

Wat blijft er over van het vwo Wiskunde B-examen als je computeralgebra mag gebruiken? **Willem Hoekstra** nam de proef op de som en maakte de analyse-opgaven met behulp van de TI-89.

Wat toetsen wij?

Inleiding

Genietend van een tussenuur door het wegvallen van mijn examenklas, kreeg ik van een collega het examen vwo Wiskunde B oude stijl voorgelegd. Toevallig had ik in mijn tas een TI-89 zitten en omdat luiheid ook mij niet vreemd is, besloot ik het examen met dit ongeoorloofde hulpmiddel te maken. Het resultaat vond ik opzienbarend en daarom volgt hier een kort verslag van mijn ervaring.

Ik had verwacht dat het examen door het gebruik van de TI-89 makkelijker zou worden, maar dit bleek slechts ten dele het geval te zijn. Het uitbesteden van het algebraïsch rekenwerk maakte het wiskundig denkwerk voor mijn gevoel niet wezenlijk eenvoudiger. Daarentegen was er natuurlijk wel het gemak van een apparaat dat veel werk uit handen nam, waardoor ik binnen een half uur driekwart van het examen had gemaakt. (De meetkunde opgave had ik overgeslagen.)

Voor de goede orde, toen ik achteraf het correctievoorschrift erbij pakte, bleek dat het grootste deel van de scores verdiend was door de machine en slechts een klein deel door mijzelf. Dit is wellicht ook een aanwijzing waarom de leerlingen over het algemeen negatiever waren over dit examen dan de wiskundedocenten.

Voorbeelden

Ik zal bovenstaande aan de hand van een aantal voorbeelden uit dit examen illustreren.

Om te beginnen waren er vraagstukken die hun relevantie volledig verloren hadden, zoals onderdeel 7 uit opgave 2. Het herleiden van deze goniometrische functie was slechts bedoeld om te helpen de primitieve te vinden voor de integraal die in onderdeel 8 berekend moest worden. Met de TI-89 was dit niet meer nodig, aangezien de machine de integraal ook met de functie in de oorspronkelijke vorm aankon.

(Dat wilde niet zeggen dat al het denkwerk meteen verdwenen was. In eerste instantie liet ik de machine de integraal:

Opgave 2

Gegeven is de functie $f: x \rightarrow \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$

met domein $[0, 2\pi) \setminus \{\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\}$.

In figuur 1 is de grafiek van f getekend.

Op hetzelfde domein is g de functie

$g: x \rightarrow -\frac{3}{2} \tan x$.

8p 5 Los op: $f(x) = g(x)$.

Uit figuur 1 blijkt dat de grafiek van f dalend is voor $\frac{1}{2}\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$.

7p 6 Bewijs dit.

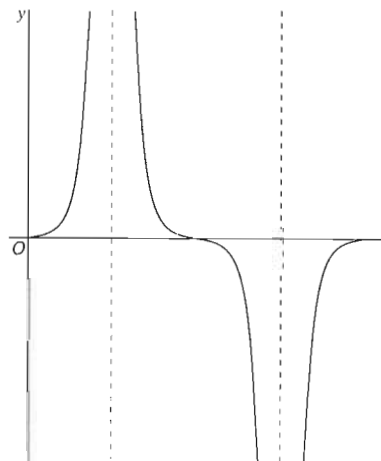
V is het vlakdeel begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 1\frac{1}{4}\pi$.

2p 7 Toon eerst aan dat $f(x)$ te schrijven is als

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x.$$

7p 8 Bereken nu de oppervlakte van V .

figuur 1



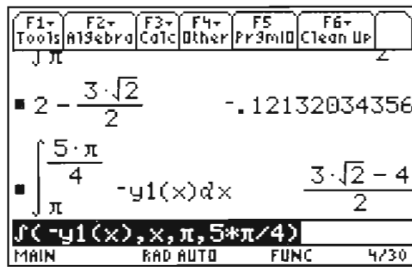
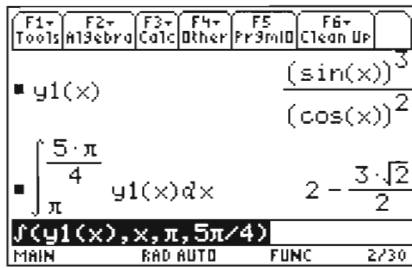
Wiskunde B oude stijl, 1e tijdvak, mei 2000

$$\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} f(x) dx$$

uitrekenen. Ik herkende het exacte antwoord $2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ niet direct als een negatief getal.

Gelukkig heb ik de gewoonte om ook altijd een benaderd antwoord te laten uitrekenen. Zo kon ik mijn gezicht redden en alsnog:

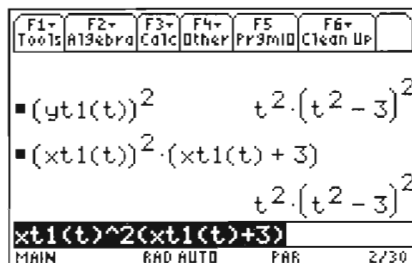
$$\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} -f(x) dx \text{ laten uitrekenen.})$$



Een ander voorbeeld van een vraagstuk dat bijna geheel bestond uit algebraïsche manipulatie was onderdeel 2 uit opgave 1.

Hier werd gevraagd aan te tonen dat de punten van een kromme K waarvan de parametervoorstelling gegeven was, voldeden aan de vergelijking $y^2 = x^2(x + 3)$. De enige essentiële wiskundige stap was dat substitutie in de vergelijking van de parametervergelijkingen voor x en y tot een identiteit zou moeten leiden.

De rest van het werk kon ik overlaten aan de TI-89 die links en rechts keurig herleidde tot $t^2(t^2 - 3)^2$.



De essentie van dit vraagstuk werd pas duidelijk in het volgende onderdeel. Daar werd namelijk gevraagd om de inhoud te bepalen van het omwentelingslichaam van de

Opgave 1

De kromme K is gegeven door $x = t^2 - 3$ en $y = t^3 - 3t$.

- 9p 1 Teken K, bereken daartoe eerst de coördinaten van
- de snijpunten van K met de coördinaatassen,
 - de punten van K waarin de raaklijn aan K evenwijdig is aan één van de coördinaatassen.

De coördinaten van de punten van K voldoen aan de vergelijking $y^2 = x^2(x + 3)$.

- 3p 2 Toon dit aan.

V is het vlakdeel ingesloten door K.

- 5p 3 Bereken de inhoud van het lichaam dat ontstaat door V te wentelen om de x-as.

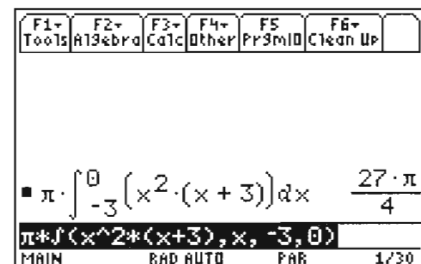
De lijn $y = ax$ heeft precies één punt met K gemeenschappelijk.

- 6p 4 Bereken voor welke waarden van a dit het geval is.

kromme om de x-as. Met alleen de parametervoorstelling tot je beschikking kwam je niet ver, maar na substitutie van de vergelijking uit het vorige onderdeel in de integraal:

$$\pi \int_{-3}^0 y^2 dx$$

was er voor de TI-89 geen vuiltje meer aan de lucht.

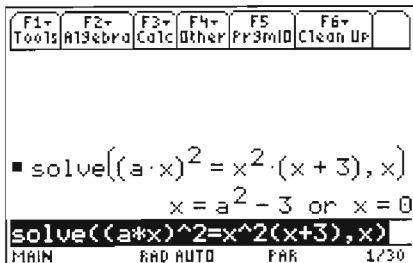


Ik realiseerde me achteraf dat wanneer de vergelijking uit onderdeel 2 niet gegeven was, dit een leuke opgave was geweest voor een examen waarbij de TI-89 wel als hulpmiddel gebruikt zou mogen worden.

De onderdelen die het interessantst bleven, waren over het algemeen de vraagstukken waar parameters een rol speelden, zoals bijvoorbeeld onderdeel 4 van opgave 1. Hier moest een waarde voor een parameter a gevonden worden, zodat de lijn $y = ax$ één punt met de kromme K gemeenschappelijk had.

Een essentiële stap hierbij bleef om bijvoorbeeld de vergelijking van de lijn te substitueren in de vergelijking van de kromme en vervolgens deze vergelijking op te lossen

naar x . De TI-89 gaf hiervoor als oplossing $x = a^2 - 3$ of $x = 0$. Vervolgens moest je bedenken dat je deze twee oplossingen moest laten samenvallen, ofwel dat je moest oplossen $a^2 - 3 = 0$.



Opvallend vond ik hier het correctievoorschrift: de mens kreeg twee punten, de machine vier (waarvan nota bene twee voor het oplossen van de vergelijking $a^2 - 3 = 0$). Ook in opgave 4, waarin de bundel functies:

$$f_a(x) = a \frac{\ln x}{x}$$

moest worden bestudeerd, vroeg het opstellen van de

juiste vergelijkingen, die afwisselend naar variabele en naar parameter opgelost moesten worden, over het algemeen meer wiskundig inzicht dan het uitvoeren van de algebraïsche manipulaties.

Conclusie

Terugkijkend op deze wellicht wat vreemde exercitie is de belangrijkste conclusie niet zozeer de kracht van de machine of de weinig uitdagende opgaven van het oude wiskunde B-programma. Die zijn lijkt mij bij iedereen gevoegelijk bekend. Wat mij veeleer is opgevallen, is het gevoel dat het examen wiskundig gezien niet wezenlijk was veranderd. Het was alleen in de helft van de tijd te maken.

Wanneer we een hulpmiddel als de TI-89 toelaten in ons onderwijs, zal dit zeker invloed hebben op het curriculum en op de toetsing daarvan, maar dit hoeft wellicht niet zo ingrijpend te zijn als door sommigen gevreesd wordt.

Willem Hoekstra, JSG Maimonides, Amsterdam

(Advertentie)

De SLO zoekt docenten met recente ervaring in de 2^e fase havo

De SLO is in samenwerking met enkele partners gestart met de ontwikkeling van een computerondersteund programma voor examentraining.

Op dit moment zoeken wij docenten wiskunde met recente examen ervaring in het havo, die bereid zijn om vaardigheid te ontwikkelen in het maken van trainings- en toetsopgaven (schoolonderzoeksniveau). Wij bieden u een ontwikkelgroep waarbinnen u zich inwerkt in het nieuwe havo programma en u uw inzicht vergroot in de problemen die leerlingen ondervinden bij het maken van examenopgaven. Tegenover dit werk staat een vergoeding.

Wij zijn ons bewust van de zware belasting die wiskundedocenten in de 2^e fase op dit moment ondervinden. Toch durven wij deze vraag tot u te richten, mede om de inspiratie en de direct bruikbare ervaring die dit project u biedt.

Bent u nieuwsgierig of geïnteresseerd, of bent u anderszins geïnteresseerd om betrokken te worden bij activiteiten van de SLO? Want er is veel te doen in de 2^e fase.

Voor nadere informatie kunt u zich richten tot:

Pieter van de Zwaard
SLO
Postbus 2041
7500 CA Enschede
074-4840348
P.vanderZwaard@slo.nl

S | L | O

specialisten in leerplanontwikkeling