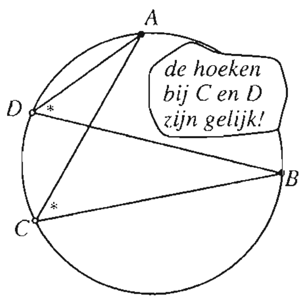
Een belangrijk onderwerp bij wiskunde B2 voor het VWO is 'bewijzen in de vlakke meetkunde'. **Aad Goddijn** observeert hoe dat gaat in de praktijk van het Gregorius College in Utrecht, een van de experimentele profi-scholen.

Gegeven: cirkel met vlinder

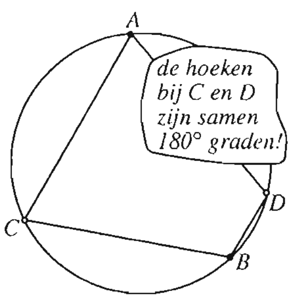
Of: hoe leer je bewijzen?

Wat ging vooraf?

De voortgezette meetkunde van wiskunde B2-VWO bevat het onderwerp 'Bewijzen in de vlakke meetkunde'. Dit artikel wil een indruk geven van hoe dat in de klas kan gaan. De klas in dit artikel is een kleine 6 VWO-B groep van het Gregorius College in Utrecht; de school hoort bij de kring van elf scholen die met het experimentele materiaal van het profi-team heeft gewerkt. Daarin wordt de voortgezette meetkunde begonnen met het boekje *Afstanden, grenzen en gebieden* (zie literatuurlijst). Hierin wordt vanuit allerlei toepassingen van het afstandsbegrip – waaronder Voronoi-diagrammen, iso-afstandslijnen en optimaliseringsproblemen – geleidelijk toegewerkt naar het meer expliciet maken van bewijzen. In het volgende deel, *Denken in cirkels en lijnen*, wordt expliciet ingegaan op wat een bewijs is, wat je erin kunt gebruiken en hoe je een bewijs kunt opschrijven. Nieuwe meetkundige stof in dit deel sluit nauw aan bij het voorgaande boekje; belangrijk is hier de stelling van de constantie van de omtrekshoek op een vaste boog en de stelling van de koordenvierhoek. Omdat deze een belangrijke rol spelen in de voorbeelden die straks volgen, hier een illustratie van beide.



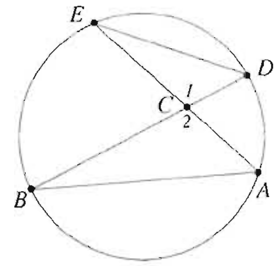
omtrekshoeken op boog AB



koordenvierhoek ABCD

De constante hoekstelling zegt: als A, B, C en D op een cirkel liggen en C en D aan dezelfde kant van lijn AB liggen, zijn $\angle ACB$ en $\angle ADB$ aan elkaar gelijk.
De tweelingzus van deze stelling is de stelling van de koordenvierhoek. Deze zegt: als A, B, C en D op een cirkel liggen en C en D liggen aan verschillende zijden van AB, dan zijn de hoeken bij C en D samen 180°.

Met zulke bouwstenen kan veel gedaan worden in allerlei bewijzen. Hier volgt een voorbeeld hoe dat er in dit stadium van het leren bewijzen uit kan zien bij leerlingen. Karin, een van de leerlingen uit deze klas, toont als volgt aan dat er iets bijzonders is met de vleugels van de vlinder in de figuur hiernaast.



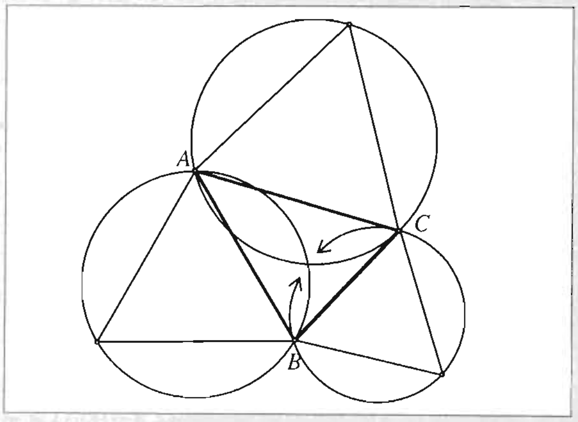
gegeven: cirkel met vlinder
te bewijzen: 2 driehoeken zijn congruent
bewijs: ∠E = ∠B (hoeken op dezelfde boog
∠A = ∠D (hoeken op dezelfde boog.
∠C₁ = ∠C₂ (overstaande hoeken)
∆ABC ∽ ∠CDE (HHH)

In het bewijs wordt twee keer verwezen naar 'hoeken op dezelfde boog', dus naar genoemde constante hoekstelling. Het idee achter het bewijs is goed, maar de uitwerking nog niet perfect: dit heet gelijkvormigheid in plaats van congruentie en twee hoeken is wel genoeg.
In de loop van het leerproces worden uitwerkingen en gebruik van terminologie steeds nauwkeuriger en beter genoteerd. Daar moet aan gewerkt worden in de klas, maar hier zit het probleem van het leren bewijzen niet echt. Het echte probleem voor Karin en haar klasgenoten Sigrid, Janneke, Bas, Mark, Monica, Marleen en Petra is: hoe vind je een bewijs in een nog onbekende situatie? En voor hun docent Marcel Voorhoeve: hoe help ik ze zelf bewijzen te vinden? In de tweede helft van *Denken in cirkels en lijnen* gaat het speciaal om dat zoeken – en leren zoeken – naar bewijzen.
Ik zit er als mede-auteur van het gebruikte materiaal in de klas bij en wil graag zien hoe dat gaat.

Vorm als gereedschap

Een mooi bewijs is als een goed sonnet: vorm en inhoud steunen elkaar. In voorbeeldopgave 1 wordt gevraagd om

voorbeeldopgave 1
In onderstaande figuur zijn drie gelijkzijdige driehoeken tegen de zijden van driehoek *ABC* geplakt. De omgeschreven cirkels van de gelijkzijdige driehoeken lijken door één punt te gaan. Dit dient bewezen te worden.
Tip: Kijk terug naar bladzijde p. 30 en p. 31 van deel A.



Dat wil zeggen: vind een *karakterisering* voor punten op de kleine bogen. Noem het *snijpunt van twee van die bogen S*; toon aan dat *S* op de derde boog ligt.
a. Wat is je karakterisering?
b. Welke stellingen gebruik je?
c. Noteer het bewijs in de vorm van bladzijde p. 30 van deel A.

een bewijs in een bepaalde vorm, die al eerder aan bod is geweest. Onderdeel c verwijst naar het bewijs van het door één punt gaan van de middelloodlijnen van een driehoek *ABC*. In het kort loopt dat bewijs als volgt. Laten de middelloodlijnen van *AB* en *BC* elkaar snijden in *M*. Dan geldt $d(A,M) = d(B,M)$ en ook $d(B,M) = d(C,M)$. Koppel de gelijkheden, dan volgt $d(A,M) = d(C,M)$. Dus ligt *M* ook op de middelloodlijn van *AC*. De afstandskarakterisering van de middelloodlijn is gebruikt, eerst tweemaal van middel-en-lood naar gelijke afstand en dan na de koppelstap eenmaal van afstand naar middel-en-lood. De leerlingen kennen dit als de 1-1bis vorm.
Deze vorm is ook als schema opgenomen in *Afstanden, grenzen en gebieden*.

Zij *M* het snijpunt van mll(*A, B*) en mll(*B,C*)

stap 1	**stap 1bis**
M op *mll(A, B)* Dus $d(M, A) = d(M, B)$	*M* op *mll(B, C)* Dus $d(M, B) = d(M, C)$

↓

2: verbindingsstap
Dus $d(M, A) = d(M, C)$

↓

3: conclusiestap
$d(M, A) = d(M, C)$ Dus *M* op *mll(A, C)*

Bij voorbeeldprobleem 1 wordt veel hulp geboden; zelfs wordt duidelijk gemaakt dat je niet moet aannemen dat de door *B* en *C* gaande cirkel door het snijpunt *S* van de andere twee cirkels gaat. Die explicitering werpt overigens zijn vruchten af; later zal een van de leerlingen in een heel ander lastig bewijs noteren *'je mag er niet van uitgaan dat ...'*. Maar nu eerst de uitwerking van Sigrid:

1
S op boog AB
⇓
$\angle ASB = 120°$

1bis
S op boog AC
⇓
$\angle ASC = 120°$

$\angle CSB = 120°$

conclusie
$\angle CSB + \angle CDB = 180°$
$\Rightarrow$ S op cirkel door B,C,D

De verbindingsstap is niet toegelicht, dat is ook nauwelijks nodig en het paste ook niet makkelijk in het schema; de rest is even boven het hier weergegeven fragment wel toegelicht, inclusief de omkering van de koordenvierhoek-stelling, die bij de conclusie gebruikt is.
De krachtige suggestie om het bewijs in de aangegeven vorm op te schrijven was erg sturend. De leerling heeft wel de kans gekregen de juiste ingrediënten naar voren te dragen, maar niet de algehele vorm van het bewijs. In deze fase (een herhaling van wat een jaar eerder gebeurde) is dat zo gek nog niet; bovendien gaat het om een bewijsvorm die de moeite van het inoefenen waard is.

Heuristieken

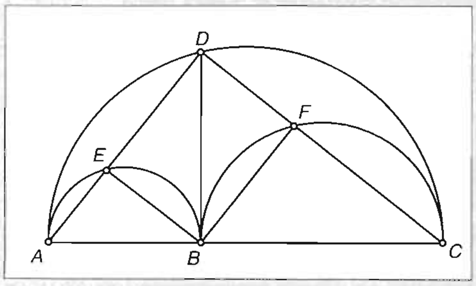
Zo'n bewijsschema mag dan ook best aangeleerd en geoefend worden, maar absoluut uit den boze zijn wat mij betreft regels als *'moet je bewijzen dat drie lijnen of cirkels door één punt gaan, gebruik dan het 1-1bis-schema'*. Dat leidt tot schijnresultaten. Zo worden wetten ter navolging opgelegd waar de leerling keuzes moet leren maken en plannen moet bedenken. Bovendien leiden zulke regels net zo vaak naar doodlopende straten als naar echte oplossingswegen.
Wil men leerlingen helpen bij het zelf vinden (of kiezen) van de vorm van bewijzen, dan moet de steun die geboden wordt, opener van aard zijn. Ze moet het gericht zoeken bevorderen, maar kan hierbij geen gegarandeerd werkend recept leveren. Zulke leidregels bij het zoeken naar oplossingen heten wel heuristieken; Anne van Streun geeft in zijn proefschrift *Heuristisch wiskunde-onderwijs* juist de twee genoemde kenmerken ervan aan. Van Streun biedt een goed overzicht van wiskundigen en didactici die zich met dit onderwerp hebben beziggehouden en vergelijkt enkele benaderingen op dit gebied; het wiskundig-inhoudelijk doelgebied is niet specifieker aangegeven dan 'de leerstof 4 VWO'.

Nog steeds aan te bevelen, juist ook voor de doelgroep waarover we het nu hebben omdat er toch redelijk veel meetkundige voorbeelden in zijn te vinden, is *How to solve it* van George Polya. Bij Polya is heuristisch redeneren bedoeld om een oplossing te *vinden*; maar de heuristische redenering is zeker niet het bewijs zelf. Polya's wat zwaarder opgezette *Mathematical Discovery* bevat een eerste hoofdstuk onder de titel 'The Pattern of Two Loci'. Enkele van de heuristieken die in *Denken in cirkels en lijnen* worden gebruikt, zijn erin terug te vinden.
Ik houd het er in het volgende op dat sommige heuristieken heel algemeen zijn, zoals 'zorg dat je het probleem begrijpt, ontwerp dan een plan' en andere meer onderwerp-specifiek, zoals het voorbeeld van de drie cirkels hierboven. Ik wil ook liever voorbeelden laten zien dan algemene theorieën toelichten. Vanwege de beperkte omvang van de *Nieuwe Wiskrant* komen ook niet alle in *Denken in Cirkels en lijnen* genoemde heuristieken hier aan bod. Mijn commentaar bij het werk van leerlingen en docent zal ik ook niet beperken tot heuristieken alleen. In een levend leerproces gebeurt van alles tegelijk.

Herkenning

Met voorbeeldopgave 2 had bijna niemand moeite, maar de opgave brengt wel een paar bijzondere dingen aan het licht.

voorbeeldopgave 2
In deze figuur zie je drie halve cirkels. De middellijnen van de kleine cirkels vormen samen die van de grote. *BD* is de gemeenschappelijke raaklijn van de kleine halve cirkels.



Je moet bewijzen: *DEBF is een rechthoek.*
Handel als volgt:
d. Zoek naar een hoofdthema. Het zit diverse keren in de figuur!
e. Noteer nu zelf: het bewijs in heldere, maar niet al te gedetailleerde vorm.

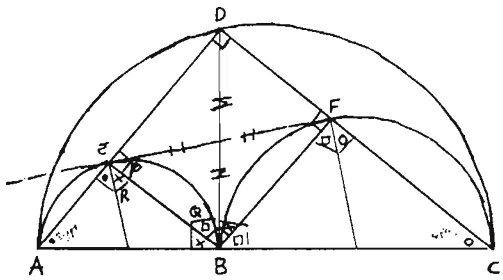
Een van de dingen die beginnende bewijzers in de vlakke meetkunde moeten oefenen, is het herkennen van allerlei bekende configuraties binnen een nieuwe complexe figuur. In de klas ligt hier trouwens ook een mogelijkheid voor de docent om terug te komen op wat bekend is, dan wel zo langzamerhand moet zijn. Marcel, de docent in ons geval, maakte regelmatig dankbaar van die mogelijkheid gebruik. Je kunt eraan twijfelen of de leerling 'heuristieken' expliciet moet kennen, voor de docent is het in ieder geval van belang een stel heuristieken als mogelijke sleutels in het leergesprek paraat te hebben.
Bas en Mark werken samen. Ze hebben het thema herkend: de rechthoekige driehoek in de halve cirkel, de stelling van Thales dus:

2a te bewijzen: DEBF is een rechthoek
△ DEB = △ DFB
∠E = ∠D = ∠F = ∠B = 90°
Bewijs = ① DB = raaklijn aan beide cirkels dus ∠B1,2 = 90 = ∠B3,4
② stelling van Thales:
① ∠D = 90° = ∠E = 90° = ∠F = 90
② 3 ∠ 90° dus 4e ∠ = 90°
③ 4 ∠ 90° dus EBFD = een rechthoek

De hoeken bij *D*, *E* en *F* zijn 90°, en de vierde hoek van vierhoek *DEBF* is dat dan ook. Goed, maar de eerste stap van het bewijs, de loodrechtheid van de $\angle ABD$ en $\angle CBD$ hangt nu onaangenaam nutteloos in de lucht. Mark merkte dat op en constateerde dat *D* ook wel ergens anders op de grote halve cirkel mag liggen, *DEBF* is ook dan een rechthoek. Waarom was dan dat raken van *BD* aan de kleine halve cirkels gegeven?
Dat was scherp gezien! Hier was één gegeven overbodig. Dat is bij dit soort meetkunde normaliter niet het geval, maar dit is een goede gelegenheid om nog eens op een andere heuristiek te wijzen: kijk tijdens het werk of je alle gegevens wel gebruikt hebt!

Leren noteren

De vervolgopgave was: toon aan dat *EF* aan de twee kleine halve cirkels raakt. (Dit was overigens in 1996 onderdeel van de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.) Alle componenten voor een bewijs zitten in de figuur die Monica geeft.



dus hoek $E_P = \angle B_Q$ = □
x + □ = 90°
$\angle E_R + \angle E_P$ = 90°
x □

Ze noteert het eigenlijke bewijs wel heel erg kort; de kruisjes, bolletjes, vierkantjes en ander gespuis in hoeken en op lijnstukken knappen het eigenlijke werk op.

Zulke tekentjes (en vaak ook een complete regenboog aan viltstiften) zijn heel handig in de fase van zoeken naar een bewijs. Maar het blijft kladwerk, er moet ook gewerkt worden naar een nette vorm van opschrijven.
Leerlingen gebruiken aanvankelijk allerlei hoeknotaties als $\angle ABD$, $\angle A_1$ en veelsoortige tekentjes door elkaar, ook in voor publieke consumptie uitgeschreven bewijzen. De eerste twee zijn in combinatie met de tekening aanvaardbaar, maar de derde (de tekentjes) eigenlijk niet, want de aangeduide hoeken liggen niet eenduidig vast, de tekentjes geven alleen gelijkheid in hoekgrootte aan, niet om welke hoeken het gaat.
Er is een goede traditionele manier om de correctheid van het opschrijfwerk te bevorderen: gewoon eens een stuk bewijswerk nauwkeurig laten opschrijven, nakijken en van persoonlijk commentaar voorzien. Kost tijd, maar het loont; leerlingen ontwikkelen vaak eigen specifieke notaties die commentaar behoeven. Hier volgt een stukje commentaar van Marcel Voorhoeve bij een stukje werk

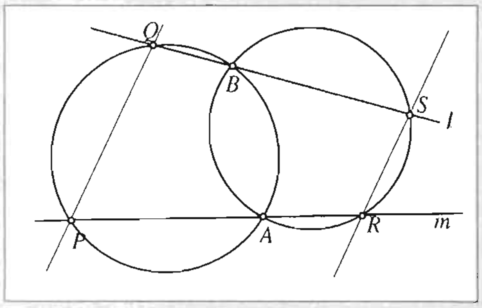
opmerking • de pijl $\Rightarrow$ betekent: uit... volgt....
bijv. $\angle A + \angle B = 90° \Rightarrow \angle A = 90° - \angle B$
• hierboven gebruik je de pijl verkeerd; je bedoelt: "want", je geeft een uitleg/verklaring

van Bas. Natuurlijk wist Bas zelf wel wat hij bedoelde en daar gaat Marcel ook vanuit, maar het zag eruit alsof dwars tegen de richting van de logica werd ingegaan.

Zoek een schakel

Een andere specifiek meetkundige heuristiek werd ingeleid met voorbeeldopgave 3.

voorbeeldopgave 3
Hier zijn twee cirkels gegeven en twee lijnen l en m door de snijpunten A en B van de cirkels.



Te bewijzen: PQ // RS.

Aanpak: ga uit van het idee dat je evenwijdigheid moet bewijzen via het aanwijzen van gelijke hoeken en zoek naar een schakel. Daarbij spelen de cirkel en de punten A en/of B uiteraard een rol.

Vrijwilliger Mark begint zijn verhaal op de overheadprojector voor de klas na het toevoegen van een paar cijfertjes met: *ik ga bewijzen dat* $\angle Q_2 = \angle S_2$. Wat mij betreft kan het nu niet meer stuk: de zeer algemene heuristiek van 'weet waar het over gaat' wordt toegepast. Daardoor zit er meteen een doel en een richting in het verhaal dat komen gaat. Dit is opgepikt uit eerdere klassikale gesprekken; het komt natuurlijk vaak voor dat een leerling voor de klas een volkomen duister pad met veel omwegen probeert toe te lichten. Op een gegeven moment vraagt iemand – leerling of docent – dan wel: waar heb je het nou toch over? Verhelderende momenten zijn dat, want de bewuste leerling blijkt dan vaak wél in een enkele zin te kunnen zeggen waar het om gaat!
De specifieke heuristiek waar onder 'aanpak' in deze opgave op wordt gezinspeeld is echter een heel andere. Er is geen stelling die je hier direct kunt inzetten om de hoekgelijkheid aan te tonen. Dus is een tussenstap nodig die via 'iets' in de gegevens moet lopen, een schakel. Ondanks de behoorlijk sturende tip die wel snel leidt naar trekken van hulplijn AB, duurt het toch wel even voor het bewijs helder uit het klad naar boven kan komen drijven.
Na zes doorgehaalde regels staat dit in Mark's aantekeningen:

① ~~× + □~~ $Q_1 + Q_2 = 180°$ gestrekte hoek
② $\angle A_1 = \times$ $180° - \square$ koordenvierhoek
③ $\angle A_2 = \square$ $180° - \times$ gestrekte hoek
④ $\angle S_1 = \times$ $180° - \square$ koordenvierhoek
⑤ $\angle S_2 = \square$
⑥ $\angle Q_2 = \angle S_2$ Dus QP // SR F-hoeken

Van Q gaan we dus eerst naar tussenstation A, en van daar naar S. In het schrift krijgen de gestrekte hoeken evenveel aandacht als het gebruik van de koordenvierhoeken, maar bij de uitleg schittert de koordenvierhoek volop. Dat je de hoeken bij A als schakel kunt gebruiken, is daarop gebaseerd.
Er zijn hier weer talloze variaties in aanpak door de leerlingen mogelijk. In essentie gebruiken ze allemaal dezelfde elementen, maar dat wordt niet direct gezien. Wie Z-hoeken heeft gebruikt in plaats van F-hoeken denkt een ander bewijs te pakken te hebben. Hier heeft het klassengesprek weer grote waarde. Met behulp van de docent en door het vertellen wordt duidelijk wat de essentiële lijn is en wat de noodzakelijke details zijn. Hier verschillen de bewijzen in het algemeen slechts in details.
De strategie van het schakels zoeken, waarvan later nog een voorbeeld in een heel ander kader, heeft nog een gunstig zijeffect: de drempelverlagende werking. Wie plotseling, na veel sommen maken, vergelijkingen oplossen en haakjes verdrijven, geconfronteerd wordt met de bewijsvraag in dit voorbeeld, wil nog wel eens zuchten: nou dat weet ik niet, geen idee hoe dat moet. 'Zoek een schakel' betekent dan ook: kijk of je niet tóch wat op kunt schrijven, ook al weet je vooraf niet of het tot de oplossing leidt. Na een tijdje heb je – misschien – genoeg stukjes en liggen er twee of drie die aan elkaar passen om je probleem op te lossen. Het aardige van het stuk meetkunde waar we hier mee bezig zijn, is dat voor zulke leerproces-

sen, die heus niet allemaal zo bewust verlopen, zoveel gelegenheid is.
De 'schakel' is zo oud als het bewijzen in de meetkunde zelf. In boek I van *De Elementen* van Euclides staan na de lijst van drieëntwintig definities en vijf postulaten de vijf 'algemene regels', waarvan de eerste is:

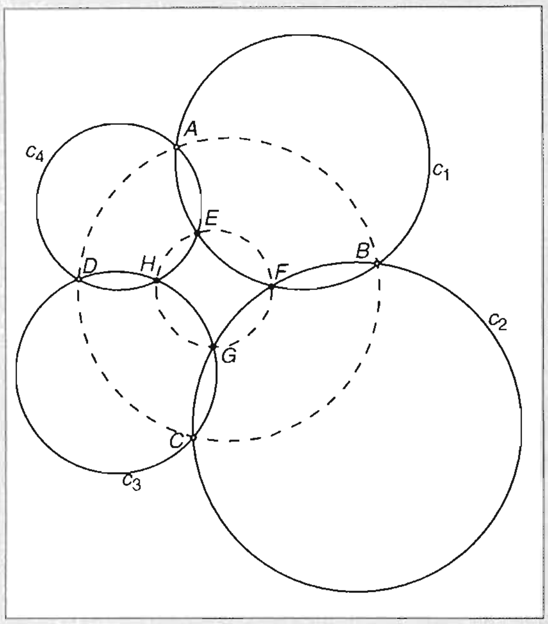
1. Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn ook aan elkaar gelijk.

Nu worden bij Euclides heel wat redeneerstappen gedaan die volgens de huidige wiskundige normen nog wel wat extra argumentatie kunnen gebruiken, maar deze waarheid als een koe wordt op vitale punten in bewijzen expliciet aangeroepen. Algemene regel nummer één op zijn logica bekeken is weliswaar alleen een expliciet toegestane redeneerstap, maar functioneert vooral als een structurerend element in bewijzen.

????????? Jaaaah!!!!!

Bij het oplossen van een bewijsopgave valt de sluitsteen van het opgebouwde gewelf je soms onaangekondigd in handen. Dat is een prettig moment, een vloed van helder wit licht golft door je hoofd, chaos slaat om naar patroon, plotseling zijn alle lijnen, hoeken en cirkels van flonkerend kristal. En het pad naar het bewijs ligt plotseling voor je open.
Komen zulke momenten ook voor in de klas? Jawel, en niet zo zelden ook. In zekere mate heeft Mark even dat gevoel als hij na de zes regels rommelen opnieuw begint en het bewijs er in een strakke boog uit rolt. Zo gaat het natuurlijk vaker. Het moment besluit natuurlijk vaak een periode van gefrustreerd zoeken, maar ik denk dat het 'goede gevoel' ervan bij menig leerling meer is dan alleen de opluchting van 'hè, hè, eindelijk zijn we ervan af'.
Nu volgt zo'n moment dat in de klas goed hoorbaar was. Voorbeeldopgave 4 besluit de schakel-paragraaf. Er vlak voor is gezegd dat je met één schakel vaak niet toekomt. In de klas is Monica er al een tijd mee bezig. In de vier getrokken cirkels zijn koordenvierhoeken getekend en ze staart naar een mierenhoop van genummerde, betekende en kleurige hoekverbanden. Nu moet in vierhoek *EFGH* aangetoond worden dat twee overstaande hoeken samen 180° zijn. Maar hoe in 's hemelsnaam?
Plotseling een kreet: *maar díe liggen ook op een cirkel!*
Die, dat zijn de punten *A*, *B*, *C* en *D*. Op dat moment is het bewijs voor haar rond, ze weet ineens zeker dat je moet beginnen met twee hoeken van koordenvierhoek *ABCD*; de al gevonden hoekverbanden leiden van buiten naar binnen (schakels!) naar een goede hoekensom voor twee tegenover elkaar liggende hoeken in vierhoek *EFGH*. Het moment van doorbraak is hier het moment waarop in één flits gezien wordt dat er een ongebruikt gegeven is, waarna het totaalplan voor het bewijs verschijnt. Een kras door de rommel, we gaan opnieuw opschrijven en de details vullen zich daarna bijna vanzelf in de berekening in. Dat geeft de tweede beloning: *Jaaahh, het klopt!!!*

voorbeeldopgave 4
De cirkels c_1, c_2, c_3, en c_4 snijden elkaar op de aangegeven manier in *A, B, C, D, E, F, G* en *H*.



Te bewijzen: Als *A, B, C* en *D* op één cirkel liggen, dan liggen *E, F, G* en *H* ook op één cirkel.

Drie stadia dus: hard werken met eventueel wat frustratie, doorbreken van het inzicht en het sluitend krijgen van de verificatie.
'Vlijt, visie, verificatie: aspecten van wiskundebeoefening'. Dat was de titel van de inaugurale rede van Prof. F. Oort in 1968, in Amsterdam. Mooi om dat zo helder ook bij VWO-leerlingen te kunnen zien!
In het schrift van Janneke (zie hieronder) is de frustratiefase bovenin goed te zien.
Uit dat gedeelte is gemakkelijk te zien hoe Janneke (in de figuur in het goedkope experimentele boek natuurlijk) de deelhoeken genummerd heeft. Ook hier eerst geen zichtbare bewijslijn en geen gebruik van verbanden tussen de *A*- en *C*-hoeken. Maar onder de streep – het moment van

$\angle D + \angle E_1 = 180°$ $\cancel{\angle A + \angle E_2 = 90}$
$\angle A_1 + \angle H_1 = 180°$ $\quad \angle B_2 + \angle F_1 = 180$
$\angle C_1 + \angle H_2 = 180°$ $\quad \angle C_2 + \angle F_2 = 180$
$\angle H_1 + \angle H_2 + \angle H_3 = 360$ $\quad \angle F_1 + \angle F_2 + \angle F_3 = 360°$
$180 - \angle A_1 + 180 - C_1 + \angle H_3 = 360$ $\quad \angle H_3 + \angle F_3 = 180°$

bewijs: $\angle EHG + \angle EFG = 180°$
$\angle EHG = 360 - (180 - \angle A_1) - (180 - \angle C_1)$
$\angle EFG = 360 - (180 - \angle A_2) - (180 - \angle C_2)$
$360 - (180 - \angle A_1) - (180 - \angle C_1) + 360 - (180 - \angle A_2) - (180 - \angle C_2)$
$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 = 180°$
$360 - (180 - \angle A_1 - \angle A_2 - \angle C_1 - \angle C_2) - 180 + 360 - 180 - 180$
$360 - 0 - 180 + 360 - 180 - 180 = 180$
$\angle EHG + \angle EFG = 180$
dus □

inzicht – loopt het als een trein, de verificatie loopt. De eerste regel is even verwarrend; er moet nog bewezen worden dat $\angle EHG + \angle EFG = 180°$. Het doel van de berekening die volgt, wordt hier als het ware aangekondigd. Zie maar, aan het eind keert die gelijkheid bewezen terug. De vierde regel (de eerste die met 360 begint) bevat het samennemen van de overstaande hoeken $\angle EHG$ en $\angle EFG$. Daaronder staat de sleutelstap pontificaal genoteerd:

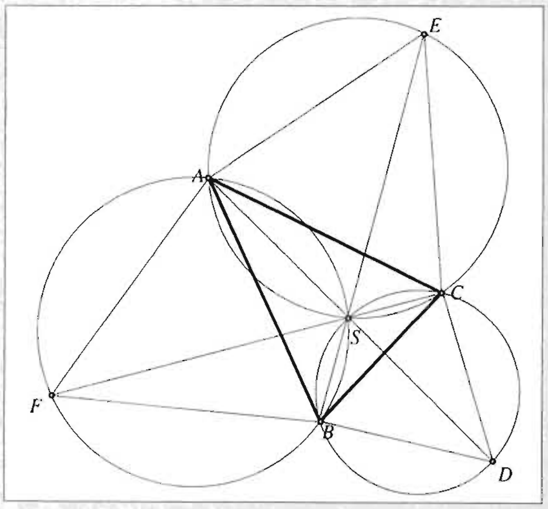
$$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 = 180°.$$

Vervolgens wordt de afleiding voortgezet door deze vier hoeken in de juiste positie te manoeuvreren, waarna het resultaat volgt: '*dus* ' betekent blijkbaar '*dus is EFGH een koordenvierhoek*'. Ja, ja, er moet ook nog achter staan dat E, F, G en H *dus* op een cirkel liggen, maar daar vallen we nu toch even niet echt over. Wel iets dat ooit even geleerd moet worden, dat je echt het finishlint moet aantikken!

Vertalen

In voorbeeldopgave 5 is een intussen bekende figuur te zien.

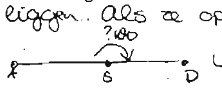
voorbeeldopgave 5
Een bekende figuur. De omgeschreven cirkels van de drie gelijkzijdige driehoeken gaan door één punt. Dat weet je en mag je gebruiken.



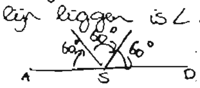
Te bewijzen: A, S en D liggen op één lijn.

Dat de drie cirkels door één punt gaan, mag gebruikt worden, want dat is bewezen. Het is nuttig zoiets in de leerlijn expliciet te laten voorkomen; het laat iets zien van de opbouw van het vak. Leerlingen zijn in hun schoolse goedheid bereid het door één punt gaan van de drie cirkels ter plekke nogmaals te bewijzen.
Vooraf is aan de orde geweest dat je het te bewijzene soms moet vertalen naar iets anders. Dat kan bijna hetzelfde zijn. Bijvoorbeeld: gelijkbenigheid van driehoeken, dat is hetzelfde als gelijkhoekigheid. Of: drie punten liggen op één lijn, dan moeten de twee deellijnstukken een hoek van 180° met elkaar maken. Dingen die er vlak naast liggen dus, maar net een handvat meer geven.
Hier is een fragment uit het werk van Karin; de rest van het bewijs is aantonen dat er bij S inderdaad hoeken van 60° liggen. Dat is eenvoudig.

Je mag er niet vanuit gaan dat ASD op 1 lijn liggen. Als ze op 1 lijn liggen is ∠ASD 180°.



ja

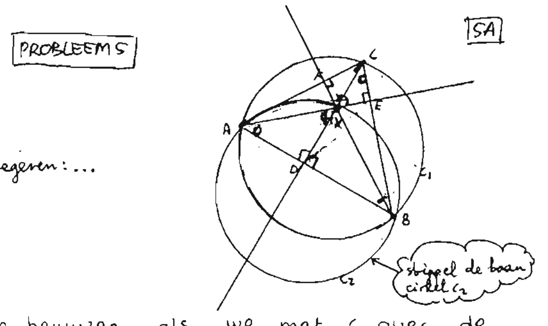


∠ASE + ∠ESC + ∠CSD = 3·60° = 180°
dus ASD inderdaad op 1 lijn

Het expliciteren van wat nog gedaan moet worden, namelijk die 180° aantonen, helpt ook om niet in de val te trappen al te *gebruiken* dat ASD één lijn vormt. Op het bord wordt het later nog even aangezet met twee verschillende kleuren voor AD en DS.

Vermoedens en Cabri

In het slothoofdstuk formuleren leerlingen zelf vermoedens aan de hand van experimenten met Cabri. Deze vermoedens moeten dan later bewezen worden. Bij deze werkwijze hoort een bijzondere heuristiek.
Het nu volgende voorbeeld is precies het voorbeeld dat ik eerder gebruikt heb om diverse dynamische meetkundeprogramma's te vergelijken. Wie Cabri nog niet kent, kan terugkijken naar *Nieuwe Wiskrant 17*(3).
In het computerlokaal zit ik naast Petra en Mark voor het scherm. Een cirkel is getekend, een driehoek ligt met zijn hoekpunten op de cirkel, zodat de hoekpunten over de cirkel sleepbaar zijn, waarbij de cirkel vast blijft liggen. Het hoogtepunt van de driehoek is getekend. Nu loopt C rond over de cirkel en daardoor beweegt H ook. Petra heeft H een spoor laten trekken. Wat blijkt? H loopt óók over een cirkel. Het effect is spectaculair als je het ziet gebeuren en roept direct de vraag op: waarom is dat zo? Die vraag is de natuurlijke aanleiding voor een bewijs. De figuur is te zien in Petra's werk op de volgende bladzijde.
Een belangrijkste heuristiek bij Cabri-werk is: kijk naar het bewegende beeld en probeer iets te vinden dat wel beweegt, maar toch ook iets constants heeft. Vind je zoiets, dan heb je een mogelijke sleutel, misschien een schakel, voor je bewijs in handen. Dit is een goed werkende benadering bij Cabri en ik breng die in het gesprek voor de buis in. Petra zegt daarop dat $\angle AHB$ constant is en laat merken dat ze de constantheid van $\angle C$ ook ziet. De bel onderbreekt, en ik kan alleen nog 'dit gaat je lukken' zeggen. Ze heeft het thuis, op papier, uitgewerkt en achteraf blijkt dat Petra net iets anders deed: ze leidde de constantie van $\angle AHB$ af uit het feit dat H op een vaste cirkel door AB ligt. Dat is aannemen van wat je moet bewijzen, de grootste doodzonde die er zou zijn als dit inderdaad het bewijs zou gaan worden!



Te bewyzen als we met C over de cirkel (c_1) gaan schuiven ontstaat er een cirkelbaan (c_2)

Bewijs.
① als de baan van het hoogte punt een cirkel beschrijft dan moet $\angle AHB$ constant zijn. dus gaan we bewyzen dat dat zo is.
$\angle AHB$ = constant. als dat zo is staat H op dezelfde boog dus een cirkel.

② $\angle ACB$ = constant (zelfde boog AB op cirkel c_2)

Maar kijk nu eens hoe Petra haar bewijsverhaal opent: *als de baan van H een cirkel is, moet ∠AHB constant zijn, dus gaan we bewijzen dat dat zo is.*
Dat is de oude heuristiek die Pappos 'analyse' noemde: het probleem verkennen vanuit de aanname dat de oplossing er al is. Nu moet de synthese-fase volgen: het opbouwen van het bewijs uit de gegevens, de omgekeerde weg van de analyse. Petra's synthese begint bij de vaste hoek *C*; een lange omweg van bijna een bladzijde waarin – hoe kan het anders – koordenvierhoek *CFHE* voorkomt, leidt haar via $\angle AHB = 180° - \angle ACB$ naar het resultaat.
Petra moet genoten hebben van dit succes; ze besluit uiterst professioneel met stap 13, waarin duidelijk wordt dat ze de (niet per se noodzakelijke) gevalsonderscheiding onderkent:

⑬ als C aan de andere kant zit geldt hetzelfde

Tot slot: docent en leerling

In dit verhaal heb ik er een paar maal op gewezen dat de heuristieken ook tot het gespreksgereedschap van de docent horen. De heuristieken zijn dan hulpmiddel om samenhang in het zoekproces te helpen zien. Het gaat me hier dus niet om het al dan niet beter zijn van de ene of andere heuristiek, maar alleen om de directe inhoudelijke effectiviteit ervan. Het gaat erom of het zoekproces erdoor gestimuleerd wordt en niet meer gezegd hoeft te worden: dit weet ik nu niet, dus ik kan het niet. In dit kleine paradijsklasje is dat bereikt.
Docent Marcel Voorhoeve neemt nog andere rollen op zich behalve de gebruikelijk organisatorisch-sturende: die van mede-oplosser en ook die van kritisch klankbord via doorvragen op halfwassen bewijsstappen bijvoorbeeld. Leerlingen nemen dat soms ook over in het gesprek. Nauwelijks de rol van voordoen op het bord, wat betreft leren vinden van bewijzen lijkt dat niet zo effectief en het sturen naar acceptabele wijzen van opschrijven kon ook goed gebeuren vanuit werk van de leerlingen.
Sieb Kemme en Wim Groen schreven in *Nieuwe Wiskrant 19*(2) over probleemoplossen als ambacht. Na hun inleiding begon ik natuurlijk het door hen gebruikte voorbeeldprobleem op een andere manier aan te pakken, maar hun beschouwingen over het zoekproces gingen ook in mijn geval goed op en komen goed overeen met wat ik in dit artikel naar voren breng. Zelfstandig reflecteren op het oplossingsproces zie ik Sieb, Wim en mezelf echter van nature – of gewoon door leeftijd en specifieke vakkennis – wat meer doen dan de leerlingen van deze 6 VWO klas. In 6 VWO zijn zulke dingen wel een stuk bespreekbaarder dan in een 3 Gymnasiumklas. Hier is dan weer een taak voor de docent.

Meetkundige voetnoten

Zelf af en toe een probleem oplossen en kijken hoe je dat doet, het blijft een belangrijke vingeroefening voor wie onderwijs moet geven in deze zaken. Dus waarom niet een paar aardige voortzettingen bij een van de problemen uit dit artikel?

a. Het punt *S* in voorbeeldopgave 1 (p. 20) is het eerste punt van Fermat, al zullen Italianen het wel punt van Torricelli blijven noemen. Klap de driehoeken ook eens om naar de andere kant van de zijden; toon aan dat de drie cirkels dan ook door één punt gaan. Gebruik de plagiaat-heuristiek: het gedetailleerd overschrijven van een bewijs met kleine veranderingen.
b. In voorbeeldopgave 5 (p. 24) gaan *AD*, *BE* en *CF* natuurlijk alle drie door het punt *S* (of F_1). *Maar deze drie stukken zijn ook nog even lang.* Dit mag niet moeilijk te bewijzen zijn, vooral voor wie een eerdere fase van het meetkundeonderwijs nog in herinnering heeft.
c. Plagieer opgave b zoals opgave a voorbeeldopgave 1 plagieert.
d. In voorbeeldopgave 5 was het door één punt gaan van *AD*, *BE* en *CF* bewezen voor het geval dat de buitenwaartse driehoeken gelijkzijdig zijn. Plaats nu eens drie gelijkbenige, onderling gelijkvormige driehoeken met hun bases op de drie zijden van *ABC* en bewijs ook nu dat *AD*, *BE* en *CF* door één punt gaan. De cirkels moet je nu vergeten! Deze opgave mag gerust wat lastiger gevonden worden.
e. Teken een driehoek (met Cabri maar). Teken de beide Fermatpunten, het middelpunt van de omgeschreven cirkel en het middelpunt van de negenpuntscirkel en toon aan dat deze vier op één cirkel liggen. Dit is in 1995 door J. Lester aangetoond. Heuristiek: gebruik andermans werk via het internet.

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut, Utrecht

Literatuur

Goddijn, A.J. & W. Reuter (1997). *Afstanden, grenzen en gebieden; Voortgezette Meetkunde, deel I.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Goddijn, A.J. & W. Reuter (1998). *Denken in cirkels en lijnen; Voortgezette Meetkunde, deel IIA en IIB.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Goddijn, A. (1998). Construeren met button en muis. *Nieuwe Wiskran,t 17*(3), 45-49.

Kemme, S. & W. Groen (1999). Probleemoplossen is een ambacht. *Nieuwe Wiskrant, 19*(2), 36-40.

Oort, F. (1968). *Vlijt, visie, verificatie: aspecten van wiskundebeoefening.* Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton N.J.: Princeton University Press. Nederlandse vertaling: *Heuristiek en wiskunde.* Den Bosch: Malmberg, 1974.

Polya, G. (1962, 1965). *Mathematical Discovery, I and II; on understanding, learning, and teaching problem solving.* New York: John Wiley & Sons.

Streun, Anne van (1989). *Heuristisch wiskunde-onderwijs; verslag van een onderwijsexperiment; proefschrift.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Weisstein E. (1996). *Eric Weisstein's World of Mathematics.* http://mathworld.wolfram.com/

Wintersymposium Wiskundig Genootschap

Al vele jaren organiseert het Wiskundig Genootschap op de eerste zaterdag in het kalenderjaar haar Wintersymposium. Dit symposium is in eerste instantie bedoeld voor docenten uit het voortgezet onderwijs, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom.
De bedoeling van het Wintersymposium is om het contact tussen leraren enerzijds en wiskundigen uit de academische wereld en het bedrijfsleven anderzijds te onderhouden en te verstevigen. In een drietal voordrachten belichten ervaren sprekers facetten van een gekozen thema.

Het symposium op 6 januari 2001 zal worden gehouden in het Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Thorbeckeplein 1, Amersfoort en heeft als thema *Wiskunde en recreatie*: wat doen mensen zoal in hun vrije tijd om zich te ontspannen en welke wiskunde is daar in te ontdekken?

Programma

09.30-10.00	Ontvangst met koffie en thee
10.00-11.00	*Veelvlakken* F. Göbel (UT)
11.00-11.15	Pauze met koffie en thee
11.15-12.15	*Wiskunde en Kunst* T. Verhoeff (TUE)
12.15-13.30	Pauze waarin men kan deelnemen aan de lunch
13.30-14.30	*Behendig gokken in en rond het casino* B. van der Genugten (KUB)

Opgave
De deelname is gratis. Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht voor 25 december 2000 *f* 17,50 over te maken op gironummer 3762917 t.n.v.
H. Bakker, Zuiderbuuren 32, 9363 HK Marum.

Wie in aanmerking wil komen voor een certificaat dient bij de betaling te vermelden: Certificaat.

Inlichtingen
Voor verdere inlichtingen kunt u bellen: (050) 363 39 35 (overdag) of (0594) 64 16 36 ('s avonds) of emailen naar bakker@cs.rug.nl.