Op een schilderij van vijfhonderd jaar geleden is een wiskundeles vereeuwigd. De Franciscaan Pacioli tekent een meetkundige figuur, onder het toeziend oog van een leerling. **Michel Roelens** analyseert het schilderij en gaat in op de wiskunde die erachter zit.

Een schilderij komt tot leven

Op een lei wordt een meetkundige figuur getekend. Het is een detail van een doek van vijfhonderd jaar geleden, waarop een wiskundeles is vereeuwigd. Van welke leraar is de hand? Wie schildert? Wie krijgt les? Waarover gaat de les?

Vertrekkend van het schilderij proberen we deze historische wiskundeles te reconstrueren en aan te passen aan onze leerlingen van het jaar 2000. Dit leidt ons tot de *Elementen* van Euclides, tot wiskundige kunstenaars van de Renaissance en tot de geschiedenis van de veelvlakken.

Het schilderij

Het doek hangt in het statige *Museo di Capodimonte*, op een groene heuvel met uitzicht op Napels. Voor de meeste bezoekers van het museum is dit maar één van de vele schilderijen; voor ons wiskundeleraren vormt het een belangrijk document over de geschiedenis van de meetkunde en het meetkundeonderwijs, althans als Nick MacKinnon (1993) het bij het rechte eind heeft.
Het doek werd ruim een half millennium geleden, in volle Renaissance, in Venetië geschilderd. De leraar in het

fig. 1 Het portret van Luca Pacioli, Museo di Capodimonte, Napels

midden is de Franciscaan Luca Pacioli, geboren in 1445 in Borgo San Sepolcro, een dorp in Umbria (Midden-Italië) waar ook de schilder en wiskundige Piero della Francesca geboren is. Pacioli en della Francesca hebben elkaar trouwens goed gekend. Pacioli is de auteur van een encyclopedisch boek over wiskunde, de *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni e proporzionalità*, gepubliceerd in het Italiaans (en niet in het Latijn) in Venetië in 1494. Het bevat onder meer een praktische samenvatting van de *Elementen* van Euclides. De *Summa* is rechts op het schilderij te zien, onder het regelmatig twaalfvlak. Een ander werk van Pacioli is *La divina proporzione*, een boekje over veelvlakken en de gulden snede, voor een groot stuk overgeschreven uit de *Libellus* van Piero della Francesca. De prachtige illustraties in *La divina proporzione* zijn verzorgd door niemand anders dan Leonardo da Vinci, waar Pacioli mee bevriend was. Pacioli was geen grote vernieuwer van de wiskunde, maar eerder een echte leraar die de (oorlogvoerende) stadsstaten van het huidige Italië afreisde om wiskunde te onderwijzen.

We zien dat Luca Pacioli op een lei een meetkundige figuur tekent, terwijl hij met de andere hand een passage aanwijst in een boek dat op de tafel openligt. Hebben we te maken met een 'portret van een wiskundige omringd door wiskundige attributen', zoals verscheidene kunsthistorici beweren? Of gaat het eerder om een 'verslag' van een wiskundeles die echt heeft plaatsgevonden, op doek vastgelegd bij gebrek aan een videocamera? We zullen het wellicht nooit met zekerheid weten, maar de tweede mogelijkheid is voor ons en onze leerlingen veruit de interessantste.

De figuur op de lei stelt een cirkel voor met daarin ingeschreven een gelijkzijdige driehoek en een lijn die Pacioli aan het tekenen is. Die lijn is een zijde van een regelmatige vijfhoek ingeschreven in diezelfde cirkel (figuur 2).

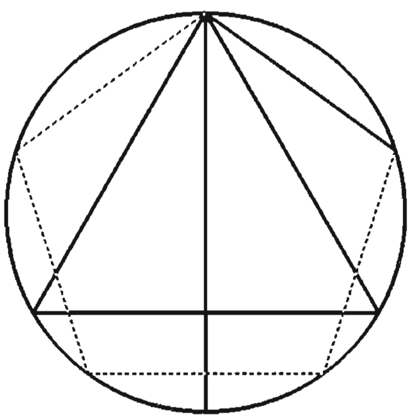

fig. 2 De figuur op de lei

Het boek dat op de tafel openligt, is een Latijnse vertaling van de *Elementen* van Euclides, in 1482 door Erhald Ratdolt gedrukt in Venetië. MacKinnon slaagde er zelfs in de juiste bladzijde te identificeren en de eigenschap waar Pacioli naar wijst. Die luidt: *het kwadraat van een zijde van een gelijkzijdige driehoek is het drievoud van het kwadraat van de straal van de omgeschreven cirkel.* Dit houdt inderdaad verband met de figuur op de lei. Maar wat is het verband met veelvlakken? Het eigenlijke onderwerp van de les op het schilderij, volgens de interpretatie van MacKinnon, is niet de vlakke figuur op de lei op zich, maar een belangrijke eigenschap van regelmatige veelvlakken die ermee samenhangt. De lezer zal deze eigenschap ontdekken aan het einde van dit artikel.

Wie is de leerling rechts op het doek? Het doek is opgedragen aan Guidobaldo, zoon van Federico di Montefeltro, de hertog van Urbino. Sommigen leiden hieruit af dat Guidobaldo de leerling moet zijn. Maar: hij lijkt er niet op. De gelijkenis met Albrecht Dürer is een stuk sterker (figuur 3).

fig. 3 Links: detail van een portret van Guidobaldo door Giacomo Francia; in het midden: zelfportret van Dürer in 1493 (detail in spiegelbeeld); rechts: zelfportret van Dürer in 1498 (detail in spiegelbeeld)

De ontmoeting tussen Pacioli en Dürer is niet bewezen, maar men weet wel dat Dürer tijdens de winter 1494-1495 in Venetië vertoefde en er heel wat bijgeleerd heeft over meetkunde en schilderkunst. Ook Pacioli zat in Venetië voor de publicatie van zijn *Summa*. Dürer sprak echter niet vloeiend Italiaans noch Latijn, maar de Duitse uitgever van de *Summa*, dezelfde Ratdolt die de *Elementen* had gedrukt, kan best als tussenpersoon gediend hebben.

Een andere mogelijke band tussen Pacioli en Dürer is de schilder. Het doek is ondertekend met 'Jaco. Bar'. De schilder is waarschijnlijk Jacopo de' Barbari, ofschoon sommige kunsthistorici dit betwisten en het doek toeschrijven aan een mysterieuze schilder die geen andere werken zou hebben nagelaten. Men weet dat De' Barbari zowel Dürer als Pacioli gekend heeft. Dit wordt door MacKinnon (1993) uitgebreid beargumenteerd.

Het glazen veelvlak dat half gevuld is met water, is waarschijnlijk later bijgeschilderd door Leonardo da Vinci. De weerkaatsing van het licht van de vensters in het glas en in het water is zo perfect afgebeeld, dat enkel Leonardo tot een dergelijke stunt in staat was. Pacioli bezat een verzameling glazen veelvlakken en men weet ook dat Da Vinci en Pacioli bevriend waren en zelfs samengewoond hebben.

Regelmatige en halfregelmatige veelvlakken

Om het historische belang van de geschilderde wiskundeles te begrijpen, moet je iets afweten van de geschiedenis van de veelvlakken.
Een convex veelvlak wordt *regelmatig* genoemd als de zijvlakken gelijke regelmatige veelhoeken zijn en als bovendien in elk hoekpunt eenzelfde aantal zijvlakken samenkomen. Een redenering over het aantal zijvlakken per hoekpunt toont aan dat er niet meer dan vijf mogelijkheden zijn. In elk hoekpunt moeten immers minstens drie zijvlakken samenkomen en de som van de hoeken die er samenkomen moet kleiner zijn dan 360°. In elk hoekpunt kun je bijgevolg enkel drie, vier of vijf gelijkzijdige driehoeken hebben, of drie vierkanten of drie regelmatige vijfhoeken. Deze redenering toont aan dat er *niet meer* dan vijf mogelijkheden zijn. Aantonen dat de vijf regelmatige veelvlakken *bestaan*, gebeurt door ze te *construeren*. Hun Griekse namen verwijzen naar het aantal zijvlakken: *tetraëder, octaëder, icosaëder, hexaëder* (kubus) en *dodecaëder*. Hoewel ze al vóór Plato (vierde eeuw v. C.) bekend waren, worden ze *Platonische lichamen* genoemd. Deze filosoof en wiskundige associeerde de regelmatige veelvlakken met de *elementen* waaruit de natuur zou zijn samengesteld: vuur, lucht, water, aarde en het universum (figuur 4).
De hierboven geschetste redenering die aantoont dat er niet meer dan vijf regelmatige veelvlakken bestaan, komt voor in een tekst van Theaitetos, een leerling van Plato.

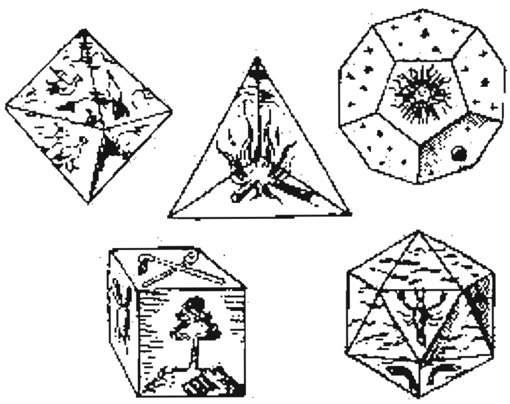

fig. 4 De vijf Platonische lichamen geassocieerd met de 'elementen' (tekening van Kepler)

De *Elementen* van Euclides monden uit, in het dertiende boek, in de constructie (en dus het bestaansbewijs) van de vijf Platonische lichamen. Die bekleden in de Griekse meetkunde dus een ereplaats. Het is de apotheose waar in de *Elementen* naartoe gewerkt wordt.
De astronoom, astroloog en wiskundige Johannes Kepler (rond 1600) was zo onder de indruk van de schoonheid van de regelmatige veelvlakken, dat hij ze gebruikte om er de harmonie van het zonnestelsel mee uit te leggen. De banen van de zes toen gekende planeten zouden op boloppervlakken liggen in- en omgeschreven aan de vijf Platonische lichamen (figuur 5). Later, toen nauwkeuriger waarnemingen voorhanden waren, moest hij dit model laten varen en vervangen door de 'wetten van Kepler' die nu nog onderwezen worden.

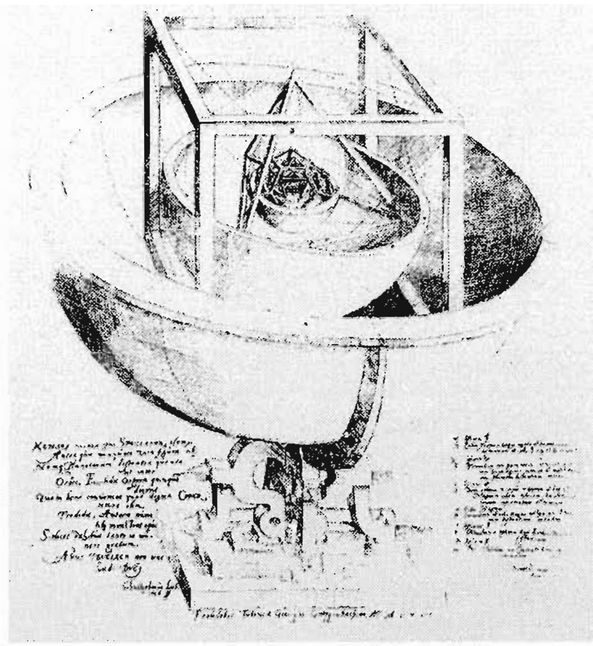

fig. 5 Kosmologisch systeem van Kepler (Mysterium cosmographicum, 1596)

Een convex veelvlak heet *halfregelmatig* wanneer de zijvlakken regelmatige veelhoeken zijn van meer dan één soort en in elk hoekpunt hetzelfde patroon voorkomt. De dertien *Archimedische lichamen* voldoen aan deze definitie, alsook twee oneindige families: de prisma's en de antiprisma's (figuur 6). De dertien Archimedische lichamen zijn ontdekt door Archimedes (derde eeuw v. C.), maar zijn tekst hierover is verloren gegaan. In de Renaissance werden een deel van deze dertien veelvlakken herontdekt door Piero della Francesca, Pacioli, Dürer, ... Pas bij Kepler vinden we een beschrijving van alle dertien Archimedische lichamen.
Het veelvlak op het schilderij (figuur 1), half gevuld met water, is één van deze dertien, de rhombi-kubo-octaëder (nummer 10 op figuur 6). Dit lichaam bezit merkwaardig genoeg een minder symmetrisch 'broertje' dat eveneens aan de definitie van halfregelmatig veelvlak voldoet (figuur 7). Je zou dus kunnen stellen dat er naast de prisma's en de antiprisma's 13,5 halfregelmatige veelvlakken bestaan. De rhombi-kubo-octaëder van het schilderij symboliseert op een dubbele manier de vier elementen. Als veelvlak bestaande uit vierkanten en gelijkzijdige driehoeken verwijst hij naar de eerste vier Platonische lichamen. Daarenboven zit er water en lucht in; het glas (vaste stof) verwijst naar de aarde en het vuur is aanwezig in de vorm van de lichtweerkaatsing.

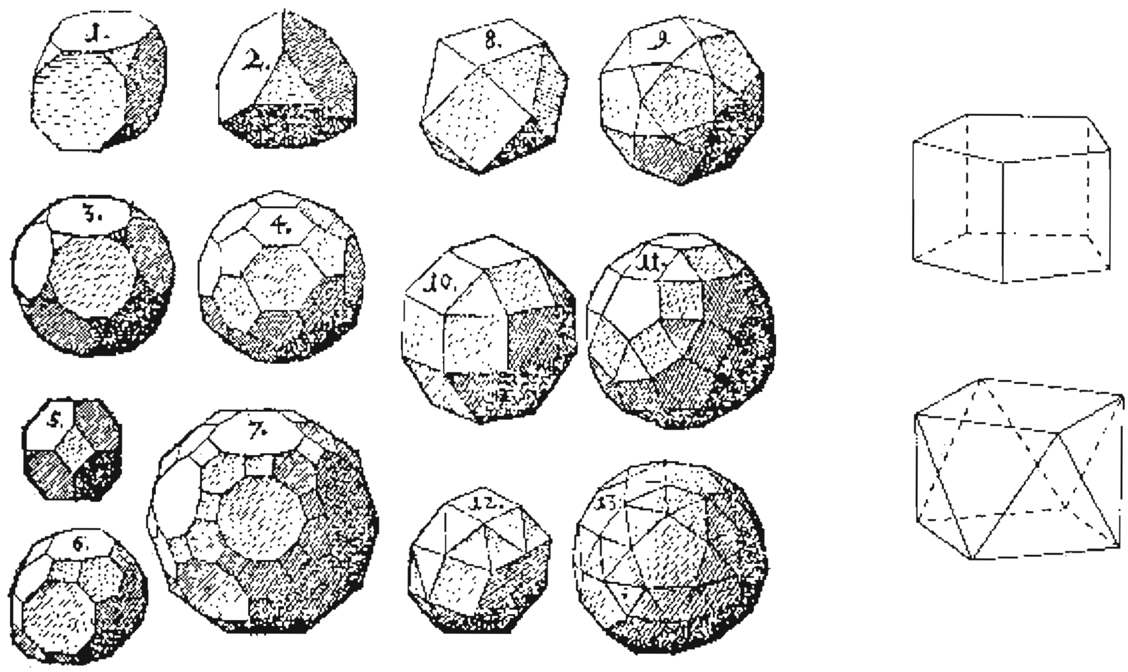

fig. 6 De dertien Archimedische lichamen (tekeningen van Kepler); rechts een prisma en een antiprisma

De dodecaëder en de icosaëder volgens Euclides en Pappos

Laten we op zoek gaan naar het precieze onderwerp van de les die Pacioli aan Dürer geeft. We moeten dus een verband vinden tussen de figuur op de lei (figuur 2) en de regelmatige veelvlakken. (De rhombi-kubo-octaëder die later toegevoegd is, laten we hierbij links liggen.)
Euclides construeert de dodecaëder vertrekkend van een kubus met rechthoekige 'kammen' (figuur 8). De eindpunten van deze kammen worden verbonden met de hoekpunten van de kubus zodat vijfhoeken ontstaan. Het komt erop aan te bewijzen dat je de afmetingen van de kammen zo kunt kiezen, dat deze vijfhoeken vlak en regelmatig zijn (gelijkzijdig en gelijkhoekig). In plaats van regel per regel de bewijzen van Euclides te overlopen, doen we het liever op onze manier, met anachronistische algebraïsche berekeningen. Merk eerst op dat we ons dankzij de symmetrie slechts met één vijfhoek hoeven bezig te houden.
In een regelmatige vijfhoek is de verhouding diagonaal/zijde gelijk aan:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

de gulden verhouding. (We herinneren eraan dat $\varphi^2 = \varphi + 1$ en $\varphi^{-1} = \varphi - 1$. Deze gelijkheden zullen nuttig zijn voor de lezer die de berekeningen hieronder wenst te ve-

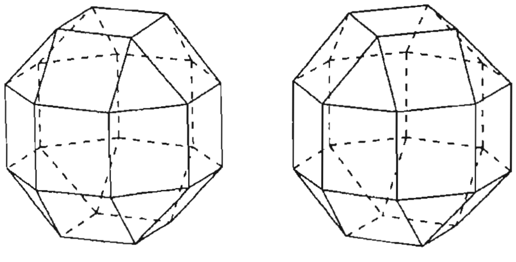

fig. 7 De rhombi-kubo-octaëder en zijn 'broertje'

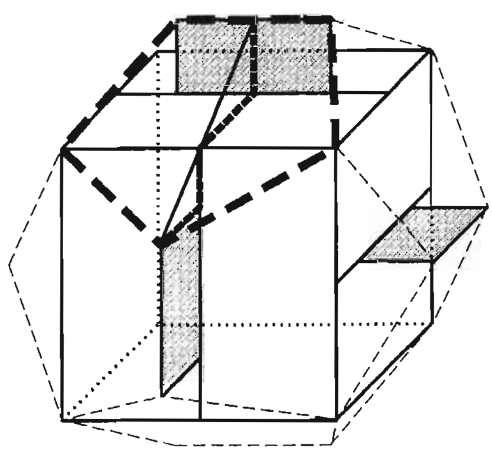

fig. 8 Constructie van de dodecaëder volgens Euclides

rifiëren.) Hier is de diagonaal van de vijfhoek de ribbe van de kubus. Laten we dus vertrekken van een kubus met zijde φ om een vijfhoek met zijde 1 te verkrijgen. Dan ligt de lengte van de rechthoekige kammen vast, namelijk 1. We moeten dus enkel nog de *breedte* u van de kammen bepalen. Opdat de vijfhoek *vlak* zou zijn, moeten de twee 'treden' van het trapje in figuur 8 dezelfde helling hebben. Dit levert ons de volgende vergelijking:

$$\frac{u}{\frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{\varphi - 1}{2}}{u}$$

met als oplossing: $u = \frac{1}{2}$. De kammen zijn bijgevolg 'dubbele vierkanten'.

Laten we nu nagaan of deze vlakke vijfhoek werkelijk regelmatig is. Voor de *gelijkzijdigheid* volstaat het dat *een* zijde die een eindpunt van een kam verbindt met een hoekpunt van de kubus, lengte 1 heeft. En dit is het geval, want:

$$\left(\frac{\varphi - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

De *gelijkhoekigheid* van de vijfhoek kan als volgt beargumenteerd worden: van alle gelijkzijdige vijfhoeken met zijde 1 en met een diagonaal van lengte φ is de regelmatige vijfhoek de enige die symmetrisch is ten opzichte van de middelloodlijn van deze diagonaal (figuur 9).

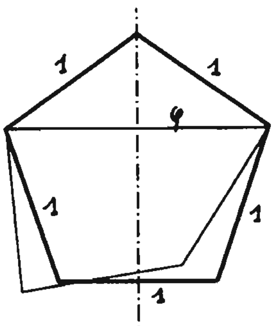

fig. 9 Symmetrieargument voor de gelijkhoekigheid

Merk op: als je de 'basissen' van de kammen verbindt, krijg je een icosaëder (figuur 10). Volgens de commentaar in de uitgave Euclid (1956) van de *Elementen* is deze constructie toe te schrijven aan een zekere H.M. Taylor. De constructie van Euclides is lichtjes verschillend.

Zijn we tot nu toe al ergens een gelijkzijdige driehoek en een regelmatige vijfhoek tegengekomen die ingeschreven zijn in een zelfde cirkel, zoals op de lei? Helaas niet. We vervolgen derhalve onze zoektocht.

Pappos, een Griekse wiskundige uit Alexandrië (in het huidige Egypte), construeerde rond 300 n. C. een dodecaëder en een icosaëder vertrekkend van een boloppervlak (figuur 11). De hoekpunten van de veelvlakken worden op vier horizontale 'verdiepingen' geplaatst. Pappos

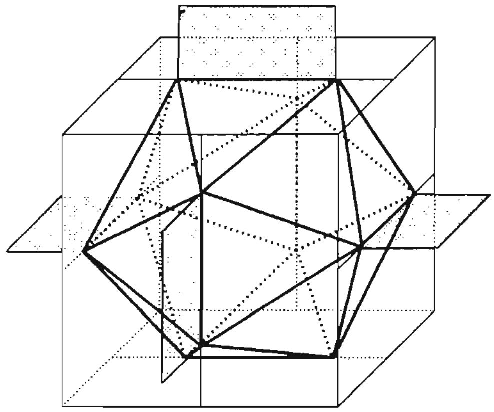

fig. 10 Constructie van de icosaëder volgens Taylor

toont aan dat het mogelijk is om de hoogtes van deze verdiepingen zo te bepalen, dat deze veelvlakken regelmatig zijn. Laten we deze hoogtes bepalen, gemeten vanaf het evenaarsvlak en met de straal van de bol als eenheid van lengte. We beperken ons tot de hoogte van de bovenste verdieping.

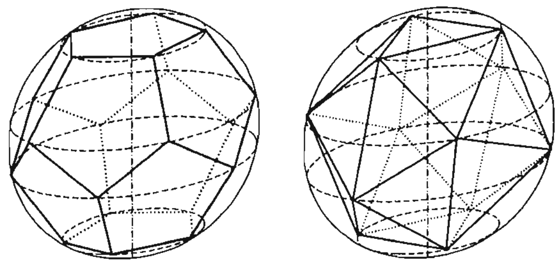

fig. 11 Constructie van de dodecaëder en de icosaëder volgens Pappos

Eerst de dodecaëder. We veronderstellen dat hij regelmatig is en berekenen de hoogte van de bovenste verdieping. Om h te kennen, volstaat het de straal r te kennen van de cirkel omgeschreven aan het bovenvlak van de dodecaëder (figuur 12):

$$h = \sqrt{1 - r^2}.$$

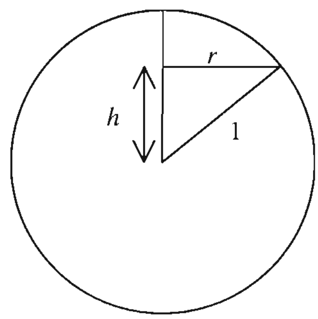

fig. 12

We herinneren de lezer eraan dat de zijde z van een regelmatige vijfhoek en de straal r van zijn omgeschreven cirkel zich aldus tot elkaar verhouden:

$$z = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,.$$

Dit geeft:

$$h = \sqrt{1 - \frac{2z^2}{5-\sqrt{5}}}\,. \qquad (*)$$

Het volstaat dus de lengte z te bepalen van de ribbe van de dodecaëder ingeschreven in een bol met straal 1.

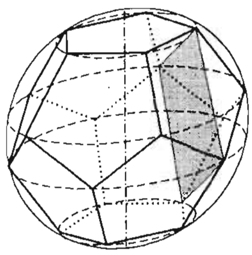

fig. 13a

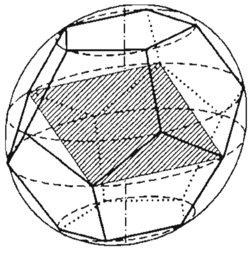

fig. 13b

De vierhoek van figuur 13a is een vierkant. Immers, vermits twee zijden evenwijdig zijn, is de vierhoek vlak. Een vlakke vierhoek waarvan de hoekpunten op een boloppervlak gelegen zijn, is een koordenvierhoek. En vermits bovendien de vier zijden even lang zijn, hebben we te maken met een vierkant. De zijde van dat vierkant meet φz, waarbij z staat voor de ribbe van de dodecaëder. De vierhoek van figuur 13b is een rechthoek, want de diagonalen zijn even lang en snijden elkaar middendoor. De breedte is φz en de lengte $\sqrt{2}\,\varphi z$, want dat is de diagonaal van het vierkant van figuur 13a. De diagonaal van deze rechthoek is 2. De stelling van Pythagoras levert ons dus de waarde van z op:

$$(\varphi z)^2 + (\sqrt{2}\;\varphi z)^2 = 2^2$$

$$z = \frac{2}{\varphi\sqrt{3}}\,.$$

We vervangen dit in (*):

$$h = \sqrt{1 - \frac{\frac{8}{3\varphi^2}}{5-\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \qquad (**)$$

$$\approx 0{,}7947.$$

Dit is dus de hoogte van de bovenste verdieping voor de dodecaëder. In plaats van nu de hoogte van de verdieping daaronder te berekenen, schakelen we over naar de icosaëder. We berekenen de hoogte h' van de bovenste verdieping, nog steeds vanaf het evenaarsvlak en met de straal van de bol als eenheid van lengte.

Net zoals bij de dodecaëder, hebben we:

$$h' = \sqrt{1 - r'^2}$$

waarbij r' de straal is van de omgeschreven cirkel van het bovenvlak. De verhouding tussen de zijde van een gelijkzijdige driehoek en de straal van de omgeschreven cirkel wordt gegeven door:

$$z' = \sqrt{3}\,r'$$

zodat:

$$h' = \sqrt{1 - \frac{z'^2}{3}}\,. \qquad (***)$$

Laten we dus op zoek gaan naar de lengte z' van de ribbe van een icosaëder ingeschreven in een bol met straal 1.

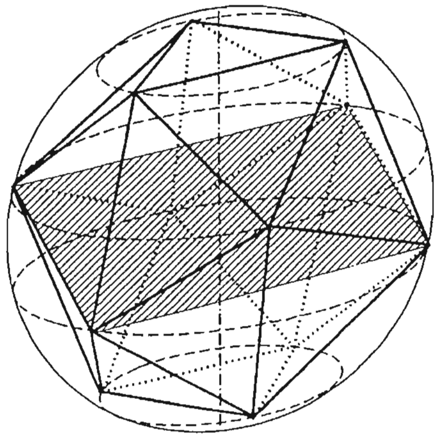

fig. 14

De vierhoek van figuur 14 is een rechthoek, want de diagonalen zijn even lang en snijden elkaar middendoor. Het is zelfs een 'gulden rechthoek': de breedte is z' en de lengte is de diagonaal van een regelmatige vijfhoek met zijde z', dus $\varphi z'$. De stelling van Pythagoras geeft ons de waarde van z':

$$z' + (\varphi z')^2 = 2^2$$

$$z' = \frac{2}{\sqrt{\varphi + 2}}\,.$$

We vervangen in (***):

$$h' = \sqrt{1 - \frac{3}{3(\varphi+2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\,.$$

Dit is exact dezelfde waarde als (**)! De hoogte van de bovenste verdieping is dus dezelfde als bij de dodecaëder. Hier volgt uit dat *een dodecaëder en een icosaëder, ingeschreven in even grote bollen, ook even grote ingeschreven bollen hebben.* Er is nog een tweede conclusie te trekken uit de gelijkheid van die hoogtes: *de zijvlakken van een dodecaëder en een icosaëder, ingeschreven in even grote bollen, hebben even grote omgeschreven cirkels.* Dit is de figuur van de lei!

Heeft Pacioli deze eigenschap uitgelegd aan Dürer ruim een half millennium geleden in Venetië? Men kan opwerpen dat het werk *Collecties* van Pappos in die periode in Italië niet volledig beschikbaar was. Maar hetzelfde resultaat vinden we terug in het veertiende boek van de *Elementen* van Euclides. De *Elementen* bevatten dertien boeken, maar na de dood van Euclides werden een veertiende en een vijftiende boek als bijlagen toegevoegd. De auteur van het veertiende boek is een zekere Hypsicles. De eigenschap die we zopas ontdekten via de constructie van Pappos is de tweede propositie van dat veertiende boek. Het bewijs van Hypsicles steunt rechtstreeks op ... de stelling die Pacioli met de linkerhand aanduidt in het open boek! Hypsicles leidt er een beetje verder uit af dat *de verhouding tussen de oppervlaktes van de dodecaëder en de icosaëder gelijk is aan de verhouding van hun volumes.* (Dit volgt onmiddellijk uit ons resultaat $h = h'$.) En in het bewijs van dit gevolg prijkt precies... de figuur van de lei!

Als deze hypothese klopt, wat ik graag geloof, dan heeft de schilder niets per toeval op het doek aangebracht. De les van Pacioli betreft de apotheose van de Griekse meetkunde, tijdens de Middeleeuwen bewaard dankzij de Arabieren en in de Renaissance weer verspreid in Italië. Hij geeft deze eeuwenoude kennis door aan Dürer die ze op zijn beurt boven de Alpen zal verspreiden. Een historisch moment, waarvan wij getuigen zijn als we naar dat schilderij kijken!

Dit artikel is de neerslag van een workshop op de Nationale Wiskundedagen 1998. Deze workshop werd herhaald op de Derde Europese Zomeruniversiteit 'Geschiedenis en Epistemologie in het Wiskundeonderwijs' (Louvain-la-Neuve en Leuven, 15 tot 21 juli 1999). Deze tekst verschijnt ook, in het Frans, in de Proceedings van deze Zomeruniversiteit.
Hierbij wil ik Nick MacKinnon bedanken voor de toestemming om zijn interpretatie van het schilderij als basis voor mijn workshop te gebruiken.

Michel Roelens, Katholieke Hogeschool Limburg Departement Lerarenopleiding (Hasselt) en Maria Boodschaplyceum (Brussel), Michel.Roelens@ler.khlim.be.

Literatuur

Boonen, N. (1999). *Platonische en Archimedische lichamen.* (onuitgegeven scriptie). Hasselt: KHLim Lerarenopleiding.

Cromwell, P.R. (1997). *Polyhedra.* Cambridge, New York, Melbourne: Cambridge University Press.

Euclid (1954). *The thirteen books of the Elements, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Volume III.* New York: Dover Publications.

Field, J.V. (1997). *The invention of infinity. Mathematics and Art in the Renaissance.* Oxford, New York, Tokyo: Oxford University Press.

MacKinnon, N. (1993). 'The portrait of Fra Luca Pacioli', *The Mathematical Gazette* 77(479), 129-219.

Nationale Wiskunde Dagen 2001

Op 2 en 3 februari worden voor de zevende keer de Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout. Kosten: *f* 595,- all in.

Deelname aan de NWD kan door de school betaald worden uit nascholings- en professionaliseringsgelden.

De thema's voor deze NWD zijn:
- wiskunde om de wiskunde: getaltheorie
- wiskunde en geschiedenis
- wiskunde en kunst
- wiskunde en biologie
- wiskunde en electronisch rekenen
- wiskunde onder handbereik

Begin september is de programmafolder met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd.
Bovendien ontvangen de deelnemers van de afgelopen NWD een folder op naam op hun huisadres.

Inlichtingen: Ank van der Heiden, Freudenthal Instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.
e-mail: nwd@fi.uu.nl, tel: 030 2611611, fax: 030 2660430. Webadres: www.fi.uu.nl/nwd