In het contextrijke algebraprogramma van het TWIN-project is veel aandacht voor de betekenis van dimensies en eenheden. **Henk van der Kooij** werkt dit thema uit aan de hand van een aantal voorbeelden en betoogt dat de ervaringen van TWIN ook voor het AVO interessant zijn.

Dimensievolle algebra

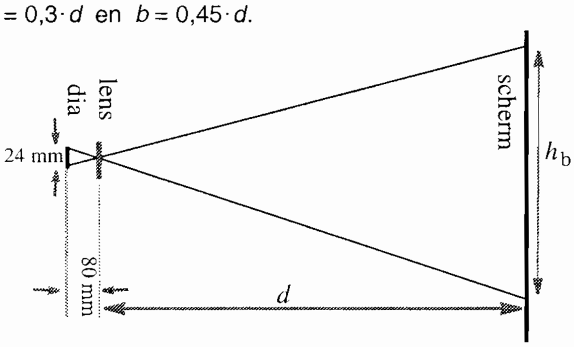
Inleiding

In het TWIN-project voor het MTO is een wiskundeprogramma gemaakt dat daadwerkelijk ondersteunend moet zijn voor de praktijkvakken van de sector Techniek van het ROC. Dat ondersteunende karakter was een van de eisen die we onszelf hebben opgelegd bij de start van het project in 1996. In de loop van het project is steeds duidelijker geworden dat deze keuze grote gevolgen heeft voor het soort wiskunde dat je kunt en wilt aanbieden binnen de sector Techniek van het beroepsonderwijs. Zo moet bijvoorbeeld de (formele) algebra uiterst voorzichtig worden gehanteerd. Daarover gaat dit artikel.
En hoewel de ervaringen zijn opgedaan in het technisch beroepsonderwijs, menen wij dat er ook signalen voor het algemeen vormend onderwijs uit af te leiden zijn.

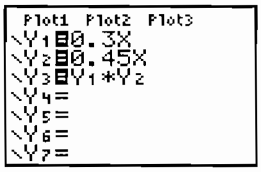
Grootheden met dimensies: geen waardeloze getallen

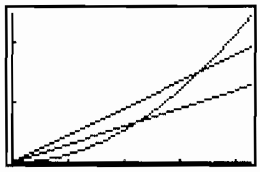
Dat wiskunde niet altijd zomaar werkt, ondervonden wij, wiskundig gevormden, op een pijnlijke manier aan de hand van de volgende vraagstukken in het TWIN-materiaal. Lineaire evenredigheid is op dat moment al bekend. Deze vragen leken een aardige inleiding op kwadratische evenredigheid.

De grootte van het beeld van een dia (afmetingen 36 bij 24 mm) op een scherm hangt samen met de afstand van projector tot scherm. Bij een voorwerpsafstand (afstand tussen dia en lens van de projector) $v = 80$ mm passen de volgende formules voor hoogte en breedte van de dia: $h = 0{,}3 \cdot d$ en $b = 0{,}45 \cdot d$.



De oppervlakte O van het beeld volgt door de twee afmetingen met elkaar te vermenigvuldigen.
Op de GRM zien de grafieken er zo uit:





80. Bekijk het linkerplaatje.
Welke grootheden beschrijven **Y1**, **Y2**, **Y3** en **X**?

Zoals je ziet snijdt **Y3** de grafieken van **Y2** en **Y1**.
Bedenk bij de volgende vraag dat geldt: $O = h \cdot b$.

81 **a.** Bij welke waarde van b snijdt de grafiek van O de grafiek van h?
b. Bij welke waarde van h gaat de grafiek van O door de grafiek van b?

Opgave 81 is wiskundig een leuke vraag: een product kan alleen maar gelijk zijn aan een van de factoren, als de andere factor 1 is. Bij beide vragen is dus het antwoord 1. Leerlingen hadden duidelijk een andere mening. Ze werden (terecht!) kwaad op de vraagstellers: je kunt toch zeker niet een lengte en een oppervlakte in één figuur tekenen, laat staan dat je ze aan elkaar gelijk wilt praten.
Dit incident in een vroeg stadium van het project maakte ons eens te meer bewust van het feit dat in de wiskunde heel makkelijk wordt afgezien van de werkelijkheid en dat gebruikers simpelweg gedwongen worden te bewegen in de wereld van de absoluut waardevrije (en voor veel leerlingen spreekt de minder klinische benaming 'waardeloze' misschien meer aan!) getallen.
Het afzien van de betekenis van getallen kan heel nuttig zijn als je bepaalde patronen of wetmatigheden wilt bestuderen. De discipline wiskunde is daarop gericht. Voor de meeste leerlingen (niet alleen in de sector techniek, maar ook in het AVO) is dit echter niet zo vanzelfsprekend. En, zoals bovenstaand voorbeeld aangeeft, in de context van een echte probleemstelling is het ook niet altijd gerechtvaardigd.
In het TWIN-project zijn we na dit incident heel bewust rekening gaan houden met grootheden en eenheden.

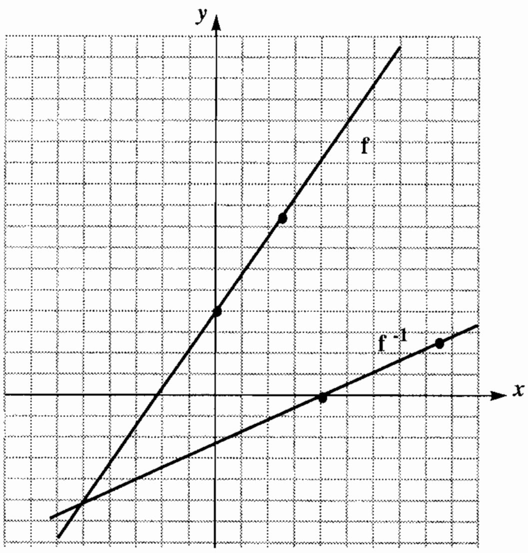
Binnen de wiskunde worden verbanden tussen (meestal twee) getallenseries bestudeerd met behulp van functies of formules. In de sector Techniek worden alleen verbanden tussen grootheden bekeken. De leerlingen krijgen bij alle technische vakken voortdurend op het hart gedrukt dat de bijbehorende dimensies moeten kloppen. En dat vraagt om meer dan alleen maar het stoeien met getallen. Wiskunde is dus niet zomaar bruikbaar in alle omstandigheden. Hoewel je in bovenstaand voorbeeld leerlingen misschien nog kunt trainen in het eerst loslaten van de context om daarna 'echte' wiskunde te gaan doen ....
Maar het kan nog erger: klakkeloos toepassen van stukjes wiskundetheorie is soms ook fundamenteel fout!
Een heel simpel voorbeeld laat dit zien:

Gegeven is een lineair verband, waarvan twee paren bekend zijn: (0, 32) en (20, 68).
Bepaal de bijbehorende functie en zijn inverse.

Niet zo moeilijk natuurlijk:

$$\text{f}: y = \tfrac{9}{5}x + 32 \qquad \text{en f}^{\text{inv}}: y = \tfrac{5}{9}(x - 32)$$

En het plaatje lukt ook nog wel:



Tot zover geen problemen. Maar ....
Vervang nu eens de waardevrije getallen door echte grootheden. Ofwel: zet de vraagstelling in een context:

Bekend is dat Angelsaksen nog steeds erg afwijkend denken over maten. Bij temperaturen is er het bekende verschil tussen C(elsius) en F(ahrenheit).
IJkpunten voor het omrekenen zijn:

- beide temperaturen worden op een lineaire schaal gemeten
- 0°C correspondeert met 32°F en 20°C met 68°F

Dit leidt tot de volgende omrekenformule, die handig is voor een Amerikaan die Nederland bezoekt:

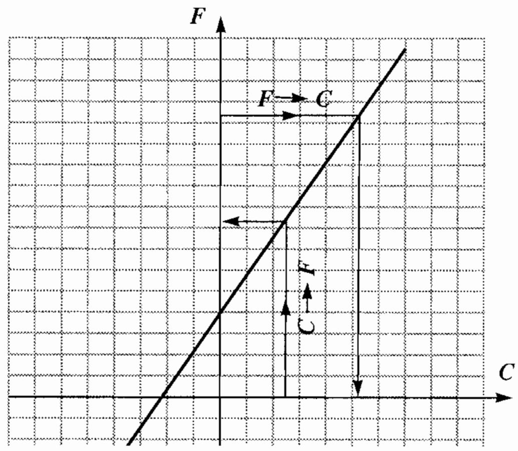
$$F = \tfrac{9}{5}C + 32$$

Volg nu verder de handelingen die hierboven in het contextloze geval met x en y zijn uitgevoerd.
Dan krijg je voor het inverse verband:

$$F = \tfrac{5}{9}(C - 32)$$

En dat is vreemd! Je verwacht een omrekening van F naar C, maar je krijgt weer een formule om Celsius om te rekenen naar Fahrenheit.

Wat hier fout gaat bij het gebruiken van de wiskunde, is het klakkeloos toepassen van een stukje theoretische wiskunde in echte contexten.
Getallen in de wiskunde zijn 'geslachtsloos'. Daarom kunnen hun namen (x en y) zonder problemen worden verwisseld. In echt fysische contexten dragen getallen altijd eenheden met zich mee; in dit geval °C en °F. En betekenisvolle getallen mag je absoluut niet verwisselen. Wiskundig gezien zijn er leuke opgaven te verzinnen over snijpunten van de grafieken van een functie en zijn inverse. Met name de lijn $y = x$ speelt daarin een belangrijke rol (en pas op: horizontaal en verticaal is dezelfde schaling verplicht!). Maar zulke vragen zijn alleen geoorloofd binnen de betekenisloze wereld van de algebra.
Dragen de variabelen (grootheden) dimensies met zich mee, dan zijn zulke vraagstukken volstrekt onzinnig.
In TWIN worden een verband en zijn inverse daarom nooit als twee aparte grafieken in één figuur weergegeven. De enige juiste manier is één grafiek te tekenen en die in twee verschillende richtingen uit te lezen:



Vanwege dit conflict tussen betekenisloze variabelen en betekenisvolle grootheden lijken er op het eerste gezicht slechts twee opties te zijn voor het inrichten van wiskundeonderwijs:

– zie af van grootheden en dimensies en train de leerlingen in het spelen met 'kale' variabelen en getallen
– laat de betekenisvolle grootheden in hun waarde en bouw daarmee een betekenisvolle wiskunde op.

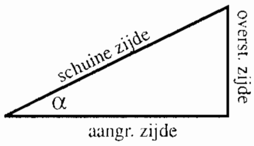
In TWIN hebben we, bij het schrijven van de materialen voor de eerste twee leerjaren, de tweede optie gekozen om de al genoemde reden: wiskunde moet in de eerste plaats dienstbaar zijn aan de praktijkvakken.
Maar van een nood kan ook wel eens een deugd worden gemaakt.

Aan de hand van een paar voorbeelden laten we zien dat het bewust rekening houden met de betekenis van getallen en variabelen ook kan bijdragen aan een beter begrip van (formele) wiskundige concepten.

Sinus van de tijd, hoe zit dat eigenlijk?

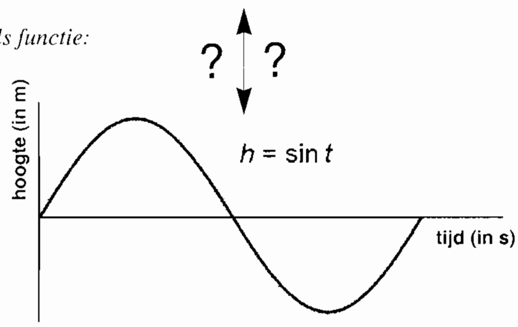
Goniometrie is een erkend moeilijk onderwerp binnen het wiskundeonderwijs. Wellicht mede doordat we onze leerlingen het verschil tussen de meetkundige en de functionele verschijning van het fenomeen niet laten ervaren. Eerst is de sinus een dimensieloos verhoudingsgetal dat de grootte van een scherpe hoek vastlegt.

Meetkundig:

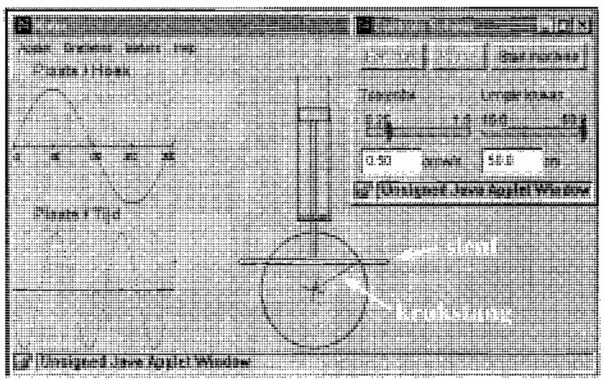


$$\sin \alpha = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$$

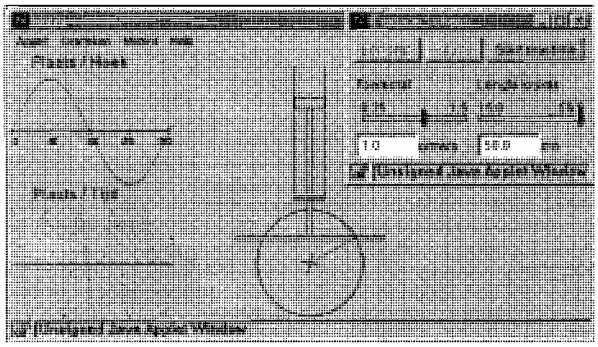
Als functie:



Later wordt het een functievoorschrift dat een getal (vaak een tijdstip) koppelt aan een ander getal (bijvoorbeeld een hoogte). En dat is op zijn minst vreemd. Meetkundig gaat het om de koppeling van dimensieloze getallen, maar de functie koppelt verschillende grootheden aan elkaar.
Deze schijnbare tegenstrijdigheid tussen de meetkundige en de functionele betekenis kan worden doorzien met de volgende context.
Een zuiger wordt in een op- en neergaande beweging gebracht door een met eenparige snelheid ronddraaiende krukstang die via een sleuf aan de zuiger is gekoppeld. De Java applet die hierbij is ontwikkeld (zie: www.fi.uu.nl/twin/) toont de werking van de motor.



Verder zijn de grafieken van de verbanden *Plaats/Tijd* en *Plaats/Hoek* bij een toerental van 0,5 omw/s zichtbaar in de schermafdruk.
Het toerental wordt verdubbeld (in te stellen in het controle scherm): de motor draait tweemaal zo snel.
De applet toont de gevolgen voor de twee grafieken:



– De *Plaats/Tijd* grafiek verandert zichtbaar
– de *Plaats/Hoek* grafiek blijft zichzelf.

Hoe kan dat?
Kijken naar de twee verschillende formules geeft niet zonder meer uitsluitsel. Bij een toerental van 0,5 omw/s en een straal van 0,5 m hoort de formule: $h = 0{,}5 \cdot \sin(\pi t)$. Bij het tweede scherm hoort $h = 0{,}5 \cdot \sin(2\pi t)$. En wiskundig gezien moet daarom de tweede grafiek horizontaal met factor 2 zijn 'ingedikt' ten opzicht van de eerste.
De getallen π en 2π in deze formules zijn de waarden van de hoeksnelheid ω (in rad per seconde) van de ronddraaiende krukas. Dat geeft de sleutel tot het mysterie.
Bij *Plaats/Tijd* is t de onafhankelijke variabele, bij het *Plaats/Hoek* verband is dat de draaihoek, met waarde πt bij de eerste formule en $2\pi t$ bij de tweede formule.
De *Plaats/Hoek* formule kan ook worden geschreven als $h = 0{,}5 \cdot \sin(\alpha)$ waarin α de draaihoek is en deze formule blijft zichzelf, hoe snel er ook wordt rondgedraaid.
In feite is de *Plaats/Hoek* grafiek te beschouwen als een parameterkromme die niet van vorm verandert, maar wel met verschillende snelheden wordt doorlopen (bij het tweede scherm tweemaal zo snel als bij het eerste scherm).
Maar dit betekent dat een eenvoudig ogende formule als $h = \sin(t)$ eigenlijk staat voor $h = 1 \cdot \sin(1 \cdot t)$. De eerste 1 is de maximale hoogte, de tweede 1 is de hoeksnelheid ω.
Er zitten dus verborgen parameters in de simpele formule. Voor het begrip van de leerlingen kunnen die beter zichtbaar gemaakt worden. De algemene formule wordt dan: $h = h_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$. En daarmee deugen de dimensies weer: links staat een lengte, rechts ook. De sinus wordt, zoals het een sinus betaamt, bepaald van een hoek die zelf weer dimensieloos is (en uitgedrukt in radialen in dit geval). Het essentiële verschil tussen de *Plaats/Tijd* en *Plaats/Hoek* formule is het best te zien als je de gebruikelijke functienotatie gebruikt:

$$h(t) = h_{max} \cdot \sin(\omega t) \text{ resp. } h(\omega t) = h_{max} \cdot \sin(\omega t).$$

De laatste kan ook worden geschreven als

$$h(\alpha) = h_{max} \cdot \sin(\alpha).$$

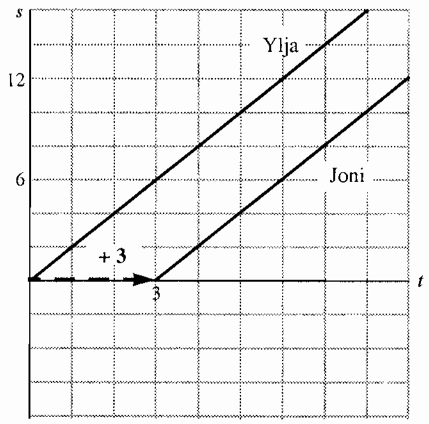
In de elektrotechniek, een van de belangrijkste gebruikers van de sinus, worden deze twee typen functies vaak met elkaar verward. In veel boeken zie je grafieken met een horizontale tijd-as, terwijl uit de tekst blijkt dat in de formules wordt gewerkt met de grootheid ωt, de draaihoek. Een faseverschuiving van bijvoorbeeld 30° geeft dan niet een horizontale verschuiving van de grafiek over 30 eenheden en dat is hoogst verwarrend.

Hetzelfde, maar toch anders....

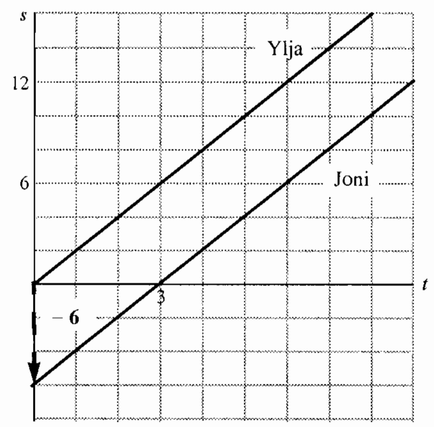
Een type probleem dat je in alle onderbouwboeken kunt tegenkomen:

Ylja en Joni lopen eenzelfde route vanaf eenzelfde startpunt met dezelfde snelheid van 2 m/s. Ylja vertrekt eerst; Joni start 3 seconden later.
Geef de *s-t* formules voor de twee wandelingen.

Met de gelopen afstand in meters (s) en de verstreken tijd in seconden (t) vind je voor Ylja de formule $s=2\cdot t$ en voor Joni $s=2\cdot(t-3)$.
In één plaatje getekend:



Dat voor Joni eigenlijk nog $s = 0$ voor t in het interval [0,3> moet worden toegevoegd, laten we hier buiten beschouwing. Hier is de vorm van de formule belangrijk.
Algebraïsch gezien zou je voor Joni ook deze formule kunnen maken: $s=2\cdot t-6$.
Het plaatje hierbij is, geïnterpreteerd vanuit de context, echter anders:

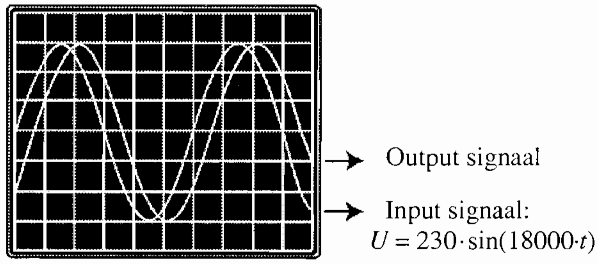


In plaats van het vertrek met drie seconden uit te stellen, start ze in dit geval op hetzelfde moment met een achterstand van 6 m. En dat is echt een ander verhaal.
De betekenis van de getallen in de formules blijkt bij het interpreteren erg belangrijk. De 3 uit de eerste formule is een tijd (in s), de 6 in de tweede is een afstand (in m).
De twee formules hebben een verschillende structuur:
- de eerste is een *afstand = snelheid · tijd* verband
- de tweede is een *afstand = afstand − afstand* verband.

In de eerste interpretatie ijlt Joni 3 seconden na, in de tweede vorm ligt ze steeds 6 m achter op haar zus.

Worden de twee voorbeelden (sinus en wandeling) gekoppeld, dan krijg je elektrotechnisch belangrijke zaken.

Een wisselspanning krijgt bij het doorlopen van een circuit een faseverschuiving van 30°.
Welke formule beschrijft de 'verschoven' spanning?



Het is goed om eerst de getallen in de formule te interpreteren. De 230 (Volt) is de gebruikelijke netspanning voor huiselijk gebruik. Het getal 18000 volgt als je de netfrequentie van 50 Hz. omrekent naar het aantal graden dat per seconde wordt doorlopen:

$$50\cdot 360 = 18000.$$

Dus het getal 18000 geeft de hoeksnelheid weer, gemeten in graden per seconde (elektrotechnici zijn huiverig voor het gebruik van de radiaal!).
De 'verschoven' spanning wordt dus gegeven door de formule $U = 230\cdot\sin(18000\cdot t - 30)$.
De variabele is de draaihoek $\alpha = 18000\cdot t - 30$.
Wil je daarentegen de spanning als functie van de tijd zien, dan moet de gegeven 30° worden omgebouwd naar de tijd die nodig is om 30° te doorlopen. Per seconde worden 50 hele rondjes doorlopen, dus 30° vraagt het twaalfde deel van 1/50 seconde, ofwel 1/600 s.
Daarmee wordt de *spanning-tijd* formule dus:

$$U = 230\cdot\sin(18000(t - 1/600)).$$

In een U-ωt grafiek wordt het outputsignaal dus horizontaal 30 verschoven; in een U-t grafiek is de horizontale verschuiving slechts 1/600.
Algebraïsch klopt het weer met elkaar. Echter: de tweede formule is hier niet via algebraregeltjes gevonden, maar vanuit de manipulatie met grootheden binnen de context van het probleem.

Exponentiële groei: tijdgebonden?

Ook bij exponentiële groei kan een dimensie-analyse helpen om een beter zicht te krijgen op het wiskundige fenomeen parameter.
De algemene vorm van dit soort groei wordt in de wis-

kunde gevangen in de formule: $N(t) = N_0 \cdot g^{\lambda \cdot t}$ waarbij N_0 de beginhoeveelheid is en t de tijd gemeten in een of andere eenheid, laten we zeggen een dag. Zowel N als N_0 zijn dimensieloos; het zijn aantallen of hoeveelheden.
De parameter λ heeft wel een dimensie, namelijk (tijd^{-1}), omdat de combinatie $\lambda \cdot t$ dimensieloos moet zijn.
In de natuurkunde en de techniek is (tijd^{-1}) de afgeleide dimensie die hoort bij frequentie. De frequentie geeft als het ware aan hoeveel keer per tijdseenheid een verschijnsel wordt herhaald[1]. Bij een groeifactor 8 per dag (onze aangenomen tijdseenheid) heeft λ de waarde 1. Daarbij hoort dan de formule: $N(t) = N_0 \cdot 8^t$.
De parameter heeft waarde 1 en wordt dus, wiskunde-traditiegetrouw, verdonkeremaand. Handhaaf je hem wel, dan geeft die 1 aan dat het verschijnsel (ver-acht-voudiging) precies één keer per dag plaatsvindt.
Wil je nu het verschijnsel met grondtal 2 beschrijven, dan weet je dat daarmee de dagfrequentie 3 wordt, dus: $N(t) = N_0 \cdot 2^{3 \cdot t}$ en dat spoort natuurlijk goed met de algebramanipulatie die tot hetzelfde resultaat leidt: $8 = 2^3$.
Alleen ... voor die laatste aanpak is toch weer wat zelfvertrouwen op het gebied van algebraïsche manipulatievaardigheden nodig en daarover beschikken lang niet alle leerlingen.

Betekenisvolle algebra: bestaat dat eigenlijk wel?

Binnen het TWIN-project hebben we geconstateerd dat leerlingen heel goed in staat zijn om een mix van contextgebonden handelingen en het gebruik van simpele specifieke algebraïsche vaardigheden toe te passen bij het oplossen van een probleem. Wordt zo'n zelfde vraagstuk echter contextloos aangeboden, dan slaat in veel gevallen de paniek toe.
In dit kader is het ook aardig om te zien wat in Engeland is geconstateerd bij een grootschalig onderzoek naar het gebruiken van wiskunde op de werkplek. Bankmedewerkers, verpleegkundigen en piloten die wiskunde toepassen in hun werk (rentepercentages, doseringen van medicijnen en winddriehoeken) kunnen dat wel binnen de context van het beroep, maar haken af als dezelfde problemen 'kaal' worden voorgeschoteld (Hoyles & Noss, 1998). Hoyles en Noss spreken in dit kader van 'situated abstraction' waarbij de beroepskennis en -ervaringen als 'anchors' dienen voor het wiskundig werken.
Praktijkmensen blijken nooit volledig in de abstracte wereld van de wiskunde te duiken; altijd is er de binding met de context van het probleem. En deze binding bepaalt de strategie die wordt gevolgd voor het oplossen ervan.
Bij contextproblemen zie je dat leerlingen vaak een contextgebonden, informele strategie volgen, waarin zo af en toe een instrumentele vaardigheid[2] wordt toegepast.

Door dit soort ervaringen zijn we binnen TWIN een onderscheid gaan maken tussen twee verschijningsvormen van de algebra:

- *'pure' algebra*
  Dit is de formele algebra zoals die in de abstracte wereld van de discipline wiskunde wordt gedefinieerd en gehanteerd. Het gaat daarbij onder andere om het algoritmisch manipuleren van lettervormen en strikt waardevrije getallen en variabelen.
- *'context' algebra*
  Deze algebra wordt gehanteerd in de wereld van de echte contexten, in het werkveld. Daarbij wordt een mix van eigen strategieën en formele algebraregels gebruikt die bijna persoonsgebonden tot (goede) oplossingen leidt.

Wij denken dat het goed is voor didactici, ontwikkelaars, auteurs en docenten om dit onderscheid te onderkennen. In de leerboeken worden deze twee soorten algebra vermengd, zonder dat dit expliciet wordt duidelijk gemaakt aan de leerlingen. Het is eigenlijk geen wonder dat leerlingen daardoor van slag raken. Ze worden vaak bij de overgang van de ene naar de andere opgave geacht over te schakelen van de ene vorm van algebra bedrijven op de andere vorm. In het TWIN-project hebben we geleerd dat expliciete aandacht voor deze twee verschijningsvormen van de algebra de leerling kan helpen om daarmee te leren omgaan.
De twee vormen van algebra vragen verschillend aanpakgedrag. De 'context algebra' laat veel meer vrijheden toe en geeft leerlingen de kans om eigen strategieën te hanteren. De algoritmiek in de 'pure algebra' legt vrij rigide gedragsregels op aan de beoefenaar.
Strikt genomen is het antwoord op de vraag of betekenisvolle algebra wel bestaat dus gewoon 'nee'. Waarbij betekenisvol dan gekoppeld is aan betekenis hebben in een bepaalde, niet-wiskundige context.
De 'pure algebra' ziet juist af van de eventuele betekenis van getallen en variabelen; de waardevrije getallen worden object van formeel wiskundig handelen.

Is het of/of of is het en?

Eerder in dit artikel werd gezegd dat er kennelijk slechts twee keuzen mogelijk zijn voor de inrichting van het wiskundeonderwijs:

- zie af van grootheden en dimensies en train de leerlingen in het spelen met 'kale' variabelen en getallen
- laat de betekenisvolle grootheden in hun waarde en bouw daarmee een betekenisvolle wiskunde op.

Ook in deze onderscheiding vind je de 'pure algebra' en de 'context algebra' terug. In TWIN hebben we bij de onderbouwdelen voornamelijk gekozen voor de tweede optie. Voor de doorstroom naar HTO was het echter noodzakelijk om in de bovenbouw meer nadruk te leggen op de formele wiskunde. Je ziet dan leerlingen afhaken op opgaven die ze voorheen wel konden maken als ze in een context zijn geformuleerd. Dat doet toch weer de vraag rijzen of het voor het MBO zo nodig is om vergaand te formaliseren, zeker omdat de grafische rekenmachine een goed alternatief biedt voor veel algebraïsch handelen.

En het AVO dan?

In de nieuwe onderbouwprogramma's van het AVO zijn veel pogingen ondernomen om de algebra meer betekenisvol te maken vanuit de wereld van contexten. De meer formele algebra (het letterrekenen) is daardoor opgeschoven naar latere leerjaren. In de praktijk blijken allerlei dingen toch nog fout te gaan. Zo lijken leerlingen in de bovenbouw van HAVO en VWO niet of gebrekkig in staat om algebraïsch te manipuleren. En dat lijkt strijdig met het idee bij de COW-programmavernieuwing voor de onderbouw dat een informele benadering vanuit contexten de algebra meer betekenisvol zou maken en daardoor beter hanteerbaar. Onderzoek naar oorzaken en mogelijke aanpakken is noodzakelijk en wordt momenteel ook uitgevoerd. Monica Wijers en Sieb Kemme schrijven hierover:

- leerlingen zijn redelijk tot goed in staat een contextprobleem op te lossen, terwijl een formeel algebraïsch gesteld probleem afschrikt (Wijers, 2000)
- het gebruiken van algemene algebraïsche vaardigheden lijkt minder een probleem te zijn dan van de instrumentele vaardigheden (Wijers & Kemme, 2000).

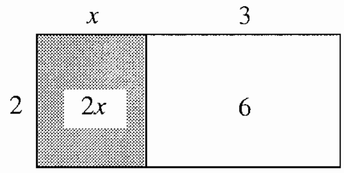
Het gemeenschappelijke in beide punten is dat er aan de ene kant ruimte wordt gelaten voor eigen inbreng, intuïtie en creativiteit (contextproblemen oplossen en algemene algebraïsche vaardigheden), terwijl aan de andere kant een tamelijk strikt voorgeschreven pad moet worden bewandeld (oefenen en gebruiken van instrumentele vaardigheden).
Lang geleden (Van der Kooij, 1991) is deze tweeslachtigheid binnen de analyse ook al eens opgemerkt bij de formulering van het eindexamenprogramma wiskunde B HAVO. Het gaat om de beschrijving van het differentiëren:

> Het inzicht in het fenomeen 'afgeleide functie als maat voor verandering' en de beheersing van differentieertechnieken en de daarmee samenhangende algoritmische vaardigheden zijn de twee hoofddoelen van het onderwerp. Tussen beide aspecten dient een goed evenwicht te worden bewaard.

Inzichten gaan veelal samen met emotioneel geladen zaken als kritische houding, onderzoeken, heuristieken, enzovoort, terwijl de beheersing van technieken gekoppeld is aan emotieloze zaken als strak keurslijf en routinematig handelen. Het lijkt ook in het AVO goed om te onderkennen dat de verschillende gezichten van de algebra niet zomaar duidelijk zijn voor de leerlingen. Zowel 'context algebra' als 'pure algebra' hebben hun eigen waarde. Aan leerlingen zal, veel beter dan nu gebeurt, duidelijk gemaakt moeten worden hoe verschillend de twee zijn, maar ook hoe nuttig het kan zijn om van de ene vorm naar de andere over te stappen, als het probleem dat toelaat.

Tot slot

In dit artikel is vooral aandacht besteed aan grootheden en eenheden die in de Techniek het wiskundig bezig zijn bepalen. Aandacht schenken aan dimensies en eenheden kan bijdragen aan een beter inzicht in en het hanteren van wiskundige formules.
Ook in de wiskunde van het AVO zou dit kunnen bijdragen tot een beter begrip. Als voorbeeld kijken we nog een keer naar de wandeling van de twee meisjes.
In de onderbouw wordt het wegwerken van haakjes terecht aangekaart met het meetkundige model van de rechthoek. De uitdrukking $2\cdot(x+3)$ laat zich op deze manier zichtbaar uitsplitsen in $2x$ en 6:



De twee formules voor de wandeling met de twee verschillende vormen leveren een heel ander 'anker' voor de formele operatie van het haakjes wegwerken. En het lijkt op zijn minst aannemelijk dat een leerling bij het rekening houden met dimensies niet snel meer de veel voorkomende fout zal maken om $2\cdot(x-3)$ om te vormen tot $2x - 3$. In dat laatste geval kloppen de dimensies niet meer: de tijd '3' is in de verkeerde uitwerking immers een vreemde eend in de bijt geworden.

Henk van der Kooij, Freudenthal Instituut, Utrecht

Noten

[1] In een commentaar op dit artikel merkt Jan van de Craats op dat toepassers niet de vorm $N(t) = \mathrm{N}_0\cdot \mathrm{g}^{\lambda\cdot t}$ gebruiken, maar $N(t) = \mathrm{N}_0\cdot \mathrm{g}^{t/t_0}$. De parameter λ is vervangen door $1/t_0$ waarmee de dimensieloosheid van de exponent en de betekenis van t_0 meteen duidelijk zijn. Wellicht een goede suggestie voor de schoolboekenauteurs en docenten.

[2] In de terminologie die Kemme en Wijers gebruiken in het artikel 'Welke algebra heb je nodig in 4 VWO?' *Nieuwe Wiskrant, 20*(1), 22-25.

Literatuur

Hoyles, C. & R. Noss (1998). Anchoring Mathematical Meanings in Practice. In: K. Gravemeijer, ed. *Introductory Texts for the International Conference on Symbolizing and Modeling in Mathematics education.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Kooij, H. v.d. (1991). Toegepaste analyse: probleemaanpak en contextgebruik. In: H.G.B. Broekman e.a. *Algoritmen en heuristieken contextrijk reken-wiskunde-onderwijs.* Utrecht: OW&OC.

Wijers, M. & S. Kemme (2000). Welke algebra heb je nodig in 4 VWO? *Nieuwe Wiskrant, 20*(1), 22-25.

Wijers, M. (2000). Algebra, een praktijkprobleem? *Nieuwe Wiskrant, 19*(3), 36-41.