

In een vorig artikel gaf Monica Wijers een overzicht van problemen die zich voordoen bij de algebra. In dit artikel inventariseren **Monica Wijers** en **Sieb Kemme** welk beroep wordt gedaan op de algebraïsche kennis en vaardigheden van leerlingen als ze aankomen in de vierde klas vwo.

Welke algebra heb je nodig in 4 vwo?

Inleiding

Als we het hebben over problemen die leerlingen met algebra hebben, lijken we ons vaak te beperken tot problemen met de vaardigheden op het gebied van letterrekenen. (We vatten algebra breed op en beschouwen het als onderdeel van het leerstofgebied 'analyse'.) Het is de vraag of dit wel zo terecht is.

In dit artikel proberen we na te gaan welke algemene en specifieke algebraïsche kennis en vaardigheden leerlingen nodig hebben in het begin van klas 4 vwo, en welke problemen daarbij kunnen ontstaan.

We hebben hiertoe van een aantal grote wiskundemethoden de delen die aan het begin van de vierde klas worden gebruikt, bekeken. Daarnaast hebben we een kleine enquête afgenomen om na te gaan hoe docenten de noodzaak en beheersing van algebraïsche vaardigheden ervaren.

De enquête

Bij het bekijken van de analysehoofdstukken van de boeken voor de vierde klas, constateerden we dat er een aantal algebraïsche vaardigheden is waarop regelmatig een beroep wordt gedaan. Via de wiskundeEbrief hebben we een enquête voorgelegd aan wiskundeleraars met de volgende vraag:

Essentiële algebraïsche vaardigheden

Wilt u een antwoord geven op de volgende vraag:

Welke van de volgende algebraïsche vaardigheden acht u aan het begin van klas 4 noodzakelijk om de wiskunde in havo en vwo met succes af te kunnen ronden (eventueel uitgesplitst naar profielen en rekening houdend met de aanwezigheid van de grafische rekenmachine) en wilt u bij de vaardigheden die volgens u noodzakelijk zijn, aangeven in hoeverre deze ook inderdaad aanwezig zijn:

- v in voldoende mate aanwezig*
- g gebrekkig aanwezig*
- o volledig ontbrekend*

Daarna volgde een (niet uitputtende) lijst, waarbij de mogelijkheid werd geboden om vaardigheden toe te voegen. Dertien docenten reageerden en gaven de volgende reactie:

vaardigheden	onv	gebr	vold
kunnen lezen en interpreteren van formules	0	6	7
herleiden van formules tot een andere vorm	9	4	0
vereenvoudigen van formules	1	12	0
tekenen van een grafiek bij een formule	0	5	8
een geschikte tabel maken bij een formule	0	6	6
oplossen van een vergelijking	0	13	0
specifieke vaardigheden in het letterrekenen	3	8	1
een variabele vervangen door een formule	11	1	0
een variabele vervangen door een getal	0	1	11
de waarde van een formule uitrekenen	0	1	11

Als overige vaardigheden die nodig zijn (met name voor differentiëren en integreren) werden genoemd:

- rekenen met wortels en machten (zonder rekenmachine!)
- gonio: rekenen met hoeken
- breuken met variabelen.

Analyse

Natuurlijk vormen de respondenten van de enquête in geen enkel opzicht een representatieve steekproef van de

populatie van Nederlandse wiskundedocenten. Alleen al het gebruik van het medium internet zorgt voor een zeer selecte keuze uit deze populatie. Verder verhinderde de dubbele vraagstelling een duidelijke respons op de vraag wat de docent nodig acht aan algebraïsche vaardigheden. De verdeling van de scores over de verschillende alternatieven geeft echter toch een indicatie waar de accenten liggen bij problemen met de genoemde algebraïsche vaardigheden.

Onderwerpen die op dit ogenblik in het leerplan voor de basisvorming aanwezig zijn, krijgen een duidelijke score aan de rechterkant (gebrekig of voldoende). Ronduit slecht scoren:

- herleiden van formules tot een andere vorm
- een variabele vervangen door een formule.

Unaniem worden als gebrekkig beoordeeld:

- het oplossen van een vergelijking
- vereenvoudigen van formules.

Deze onderwerpen komen wel in de stof tot en met klas 3 aan de orde, maar krijgen wellicht niet genoeg aandacht.

In de lijst met vaardigheden in de enquête zijn zowel specifieke instrumentele vaardigheden (bijvoorbeeld een variabele vervangen door een getal) als ook meer algemene vaardigheden (bijvoorbeeld lezen en interpreteren van formules) opgenomen. Eén docent merkte op dat met de komst van de grafische rekenmachine de instrumentele vaardigheden steeds minder interessant worden, maar de mathematiserende en conceptuele vaardigheden steeds belangrijker.

Is de nadruk die, zoals we eerder meldden, vaak op de specifieke vaardigheden gelegd wordt dan wel terecht? Zijn dit inderdaad de vaardigheden die het meest noodzakelijk zijn? En zijn dit inderdaad de vaardigheden waarmee leerlingen de meeste problemen hebben? Uit de enquête krijgen we hiervan geen duidelijk beeld.

Algemene en specifieke algebraïsche vaardigheden

Om meer zicht te krijgen op de specifieke en algemene vaardigheden (onder andere op hoe ze voorkomen en hoe ze samenhangen) hebben we de schoolboeken hierop nog eens nader bekeken.

In de eerste plaats zijn er opgaven waarin *specifieke* (instrumentele) *algebraïsche vaardigheden* expliciet voorkomen en geoefend worden. De tekst van deze opgaven is meestal beperkt tot: 'los op', 'bereken de snijpunten van', 'ontbind in factoren', 'herleid', enzovoort. Deze korte teksten benoemen de vaardigheden vaak expliciet en als ze niet letterlijk genoemd worden, is bij het bekijken van deze opgaven onmiddellijk duidelijk om welke specifieke vaardigheden het in de opgave gaat.

Dit soort opgaven – waarin uitsluitend een beroep wordt

14 Bereken de oplossingen van de volgende vergelijkingen.

a $x^2 + 6x - 8 = 0$	d $3x^2 + 6x - 1 = 0$
b $2x^2 - 4x = 3$	e $10 - x^2 = x$
c $x^2 - 12x - 28 = 0$	f $x^2 + 2x + 1 = 0$

g Controleer de oplossing van opdracht e door de grafieken van $f(x) = 10 - x^2$ en $g(x) = x$ te plotten.

Uit: *Moderne Wiskunde, vwo bovenbouw, A1, B1 deel 1, H. A2, p.46, opgave 14*

gedaan op specifieke instrumentele vaardigheden – lijkt in de bekeken vierde klas-boeken in de minderheid te zijn. Zeker als we het vergelijken met de boeken voor de derde klas. Dat kan erop duiden dat het merendeel van deze vaardigheden bekend wordt verondersteld.

Daarnaast zijn er opgaven – met meer tekst – waarin niet zonder meer duidelijk is welke kennis en vaardigheden nodig zijn voor het tot een goed eind brengen ervan.

5 In mei 1927 vloog Lindbergh als eerste met een vliegtuig over de oceaan van Amerika naar Europa. Bij de voorbereidingen op de vlucht vroeg hij zich af bij welke snelheid het brandstofverbruik zo gunstig mogelijk zou zijn. Onderzoek leverde hem de volgende formule op:

$$M = -0.001306v^2 + 0,254v - 10,02.$$

Hierin is v de vliegsnelheid in mijlen per uur en M het aantal mijlen dat hij met één liter brandstof kan afleggen.

- a Welke snelheid geeft het gunstigste brandstofverbruik?
- b Geef een schatting van het totale brandstofverbruik op deze tocht van 3610 mijl.

Uit: *Getal & Ruimte, vwo 1, p.100, opgave 5*

Dit type opgaven overheerst in de meeste bekeken vierde klas-methoden. Er is bij deze tweede soort opgaven duidelijk meer nodig dan alleen specifieke instrumentele algebraïsche vaardigheden. Meestal is er een interpretatie nodig, soms een vertaling vanuit een context naar de wiskunde of terug, er is algemene algebraïsche kennis nodig, bijvoorbeeld over de samenhang tussen grafiek/tabel en formule, enzovoorts...

Dit soort vaardigheden zullen we aanduiden met de term *algemene algebraïsche vaardigheden*.

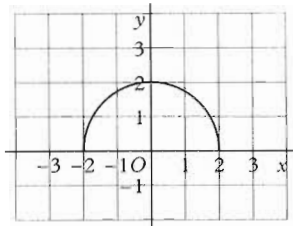
Het is niet eenvoudig exact te definiëren wat we onder algemene en wat we onder specifieke algebraïsche vaardigheden verstaan. Vaak hangt dit af van de manier en het moment waarop een vaardigheid voorkomt of wordt ingezet. We verduidelijken het onderscheid aan de hand van een uitgewerkt voorbeeld.

Een voorbeeldopgave

13 Een halve cirkel wordt beschreven met de formule $y = \sqrt{4 - x^2}$.

a Waarom is de grafiek niet getekend voor x -waarden groter dan 2 of kleiner dan -2 ?

b Teken een getallenlijn en geef daarop in kleur aan welke getallen je kunt kiezen in de formule $y_2 = \sqrt{9 - x^2}$



Uit: *Netwerk vwo bovenbouw, A1, B1 deel 1, p.21, opgave 13*

Een correcte uitwerking van de opgave is bijvoorbeeld: *Omdat voor die waarden $4 - x^2$ negatief is en je geen wortel uit een negatief getal kunt nemen.*

Wat moet een leerling in huis hebben om de opgave tot een dergelijk einde te brengen?

We laten hier de leerling buiten beschouwing die als (begrijpelijk) antwoord geeft 'de halve cirkel is er al. Waarom zou je meer tekenen?' Deze leerling kan met een toespitsing van de vraag eenvoudig op het spoor van de algebra worden gezet.

Bij het algebraïsch uitwerken van de opgave gaat het dan allereerst om de herkenning en interpretatie van de structuur van de formule. In dit geval om de wortelvorm over de vorm $4 - x^2$ heen. Dan is kennis nodig van het feit dat je geen wortel uit een negatief getal kunt trekken. Tenslotte moet ingezien worden dat dit een afdoende argument is voor het beantwoorden van de gestelde vraag. Deze 'aanpak' doet vrijwel uitsluitend een beroep op algemene algebraïsche vaardigheden: het herkennen van de wortelvorm, weten dat een wortel uit een negatief getal niet bestaat en het kunnen beargumenteren waarom iets onmogelijk is.

Deze algemene vaardigheden zijn niet direct zichtbaar in de uitwerking zoals die hiervoor staat.

Een alternatieve uitwerking van de opgave kan zijn: *'Ik vul in $x = 3$. Dan is $4 - x^2 = 4 - 9 = -5$. Dat is een negatief getal en de wortel uit een negatief getal bestaat niet. Ik vul in $x = -3$. Ook dan is $4 - x^2 = 4 - 9 = -5$. Voor deze x gaat het ook mis. Hetzelfde geldt voor alle andere waarden van x die groter zijn dan 2 of kleiner dan -2 .'*

Deze redenering is gebaseerd op het geven van een ge-

schikt voorbeeld, in dit geval $x = 3$ en later ook $x = -3$. Het uitwerken van het voorbeeld voor $x = 3$ en -3 doet een beroep op de specifieke vaardigheden van het invullen van een getal in een formule en het uitrekenen van de bijbehorende waarde van die formule. Vervolgens wordt dit gecombineerd met kennis van het feit dat wortels uit negatieve getallen niet bestaan.

In deze tweede uitwerking wordt dus een beroep gedaan op specifieke algebraïsche vaardigheden (het invullen in en uitrekenen van een formule) in combinatie met algemene vaardigheden (kunnen lezen van een wortelvorm, een geschikt voorbeeld kiezen, algemene kennis over wortels in stelling brengen).

In deze tweede uitwerking zijn de vaardigheden die ingezet worden makkelijker te identificeren.

We zouden bij deze opgave ook het kiezen van de strategie (invullen of generalisatie) een algemene wiskundige vaardigheid kunnen noemen, die in dit geval betrekking heeft op een algebraïsch voorbeeld.

De opgave uit het voorbeeld is verwant aan opgaven waarin expliciet gevraagd wordt het domein van een (wortel)functie te bepalen. Dat type opgaven komt veel vaker voor in de methoden en doet een groter beroep op specifieke vaardigheden.

Hierbij immers moet steeds een ongelijkheid worden opgelost. De algemene vaardigheden die hierboven genoemd zijn (interpreteren van de structuur van de formule, herkennen van de wortelvorm, enzovoorts), blijven echter ook dan een belangrijke rol spelen.

Het is duidelijk dat alleen beheersing van specifieke instrumentele vaardigheden bij deze opdrachten niet vol doet. Er zijn algemene kennis en algemene algebraïsche vaardigheden nodig die de leerling toegang tot en controle over het oplossingsproces geven. Zonder beheersing hiervan komt een leerling vaak niet ver met zo'n opgave. De specifieke vaardigheden worden tijdens het oplossingsproces ingezet om specifieke deelproblemen op te lossen.

Vaardigheden in samenhang

Een belangrijke vraag is hoe deze beide soorten vaardigheden kunnen worden 'aangeleerd' of misschien liever gezegd 'ontwikkeld'.

In schoolboeken, zeker die van vóór de basisvorming en het studiehuis, en ook in de boeken van klas 3 HAVO/VVO, zien we vaak dat de specifieke instrumentele vaardigheden los en kaal worden aangeleerd en geoefend. Hoewel dit kan bevorderen dat leerlingen deze vaardigheden daadwerkelijk gaan beheersen, is het de vraag of ze ze dan ook kunnen inzetten in de opgaven waarin ze meer ingebed gebruikt moeten worden.

Weet een leerling, met een voldoende instrumentele beheersing, op welk moment zo'n vaardigheid nodig is?

Als in het uitgewerkte voorbeeld een leerling de structuur

van de formule niet kan ontrafelen of niet weet dat je geen wortel kunt trekken uit een negatief getal, heeft de leerling weinig aan het feit dat hij/zij perfect ongelijkheden kan oplossen. Met andere woorden: het lijkt erop dat voldoende beheersing van algemene algebraïsche vaardigheden noodzakelijk is, opdat de specifieke vaardigheden een kans krijgen om gebruikt te worden.

Maar omgekeerd geldt ook dat naast een beheersing van algemene algebraïsche vaardigheden voldoende beheersing van specifieke algebraïsche vaardigheden noodzakelijk is. Een leerling die geen ongelijkheden kan oplossen, zal in geval het domein van een wortelfunctie moet worden bepaald bijvoorbeeld vastlopen op het punt waarop de bijbehorende ongelijkheid daadwerkelijk moet worden opgelost.

Of algemene algebraïsche vaardigheden ook expliciet geoefend worden, is uit de bestudeerde methodes niet echt op te maken. De indruk bestaat dat deze vaardigheden veelal impliciet blijven. Ze worden niet benoemd en zeker niet expliciet 'los' geoefend. Wel concluderen we voorzichtig dat door de volgorde en opbouw in de opgaven geprobeerd is aan het ontwikkelen van deze vaardigheden te werken. Zo wordt soms gewerkt met een in kleine stappen opgedeelde opgave – soms in de vorm van een uitgewerkt voorbeeld – gevolgd door een vergelijkbare opgave waarin de stappen groter zijn. Voor leerlingen zal echter niet vanzelf duidelijk zijn aan welke vaardigheden dan gewerkt wordt. Deze worden echter zelden expliciet benoemd.

We zien daarnaast ook dat in twee van de bekeken methodes zo genoemde reflectievragen voorkomen, zoals:

- 'Omschrijf welke manieren er zijn om....'
- 'Bedenk situaties waarbij....'
- 'Waarom is het vaak niet zinvol om....'

Deze vragen reflecteren op aanpak of inhoud en bieden daarmee mogelijkheden om algemene vaardigheden te expliciteren. Dit gebeurt echter sporadisch.

Tot slot

De kleine enquête bevestigt de globale indruk dat er problemen zijn met betrekking tot de beheersing van bepaalde specifieke algebraïsche vaardigheden bij de overgang naar leerjaar 4 vwo. Als we ons echter uitsluitend zouden richten op die specifieke algebraïsche vaardigheden, bestaat het risico dat leerlingen met een eenzijdige beheersing ervan niet kunnen beginnen aan complexere opgaven, die veelvuldig voorkomen in de vierde klas-boeken en waarin een groot beroep op algemene algebraïsche vaardigheden wordt gedaan.

Anderzijds is het zo, dat bij eenzijdige beheersing van algemene algebraïsche vaardigheden, een leerling een complexere opgave vaak niet tot een goed einde kan brengen.

In ons onderzoek van methoden en in de enquête hebben we ons niet bekommerd om het niveau waarop de vaardigheden beheerst moeten worden. Het maakt nogal wat verschil of je een trucje kunt herhalen dat je net de vorige les hebt geleerd, of dat je geacht wordt zelfstandig een algebraïsche aanpak te kunnen kiezen bij het oplossen van een probleem in de praktijk.

We concluderen wel dat een evenwichtige beheersing tussen beide soorten vaardigheden noodzakelijk is, voor het kunnen aanpakken en oplossen van complexere algebraïsche problemen. Dat betekent dat beide vaardigheden in samenhang expliciete aandacht moeten krijgen in het leerproces, dat wil zeggen: ze moeten beide worden benoemd en in de totale context moeten ze niet geïsoleerd van elkaar geoefend worden.

In een volgend artikel over een didactiek voor algebraïsche vaardigheden zullen we aan bovengenoemde aspecten meer aandacht schenken.

*Monica Wijers, Freudenthal Instituut, Utrecht
Sieb Kemme, Lettelbert*