren. Helaas ontbrak in de meeste werkstukken deze expliciete argumentatie.
Slechts in één werkstuk werd er op een duidelijk meetkundige manier over mogelijke patronen geredeneerd.

'Zoals u op het plaatje kunt zien, heeft deze oplossing veel weg van een honingraat. In het midden van de zeshoeken liggen de posities voor de masten of torens. Deze oplossing is erop gericht om met zo weinig mogelijk posities een groot gebied geheel te bedekken. Dat wil zeggen: dat het hele gebied een ontvangst van 100% heeft. Er zit in deze figuur weinig gebied in overlappingen. Een betere oplossing hiervoor bestaat niet. De hoeken van de zeshoek zijn de plaatsen waar de cirkels elkaar raken en dus niet overlappen. Er zijn in totaal zes snijpunten. Minder snijpunten zijn niet mogelijk. Als je het bijvoorbeeld met een achthoek zou proberen, zul je zien dat er gaten vallen. Achthoeken kun je niet 'stapelen' en zeshoeken wel. Vierkanten kunnen ook gestapeld worden, maar dan zijn de gebieden die overlappen veel groter en dus minder efficient.'

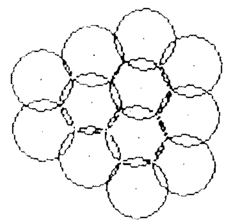

fig. 1

Hoewel het karakter van de opgave wel kansen biedt voor gebruik van een optimaliseringsstrategie, beperken de meeste teams zich tot het doorrekenen van specifieke liggingen. Een rol daarbij kan spelen dat het expliciet berekenen van de oppervlakte van dubbel bedekte gebieden bij een variabele torenafstand bepaald geen sinecure is.
Een van de teams gebruikt Cabri om patronen te onderzoeken. Uit de tekeningen in hun werkstuk is op te maken dat ze een patroon hebben 'verbeterd' door de torens iets te verschuiven met het doel de overlappende gebieden kleiner te maken. Ze vermelden echter nergens expliciet deze 'optimaliseringsstrategie'. Geen van de teams vindt de optimale plaatsing, waarbij er geen gaten vallen bij dit patroon. Die optimale plaatsing ontstaat als de cirkels om de masten juist door de snijpunten van de vier torencirkels gaan.

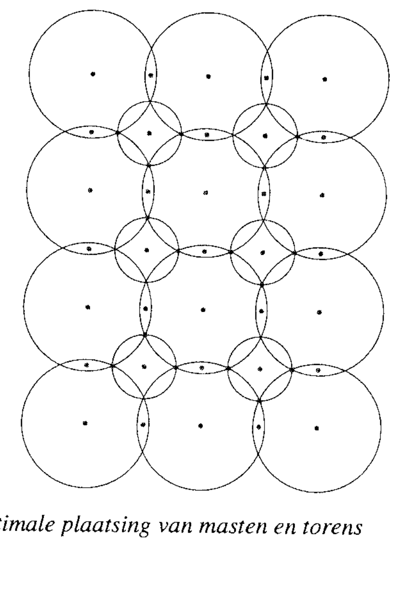

fig. 2 Optimale plaatsing van masten en torens

Overdekking en overlapping
Een probleem dat optreedt bij het overdekken is het bepalen van de verbindingskans in een overlapgebied. Is bijvoorbeeld de verbindingskans in de overlap van twee gebieden met elk een verbindingskans van 75% ook weer 75% of niet? Een aantal teams gebruikt kansrekening om deze 'gecombineerde' verbindingskansen te berekenen. Interessant is de manier waarop een team deze berekening in de context uitvoert. Dit team heeft het niet alleen over de verbindingskans in procenten, maar koppelt deze aan de kans dat je vaker dan één keer moet inbellen voor je verbinding hebt.

'Een gebied hoeft niet per se 100% kans op succes te hebben bij inbellen, want de kans dat het in een gebied met dekking niet in één keer goed gaat, is 25%. In dat geval moet je dus 2 keer inbellen. Er geldt dus:
- *de kans dat je 1× moet inbellen (0 keer mislukt) is 3/4.*
- *de kans dat je 2× moet inbellen (1 keer mislukt) is 1/4 × 3/4 = 3/16*
- *de kans dat je 3× moet inbellen (2 keer mislukt) is 1/4 × 1/4 × 3/4 = 3/64*
- *de kans dat je 4× moet inbellen (3 keer mislukt) is 1/4 × 1/4 × 1/4 × 3/4 = 3/256*
- *de kans op 5 of meer keer is zo klein dat hij praktisch verwaarloosbaar is.'*

Voor een gebied met overlap van 2 keer 75% maken ze vergelijkbare berekeningen:
- *'de kans dat je 1× moet inbellen (0 keer mislukt) is 3/4 + (1/4 × 3/4) = 15/16*
- *de kans dat je 2× moet inbellen (1 keer mislukt) is (1/4 × 1/4) × (3/4 + (1/4 × 3/4)) = 15/256*
- *de kans op 3 of meer keer is zo klein dat hij praktisch verwaarloosbaar is.'*

Opmerkelijk is dat het werken met zulke berekende kansen niet bij het ontwerpen van de opdracht was voorzien. Blijkbaar lokt het wel genoemde woord 'kans' toch zulke activiteiten uit. Natuurlijk is het ook in het licht van de context een betekenisvolle berekening.

Kosten en kansen
De onderzochte overdekkingspatronen moeten op een of andere manier met elkaar vergeleken worden om de 'meest gunstige' te bepalen. Zoals in de opgave is aangegeven, is het hiertoe van belang de prijs per oppervlakte-eenheid te bepalen en die op de een of andere manier in verband te brengen met de dekking of verbindingskansen in het gebied.
Bij het berekenen van de prijs per oppervlakte-eenheid is het nodig om een 'basispatroon' te identificeren dat herhaald wordt. Daarmee wordt dan de prijs per oppervlakte-eenheid berekend.

Aan de maat 'prijs per oppervlakte-eenheid' wordt een tweede maat toegevoegd, namelijk een maat voor de dekking. Hiervoor wordt door nagenoeg alle teams de gemiddelde dekking gekozen.
Dat dit vanwege de overlap niet makkelijk exact te berekenen is, blijkt wel uit de meeste werkstukken. Er zijn teams die dit probleem handig omzeilen:

'De berekening van de dekkingsgebieden is bij deze variant wat lastiger, omdat gebieden elkaar overlappen. Deze overlapping verwaarlozen wij omdat na berekening bleek dat de overlapping 0,3% van het geheel was. Aangezien de notering van de berekening een ellenlange geschiedenis zou worden, en deze uiteindelijk toch verwaarloosd zou worden, hebben we deze achterwege gelaten.'

Eén team omzeilt het probleem op een andere manier, waarmee zij de exacte oplossing zeer dicht benaderen. Met behulp van een zelf geschreven programma wordt de gemiddelde verbindingskans zeer nauwkeurig op pixelniveau berekend.

'Vervolgens gaat het programma het hele betekende gebied af en telt op hoeveel pixels de kans op 100%, 75%, enzovoort hebben. Deze gegevens worden op het scherm afgebeeld. Dit gaat veel sneller dan zelf de opp uitrekenen. De gem verbindingskans =
(aant.pix (met kans 75) × 0,75 + aant.pix (met kans 94) × 0,94 + aant.pix (met kans 98) × 0,98 + aant.pix (met kans 100%) × 1,00)/totaal aantal pix.'

De zo verkregen gemiddelde verbindingkansen worden voor alle patronen, samen met de andere gegevens zoals masten per vierkante kilometer, in een spreadsheet afgedrukt (zie figuur 3).
Een onderbouwing van de keuze om de gemiddelde dekkingskans uit te rekenen, ontbreekt in de meeste werkstukken en ook een terugkoppeling naar de werkelijke dekking per deelgebied ontbreekt vaak. Geen enkel team

Kans:	0%	0,75	0,9375	0,984375	1	Totaal:	Gem. Kans:	masten/vierkant km:
Patroon 1	77	6920	31693		23330	62020	0,93764842	0,00125
Patroon 2	0	12834	66130	10899	57645	147508	0,94795369	0,001283001
Patroon 3	3675	23187	72716	47	61086	160711	0,91164871	0,001443376
Patroon 4	16135	109084	91		35399	160709	0,72987253	0,000721688

fig. 3 Berekening van gemiddelde verbindingskansen bij verschillende patronen

merkt bijvoorbeeld op dat een gemiddelde dekking van 80% niet zo heel veel zegt. Zo'n gemiddelde dekking kun je als resultaat krijgen bij heel veel verschillende patronen, bijvoorbeeld ook bij een patroon waarin 20% van het gebied geen enkele kans op verbinding heeft.
Om tenslotte de gebieden te kunnen vergelijken op beide maten, maakt het team dat de hiervoor getoonde spreadsheet produceerde een grafiek waarin voor elk van de vier patronen de gemiddelde verbindingskans tegen het aantal masten per vierkante kilometer is uitgezet.

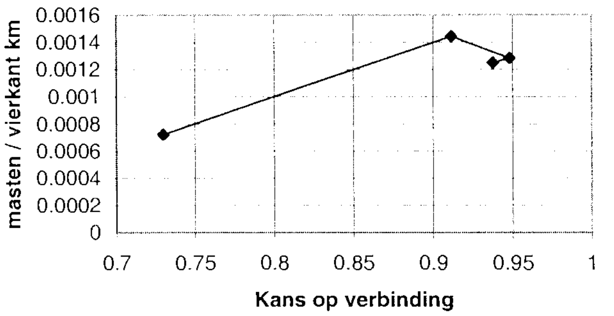

fig. 4 Verbindingskans en aantal masten per km^2, bij vier verschillende patronen

Uit de grafiek worden conclusies getrokken gericht op het overdekken van heel Nederland:

'patroon 3 valt af, want die heeft een heleboel masten per km^2. Patroon 4 is het meest geschikt voor minder bevolkte gebieden, vanwege het lage aantal masten per km^2. De 73% is dan niet heel erg. En best acceptabel. Voor de Randstad of andere dichtbevolkte gebieden nemen we het patroon waarbij een hoge verbindingskans is in verhouding met het aantal masten per km^2. Dit is patroon 1.'

Opdracht 2: Nederland overdekken

In opdracht 2 moeten de teams onderbouwde voorstellen voor een overdekking van Nederland presenteren aan Mercuur. Drie van de teams beperken zich tot één onderbouwd voorstel, de andere drie geven er twee.
De meeste teams maken onderscheid tussen gewenste overdekking in dun- en dichtbevolkte gebieden. In dichtbevolkte gebieden wordt meestal voor 100% dekking gekozen, met het argument dat daar de meeste mensen wonen en het meest gebruik wordt gemaakt van mobiele telefoons. Voor de overige gebieden valt de keuze vaak op een dekking van minimaal 75%.
Hier leven de meeste leerlingen zich goed in in de rol van adviseurs van Mercuur:

'Daarom is het verstandig topservice te bieden. Dat kost de maatschappij wel meer, maar de consument, die toch erg belangrijk is, heeft meer kwaliteit. We kiezen er dus voor om een garantie te geven van ongeveer 100% in de dichtbevolkte gebieden. En minimaal 75% in de rest van Nederland.'

Enkele gebieden komen er wat bekaaider af. Enkele citaten uit verschillende werkstukken:

'Er komen geen masten voor op de zee of het IJsselmeer. Ook de Afsluitdijk is niet rendabel genoeg.'

'De gemiddelde bevolkingsdichtheid in Nederland is 460 inwoners per vierkante kilometer. Op de waddeneilanden Ameland en Terschelling was dit aantal rond de 50, zodat we het niet nodig vonden hier een permanente mast te plaatsen. We realiseerden ons dat het daar in de zomermaanden aanzienlijk drukker zou worden in verband met vakanties en dergelijke, maar dit hebben we niet in ons verslag verwerkt.'

Het leggen van een goede verbinding tussen de patronen uit opdracht 1 en de overdekking van Nederland in opdracht 2 valt niet altijd mee. Het overdekken van Nederland is ook geen makkelijke opdracht. Een aantal teams gaat uit van een of twee van de onderzochte patronen en probeert daarmee Nederland te overdekken. Meestal constateren ze al snel dat er van het patroon moet worden afgeweken. Een andere strategie die gevolgd wordt, is om eerst enkele torens te plaatsen om dekking in de randgebieden te garanderen en vervolgens wat te gaan 'passen' met geselecteerde patronen. Ook is er een team dat een meer omgekeerde strategie van optimaliseren lijkt te volgen: beginnen met het plaatsen van losse torens en masten en vervolgens proberen daarin een patroon te herkennen:

'Met het programma Cabri-géomètre II hebben we symbolen voor torens en masten op schaal gemaakt en uitgeprint op een sheet. Deze hebben we uitgeknipt en net zolang geschoven op de kaart totdat we een rendabele dekking kregen. We kwamen erachter dat we in de Randstad heel aardig tot het patroon kwamen dat we in opdracht 1 tot beste hadden verklaard.'

Een van teams vindt eigenlijk dat de ligging van plaatsen in Nederland niet klopt:

'De oplossingen uit het vorige hoofdstuk zijn soms best lastig te gebruiken. Vooral in de grensgebieden ontstaan problemen. Ook liggen steden weleens op de verkeerde plaatsen en wordt de oplossing niet efficient.'

Ze noemen nog meer problemen die ze ondervinden, onder andere met water en met dichtbevolkte steden in dunbevolkte gebieden. Hoe ze precies tot hun uiteindelijke voorstel zijn gekomen, wordt niet helemaal duidelijk. Hierover zeggen ze het volgende:

'In dunbevolkte gebieden wordt vaak gebruik gemaakt van de tweede honingraatoplossing. In de dichtbevolkte gebieden van de derde oplossing. Het probleem is hoe je die twee met elkaar combineert.'

De oplossing op de kaart bestaat uiteindelijk uit 19 torens en 33 masten waarvan steeds de 100% grens is getekend. Door wat globaal te schatten, kun je als lezer opmaken dat de dekking nagenoeg overal minimaal 75% lijkt te zijn. De toelichting bij deze oplossing is de volgende:

'Al deze problemen hebben we geprobeerd zo goed mogelijk op te lossen. Op de kaart van Nederland staat de oplossing aangegeven waarvan wij denken dat die ideaal is. Het kan natuurlijk ook zijn dat we geen betere wisten te verzinnen of dat de tijd op was.'

Een eerlijker afsluiting kunnen we ons toch niet wensen.

Conclusies

We proberen op grond van de zes bekeken werkstukken een paar algemene conclusies te formuleren. De eerste serie conclusies ligt op het gebied van de formulering van de opdracht.

- Opvallend in de werkstukken is dat de modelvorming weinig expliciet wordt gemaakt. Veel is weggelaten of wordt niet vermeld. Keuzes worden wel gemaakt, maar lang niet altijd (zichtbaar) onderbouwd. Denk aan de onderzochte patronen: waarom zijn juist die patronen onderzocht? Hoe hangen ze samen? Hoe is gevarieerd op een patroon, met welk doel? Enzovoort. Een ander voorbeeld kwamen we tegen bij het bedenken van een maat om de patronen te vergelijken: waarom 'dekking gedeeld door kosten'?
  Het omgaan met modellen past wel goed bij wiskunde B. Het zou kunnen zijn dat de reden voor deze wat zwakke onderbouwing voortkomt uit de formulering van de opdracht. Wellicht had daarin explicieter benadrukt moeten worden dat aannames en keuzes steeds toegelicht moeten worden.
- Hiermee samenhangend is er een tweede conclusie te trekken: het gebruik van verschillende wiskundige technieken blijft beperkt. Opvallend is bijvoorbeeld dat er wel in een aantal werkstukken kansrekening wordt gebruikt terwijl dat niet zo duidelijk verwacht was, maar dat er geen optimaliseringsstrategieën worden gebruikt om het 'beste' patroon te vinden. Het herhaaldelijk gebruik van het woord '(verbindings)kans' kan deze aanpak binnen deze context hebben opgeroepen. Wellicht had het gebruik van de term 'optimaliseren' dezelfde werking kunnen hebben.
- Een laatste met beide voorgaande samenhangende conclusie is dat reflectie op het gebruik van de wiskunde en de koppeling van theorie naar praktijk en omgekeerd niet helemaal uit de verf is gekomen. Er zijn wel veel goede aanzetten gegeven door de teams, maar ook hier lijkt het dat veel overwegingen niet als zodanig op papier zijn terechtgekomen. Zo wordt de eenmaal berekende gemiddelde verbindingskans vaak niet meer in verband gebracht met de werkelijke verbindingskans per deelgebied. De verbinding tussen de theorie- en de praktijkoplossing wordt in de meeste werkstukken wel gelegd maar had – opnieuw door een scherpere formulering in de opdracht – misschien wat meer uitgediept kunnen worden.

De tweede serie conclusies ligt op het gebied van de vorm van de werkstukken.

- Er lijkt een soort omgekeerd evenredig verband te bestaan tussen de hoeveelheid wiskunde en de vlotte leesbaarheid van het verslag. Wat generaliserend geformuleerd, lijkt het zo dat teams die meer wiskunde gebruiken (zinvol of niet) minder helder structureren en schrijven. Dit kan voortkomen uit onwennigheid met dit type open opdrachten, waarbij ook de verslaglegging een deel van de opdracht is.
- Aansluitend bij bovenstaande conclusie zien we dat een aantal teams moeite heeft het reken- en tekenwerk op een passende manier met de context te verbinden en in het verslag te verwerken. Dit leidt er soms toe dat de lezer veel heen en weer moet bladeren van tekst naar patronen in de bijlagen en naar rekenwerk in andere bijlagen om te begrijpen waar het over gaat. Op dit punt zijn de verschillen tussen de teams wellicht het grootst. Dit kan te maken hebben met de ervaring die teams hebben in het schrijven van werkstukken voor wiskunde of met de regels die voor het schrijven van werkstukken en verslagen gelden op school.
- Ten slotte valt op dat maar weinig teams een vorm hebben gekozen die direct past bij de context. Het daarbij best passende product is immers een 'onderbouwd advies aan Mercuur'. Bij de wiskunde A-lympiade lijkt dit beter te lukken. Mogelijk is het moeilijker om een goed evenwicht te vinden tussen de wiskunde, de context en de tekst in een eindproduct als er meer wiskunde – in de vorm van berekeningen, tekeningen, grafieken, enzovoort – wordt gevraagd. Natuurlijk kan dit verschijnsel ook liggen aan onwennigheid van de teams met dit soort opdrachten. Een andere formulering van de opdracht, met een duidelijker omschrijving van het gewenste product, had dit wellicht kunnen voorkomen.

Alles bij elkaar kunnen we constateren dat de B-dag zeker geslaagd is te noemen. De opdracht biedt goede mogelijkheden om de voor wiskunde B ook zeer belangrijke vaardigheden op het gebied van modelvorming aandacht te geven. En ondanks de genoemde tekortkomingen zijn de werkstukken van een goede kwaliteit.

De einduitslag

De jury had het niet makkelijk bij het beoordelen van de zes beste werkstukken en het bepalen van de winnaars. Alle werkstukken zijn door elk van de zes juryleden op volgorde van 'minder goed naar goed' gelegd. Hierbij is beoordeeld op aspecten als kwaliteit van de wiskundige modelvorming en berekeningen, helderheid en mate van gestructureerdheid van het verslag, duidelijkheid en expliciet voorkomen van argumentatie en onderbouwing, vormgeving en verslaglegging passend bij de opdracht, enzovoort. Elk verslag had zijn sterke en zwakke punten en er was een goede weging nodig van de verschillende aspecten om tot een uiteindelijke winnaar te komen. Natuurlijk is dat met de nodige inspanning en een extra overleg wel gelukt.

Op de eerste plaats is een team van SG Pantarijn uit Wageningen geëindigd, bestaande uit Johan Beekhuizen, Wiebe Haanstra, Pablo Chabot en Thomas Dobbe. De reden voor deze eerste plaats is verwoord in onderstaand juryrapport:

'Dit werkstuk munt uit door het wiskundig niveau. Met behulp van kansrekening heeft dit team verbindingskansen in diverse overlapgebieden berekend en is op het idee gekomen om pixels te tellen om de oppervlakte van die gebieden zeer nauwkeurig te benaderen. Hiertoe hebben ze in Basic een programma geschreven dat voorzien is van een toelichting voor de lezer. Daarnaast hebben ze een spreadsheet programma gebruikt om hun resultaten overzichtelijk te presenteren. Een minder sterk punt is dat het werkstuk niet zo helder is gestructureerd en niet is geschreven als advies aan Mercuur. Het werkstuk is daarmee niet de ideale combinatie van goede rapportage en goed wiskundig onderzoek, maar heeft, dankzij de sterke theoretische component, toch met glans de eerste plaats verdiend bij deze eerste Wiskunde B-dag.'

Op de tweede plaats eindigde een team van het Greijdanus College uit Zwolle, bestaande uit: Jurjen Lengkeek, Michiel de Wolf, Gerbert Hengelaar en Luuk Danes. Uit het juryrapport blijkt dat hun werkstuk juist een aantal andere kwaliteiten heeft:

'Het werkstuk van dit team munt uit door de duidelijke structuur en de goede leesbaarheid. Het team heeft zich verplaatst in de rol van het onderzoeksteam van Mercuur en rapporteert vanuit die rol. De keuzes voor een bepaalde overdekking worden beargumenteerd en het kostenaspect wordt daarbij natuurlijk meegenomen. De resultaten bij de verschillende patronen worden in een overzichtelijke tabel gepresenteerd. Wiskundig gezien heeft het team wel wat mogelijkheden laten liggen: de overlap van de cirkels is ruw geschat, er is slecht afgerond en kansrekening is niet of nauwelijks ingezet. De tekeningen van de gebruikte patronen zijn echter weer perfect. Al met al is dit werkstuk een tweede plaats waardig bij deze eerste Wiskunde B-dag.'

De verdere uitslag vermelden we zonder de juryrapporten.

- Derde plaats: Dr. F. H. de Bruijnelyceum uit Utrecht met Corjan van der Kuil, Adriaan de Heer, Paul Radstake en Robert Pape.
- Vierde plaats: SG Pantarijn uit Wageningen met W. Nijland, M. Beekhuizen, L. Keukens en M. van Wingerde.
- Vijfde plaats: GSG Randstad uit Rotterdam met Allard Hamstra, Rutger de Mare, Jos Seldenthuis en Adriaan Smit.
- Zesde plaats: Greijdanus College uit Zwolle met Egbert-Jan Thijssen, Lennert Molema, Jan Wijma en Renze Jongman.

Toekomst

Ook volgend jaar zal er weer een wiskunde B-dag zijn, deze keer landelijk. De wiskunde B-dag zal op dezelfde dag gehouden worden als de voorronde van de wiskunde A-lympiade, en wel op 24 november 2000. Het profiel van de leerling bepaalt aan welke opdracht meegedaan kan worden: de wiskunde A-lympiade voor leerlingen met een M-profiel, de wiskunde B-dag voor de N-profielen. Elke school ontvangt aan het begin van volgend schooljaar meer informatie over beide activiteiten. We hopen ook voor de wiskunde B-dag op een grote belangstelling. U kunt natuurlijk nu al uw leerlingen laten oefenen met de bijgevoegde opdracht 'Mobiel met Mercuur'.

Monica Wijers, Freudenthal Instituut, Utrecht

Met dank aan Dédé de Haan, Aad Goddijn, Michiel Doorman en Sieb Kemme voor meedenken, meelezen en commentaar.

Website Nieuwe Wiskrant

De Nieuwe Wiskrant heeft een eigen website: www.fi.uu.nl/wiskrant.

Op deze site zijn in de rubriek 'bij de nummers' alle in artikelen genoemde links aan te klikken. Zo hoeft u zelf geen ingewikkelde webadressen meer in te typen. Bovendien worden wijzigingen in web-adressen verwerkt op de site.

Verder staat het volledige register van de Nieuwe Wiskrant op de site. Er zijn twee versies:

- een compleet bestand met alle tot nu toe verschenen artikelen (19 jaargangen, ruim 800 artikelen) alfabetisch op auteursnaam
- een register met zoekfunctie. U kunt zoeken op auteursnaam, titel, jaargang, jaar van verschijnen en trefwoorden.

Mobiel telefoneren volgens Mercuur

Mercuur start met zekerheid en is toekomstgericht

Mercuur is een nieuw bedrijf in telecommunicatie dat zich op de Nederlandse markt richt.
In tegenstelling tot andere bedrijven start Mercuur zijn activiteiten pas als het Nederlandse net er klaar voor is en men zeker weet dat het bedrijf met de verworven inzichten en ervaringen verder kan gaan.
Omdat het bedrijf toekomstgericht is, doet het echter nu reeds – theoretisch – onderzoek hoe veel grotere gebieden dan Nederland ontsloten kunnen worden voor mobiele telefonie.

Deze wiskunde B-dag opgave moet een concurrerende bijdrage aan dat onderzoek leveren en bevat daarom twee componenten:
- *een theoretische, algemene, component*
- *een praktische, op Nederland gerichte component.*

Hoe werkt een mobiel net?

Een net voor mobiele telefonie bestaat uit een groot aantal zend- en ontvangstmasten. Het oproepsignaal van een mobiele telefoon wordt door een in de buurt staande mast opgevangen. Deze geeft het signaal door naar een centrale, alwaar de positie van de ingeschakelde telefoon in een computer wordt bijgehouden. Stel nu dat persoon A wil bellen met persoon B. A toetst het nummer van B in. De oproep wordt door de zendmast doorgestuurd naar een centrale. Daar wordt uitgezocht waar de telefoon van B zich bevindt, er wordt een signaal naar een mast in de buurt van B gestuurd en uiteindelijk wordt de verbinding gelegd.
De huidige stand van de informatietechnologie maakt het mogelijk dat de centrale computer zeer snel voor alle gespreksaanvragen de juiste route via de zenders kan bepalen. Het feitelijk leggen van de verbindingsroute is dus geen probleem meer. Maar daarvoor moeten nog wel voldoende zend- en ontvangmasten geplaatst zijn, en die moeten zodanig geplaatst zijn dat het werkgebied voldoende zeker overdekt is.

Deze wiskunde B-dag opgave gaat dan ook alleen over het probleem van de meest gunstige plaatsing en keuze van de zend- en ontvangmasten.
Gunstig betekent natuurlijk gewoon: goedkoop.

Aard van ontvangst- en zendapparatuur

Een mobiele telefoon zelf is een kleine zender en ontvanger in één; het zendbereik is echter beperkt omdat het zendvermogen slechts 1 watt is.
Het hangt ook van de kwaliteiten van de ontvangstmast af wat de mogelijkheden zijn. Er zijn twee typen: masten en torens. Bij beide is de sterkte in alle richtingen gelijk en hangt het er dus alleen vanaf hoever je met je mobiele telefoon van mast of toren af zit.

Gegevens over de masten:

– afstand van 10 kilometer of minder van de mast:	verbinding is 100% zeker
– afstand tussen 10 en 20 kilometer van de mast:	75% kans op verbinding
– afstand meer dan 20 kilometer tot de mast:	minder dan 10% kans op succes.

Gegevens over de torens:

– afstand van 20 kilometer of minder van de mast:	verbinding is 100% zeker
– afstand tussen 20 en 40 kilometer van de mast:	75% kans op verbinding
– afstand meer dan 40 kilometer tot de mast:	minder dan 10% kans op succes.

Prijsverhouding:
Een toren kost vijf keer zo veel als een mast.

Bij deze wiskunde B-dag-opgave ga je steeds uit van deze gegevens en maak je ook steeds gebruik van het feit dat de gebieden waarin je met de aangegeven kansen ontvangst kan verwachten cirkelvormig zijn.
De grote vraag is: hoe kunnen masten en torens zo 'gunstig' mogelijk geplaatst worden.

Aard van het uit te voeren onderzoek

Mercuur is zeer geïnteresseerd in alles wat uit bovenstaande gegevens volgt.
Maar een voorstel dat alleen maar aangeeft 'voor Nederland heeft u waarschijnlijk zoveel masten en zoveel torens nodig' zal niet hoog scoren bij Mercuur.

Bij deze wiskunde B-dag bepaal je daarom voor een groot deel je eigen koers.
Het gaat er namelijk om:

- *dat er creatieve oplossingen en patronen worden bedacht*
- *dat oplossingen goed onderbouwd moeten zijn met figuren en berekeningen*
- *dat aangetoond wordt dat gekozen oplossingen gunstiger zijn dan andere*
- *dat dit alles in een eindrapport wordt samengevat dat er helder uitziet.*

De twee wiskunde B-dag opgaven

Zoals gezegd bestaat de wiskunde B-dag-opgave uit twee delen:

- een algemeen theoretisch deel
- een praktisch op Nederland gericht deel.

Jouw team levert een bijdrage aan beide delen.
Uiteraard sluit jullie praktische oplossing aan op je theoretische inzichten!

Opdracht 1: Algemeen theoretisch deel

In dit deel onderzoek je – en je rapporteert daarover – hoe masten en/of torens in regelmatige patronen geplaatst kunnen worden en wat het effect daarvan op de totaalprijs is.
Je onderzoekt daartoe bijvoorbeeld mastopstellingen in regelmatige patronen als van een bijenraat en van een rechthoekig vierkantjes patroon, of in andere patronen, waarbij ook combinaties van masten en torens kunnen optreden.
Het gaat er dan vooral om welke patronen gunstig zijn voor in alle richtingen zeer uitgestrekte gebieden; dan wordt de prijs praktisch geheel bepaald door het patroon waarmee je de oppervlakte overdekt en niet door de vorm van de grens van het gebied. Je onderzoekt dus de prijs per oppervlakte-eenheid en houdt geen rekening met speciale randeffecten.

Je kunt het onderzoek richten op een 100% zekere dekking, maar je kunt ook overwegen gedeelten van het gebied slechter te bedienen, als dat gedeelte betrekkelijk klein is en het netwerk van masten en torens er relatief veel goedkoper van wordt.
Denk er aan: jij rekent in je eindrapport regelmatige plaatsingsmogelijkheden voor Mercuur door en licht die toe. De directie van Mercuur neemt uiteindelijk de beslissing of ze met jouw voorstellen en inzichten in zee gaan.

Opdracht 2: Praktisch op Nederland gericht deel

Bij dit deel gebruik je intensief de kaart van Nederland.
Ook hier liggen veel mogelijkheden open.
Je kunt Mercuur bijvoorbeeld voorstellen eerst de grote steden en de snelwegen te overdekken en daarvoor een geschikte masten- en torensplaatsing aan te geven. Of misschien kom je tot de conclusie dat dit bij de latere uitbreiding naar het hele land zo'n grote handicap is dat het afgeraden moet worden. Dan motiveer je dát in je rapport.
Je kunt een voorstel geven voor plaatsing waardoor heel Nederland al dan niet 100% zeker overdekt wordt. Je kunt eventueel doorrekenen hoeveel een latere voltooiing tot een volledig zeker net dan gaat kosten.
Misschien zijn er nog andere voorstellen mogelijk.

In je rapport licht je jouw plaatsingsvoorstellen, die je nauwkeurig op de kaart aangeeft, toe en geef je argumenten waarom jouw voorstel gunstiger is dan andere mogelijkheden.

Bijlagen en te gebruiken apparatuur

Per onderzoeksgroep zijn er vijf kaarten van Nederland op A3-formaat beschikbaar; deze kaarten zijn exact op de volgende schaal: 1 cm op de kaart komt overeen met 10 kilometer op het terrein.
Je wordt verondersteld zelf een rekenmachine bij je te hebben als je die nodig denkt te hebben.
Computers van de school staan tot je beschikking en die kun je gebruiken op alle mogelijke manieren die deze apparaten toestaan.