

Er zijn weinig disciplines binnen de wiskunde die zo tot de verbeelding spreken als de kansrekening. Kansen komen letterlijk dagelijks aan de orde. Aan de hand van een aantal aansprekende voorbeelden geeft **Ronald Meester** een persoonlijke visie op de rol die kansrekening speelt in ons dagelijks leven.

## De rol van kansrekening in het dagelijks leven

*Dit artikel is een iets verkorte weergave van de lezing die de auteur hield op het symposium 'Wetenschap in het dagelijks leven', dat op 29 september 2000 ter gelegenheid van de tweede verjaardag van de Faculteit der Exacte Wetenschappen van de Vrije Universiteit te Amsterdam gehouden werd.*

### Toeval en kans

Bestaat toeval? Uit het volgende zal blijken dat die vraag simpelweg verkeerd is gesteld en dat er geen zinvol antwoord mogelijk is. Daarna zal ik proberen aan te geven hoe dat te rijmen is met het feit dat de kansrekening toch zo'n prominente rol in onze samenleving speelt.

Welke rol speelt kansrekening eigenlijk in onze huidige maatschappij? Mensen maken kanstheoretische modellen die een bepaald aspect van de werkelijkheid zouden moeten beschrijven. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de verspreiding van een besmettelijke ziekte, of de problematiek rond het vaststellen van een verzekeringspremie. Gemeenschappelijk kenmerk van die aspecten is dat er onzekerheid in het spel is, in welke vorm dan ook. Berekeningen en andere resultaten in zo'n model geven dan hopelijk informatie die relevant is voor de werkelijkheid. Of die informatie inderdaad relevant is, moet telkens de ervaring weer leren. Een conclusie uit een model waarvan de relevantie niet op de een of andere manier toetsbaar is, heeft weinig betekenis. Hier blijkt het in de praktijk vaak mis te gaan. Het volgende recente voorbeeld gaat over de kans op leven op een andere planeet.

### Is er leven buiten onze aarde?

In 1998 verscheen een boek van Amir Aczel met de titel *100% kans* en met de ondertitel *waarom het zeker is dat buitenaards leven bestaat*. Op de achterflap van dit boek is het volgende te lezen:

'Met behulp van geavanceerde wiskundige kennis toont hij aan dat we niet de enige levende wezens in het heelal zijn. Wat velen onder ons intuïtief allang wisten, wordt nu bewezen op grond van een briljante combinatie van feitelijke informatie en kansberekening.'

Hoewel er vele bladzijden aan besteed worden, is de argumentatie voor de claims op de achterflap in enkele zinnen uit te leggen. Die gaat ongeveer als volgt.

Om te beginnen, zo zegt Aczel, zijn er heel erg veel planeten die in zeker opzicht op de aarde lijken en waarvan we kunnen aannemen dat er leven op zou kunnen ontstaan. Vervolgens neemt hij aan dat de kans dat op zo'n planeet leven ontstaat, klein is en hij kwantificeert dat zelfs met de aanname dat deze kans 0,000000000000005 zou zijn. Hoe hij aan dat getal komt, is niet belangrijk voor mijn betoog. Vervolgens neemt hij aan dat het ontstaan van leven op de ene planeet niets zegt over het ontstaan op een andere, met andere woorden, hij veronderstelt dat deze gebeurtenissen onafhankelijk zijn. Met behulp van deze aannames kan hij dan zijn 'bewijs' gaan leveren.

Vooraf stel ik voor dat we een rad van fortuin in gedachten nemen, met vakjes genummerd van 1 tot en met 100. We nemen vervolgens één nummer in gedachten en geven een draai aan het rad. De kans dat de wijzer bij het door ons gekozen nummer blijft steken, is natuurlijk heel klein, namelijk 1/100. De uitkomst van de tweede draai hangt op geen enkele manier af van de uitkomst van de eerste. De draaien zijn onafhankelijk van elkaar. Ook bij de tweede draai is de succeskans weer 1/100. Maar als we het maar lang genoeg proberen, dan is het zeker dat we uiteindelijk een keer geluk hebben. Als we na dat succes doorgaan met proberen, dan zal er vervolgens zeker een tweede succes op volgen, et cetera. We concluderen dus dat wanneer je een experiment met een hele kleine succeskans maar vaak genoeg herhaalt, de kans op uiteindelijk succes heel groot is.

Welnu, zo zegt Aczel, vergelijk een planeet nu even met een draai aan het rad. Een nieuwe draai aan het rad correspondeert met een nieuwe planeet. De kans dat er leven is, de succeskans dus, is klein. Maar net als bij herhaald draaien aan het rad, als er maar genoeg planeten zijn – en die zijn er – dan is de kans op uiteindelijk succes, dus op leven op ten minste één andere planeet, heel groot, in feite eigenlijk gewoon 1, ofwel 100% kans op buitenaards leven.

## Een eenvoudig kansmodel

Tja, wat zegt zijn ‘briljante combinatie van feitelijke informatie en kansberekening’ nu over leven op een andere planeet? Het antwoord op die laatste vraag is in twee woorden af te doen: absoluut niets. Het is een mooi staaltje van onzinnig gebruik van kansrekening.

Allereerst zijn er veel redenen om ernstig te twijfelen aan het realiteitsgehalte van zijn aannames en dus ook aan zijn model. Afhankelijkheid van het ontstaan van leven op verschillende planeten lijkt een uitgemaakte zaak, zeker gezien het feit dat er redenen zijn om aan te nemen, of tenminste niet uit te sluiten, dat het leven op aarde van buiten de aarde afkomstig is. Ook de aanname dat de kans op leven 0,00000000000005 zou zijn, is geheel zonder enig realiteitsbesef.

Deze bedenkingen hebben betrekking op de keuze van het model. Ik heb echter nog andere bedenkingen die voor mij veel zwaarder wegen. Men moet goed beseffen wat er in feite gebeurt. Aczel construeert een nogal simplistisch theoretisch model dat het ontstaan van leven in het universum zou moeten beschrijven. Alle conclusies die hij daarna trekt, zijn zonder meer waar in het theoretisch model dat hij net heeft gemaakt. Om vervolgens deze conclusies dan zonder pardon over te nemen voor de realiteit is niets minder dan absurd. Immers, de conclusie was gebaseerd op een model waarin de mogelijkheid op leven op een andere planeet inderdaad een grote kans heeft. Maar ja, dat zegt meer over het model dan over de realiteit. In dit geval is eenvoudigweg niet na te gaan of het model enige realiteitswaarde heeft.

Dit is een heel serieus punt. Aangezien de kansrekening zich per definitie met modellen bezighoudt, lijkt dit argument wel zo'n beetje de doodsteek voor het vak. Dat is echter gelukkig niet zo en ik zal uitleggen waarom.

Eerst echter nog een tweede voorbeeld.

## Een bijna ontplofte koorrepetitie

Op 1 maart 1950 kwamen alle vijftien leden van een kerkkoor ergens in de Verenigde Staten te laat op de repetitie. De redenen waren zeer uiteenlopend en hadden niets met elkaar te maken. De één slaagde er niet in zijn auto te starten, de ander had zich verslapen, nog een ander wilde eerst een interessant radioprogramma afluisteren, et cetera. Vijf minuten nadat het koor met de repetitie had moeten beginnen, werd het kerkgebouw door een gasexplosie volledig verwoest. Door een zeer opmerkelijke samenloop van omstandigheden was er nu niemand in de kerk aanwezig tijdens de explosie.

Hoe bijzonder was deze gebeurtenis nu eigenlijk? Wellicht vindt u de volgende redenering heel overtuigend: de kans op deze specifieke gebeurtenis was natuurlijk extreem klein. Maar ja, er zijn zo vreselijk veel onwaarschijnlijke dingen die toevallig kunnen gebeuren, het moet wel heel gek gaan wil een dergelijke gebeurtenis

niét af en toe plaatsvinden. Het is eigenlijk net als bij het rad van avontuur: de kans om te winnen was klein, maar af en toe gebeurt het toch. Dit lijkt een goed argument, maar dat is het helemaal niet. Als je van deze opvallende toevalligheden zegt dat zoiets volgens de kansrekening nu eenmaal eens in de zoveel tijd zal gebeuren, dan geldt deze conclusie alleen maar voor de theoretische situatie die op basis van de werkelijke situatie is geconstrueerd. Dus eerst constateer je dat er iets opmerkelijks is gebeurd en vervolgens maak je een model waarin die opmerkelijke gebeurtenis kan optreden en waarop de kans wellicht zelfs berekend kan worden. Het verbazingwekkende van zo'n gebeurtenis lijkt dan onschadelijk gemaakt. Echter, je vergeet dan dat die conclusie is gebaseerd op het luchtkasteel dat je zelf hebt gebouwd: het wiskundig model. De situatie is precies dezelfde als bij het voorbeeld over buitenaards leven. In beide gevallen wordt een conclusie die gebaseerd is op een model, zonder pardon overgeheveld naar de realiteit, en dat kan niet zomaar.

We zien dus dat er een duidelijk verschil is tussen de natuur van zogenaamd toevallige verschijnselen enerzijds en de modellering daarvan anderzijds.

## Bestaat toeval?

Niemand weet wat we met het woord toeval precies bedoelen. Bestaat toeval eigenlijk wel? Dit is een vraag waar filosofen, wiskundigen, theologen, biologen, natuurkundigen en vele anderen zich al heel lang mee bezig houden.

Een wetenschappelijke benadering van de vraag of toeval bestaat, vereist dat we toeval uiteindelijk werkbaar definiëren. En dat lukt niet. Probeer het maar eens. Wellicht iets als ‘twee gebeurtenissen die optreden en waartussen geen causaal verband bestaat’? Een redelijke poging, maar hoe zou je dat moeten nagaan, want wanneer is er sprake van causaal verband? Met een dergelijke definitie kunnen we nooit beslissen of een bepaalde gebeurtenis toevallig is of niet. Of je nu materialist, theïst, atheïst, christen, humanist of wat dan ook bent, niemand kan beweren dat hij of zij begrijpt hoe deze wereld werkelijk in elkaar steekt. Wat de één blind toeval noemt, noemt de ander de hand van God, en waar de één toeval ziet als bewijs van een goddeloos universum, ziet een ander toevallige gebeurtenissen juist als manifestaties van het Goddelijke. Daar komen we niet uit. Dit is trouwens in overeenstemming met de moderne kwantumtheorie. Deze stelt duidelijk dat de vraag of toekomstige ontwikkelingen toevallig of deterministisch zijn, empirisch onbeslisbaar is. En dus is elke uitspraak die het bestaan van toevallige gebeurtenissen erkent of verwerpt in beginsel een geloofsuitspraak en is de vraag of toeval bestaat een vraag zonder antwoord.

Binnen het abstracte raamwerk van de wiskunde zijn kansen op gebeurtenissen daarentegen wél goed gedefinieerd. Als een gebeurtenis met een heel kleine kans toch

optreedt in de wiskunde, dan kunnen we met enig recht zeggen dat dat toeval is. Elke wiskundige met enige kans-theoretische kennis weet precies wat we daarmee bedoelen. De formele opzet van de kansrekening, die de Russische wiskundige Kolmogorov aan het begin van de twintigste eeuw formuleerde, geldt als een van de hoogtepunten uit de wiskundegeschiedenis.

Als wiskundige kun je dus zeker werken in wiskundige modellen waarin toeval een rol speelt. Daarbij vervangen we onze dagelijkse onzekerheden door wiskundige kansen. Wanneer wij over toeval praten, hebben we in feite een wiskundig kader voor ogen. Denk maar aan het rad van fortuin. Voor we aan het rad draaien, hebben we het draaien al gemodelleerd, en de uitspraak dat de succeskans  $1/100$  is, is een uitspraak binnen dat model. En als we de gebeurtenis met het kerkkoor niet bijzonder noemen, dan doen we dat ook binnen het model dat we voor deze gelegenheid in gedachten hebben.

## De rol van de kansrekening

Het begrip toeval blijft dus in nevelen gehuld. Wat is dan nu eigenlijk precies de rol van de kansrekening? Gezien onze problemen met het begrip toeval in het algemeen, kunnen we moeilijk gaan beweren dat de kansrekening toevallige verschijnselen modelleert en die modellen analyseert. Het belang van de kansrekening hangt helemaal niet af van de vraag of bepaalde verschijnselen werkelijk toevallig zijn of niet, wat dat ook moge betekenen, en ook niet van de vraag of toeval bestaat. De kansrekening heeft namelijk een heel andere functie. Kansrekening wordt belangrijk als vanwege de grote complexiteit een exacte beschrijving niet meer mogelijk is. De kansrekening is in staat het zeer complexe gedrag van systemen samen te vatten in een aantal simpele wetten en kan op die manier een anderszins onoverzichtelijke chaos enigszins hanteerbaar maken. Dus met een model kan de kansrekening voorspellen dat de fractie tweeën bij herhaald gooien met een dobbelsteen ongeveer  $1/6$  zal zijn. Kansrekening kan echter niet vertellen waarom dat zo is. Kansrekening beschrijft, maar verklaart niet.

Dat klinkt mooi, maar wanneer is dat zinvol? De poging van Aczel om met behulp van kansrekening leven buiten de aarde te bestuderen, leek bijvoorbeeld niet zo zinvol. Een precies antwoord op deze vraag is moeilijk te geven, maar het voorgaande maakt wel duidelijk in welke richting we kunnen zoeken. Een kans-theoretisch model wordt zinvol als het zichzelf kan bewijzen. Dat klinkt pragmatisch en dat is het ook. Kansrekening is zinvol als het werkt. Dat kun je niet nagaan als het model iets eenmaligs modelleert. Een kansuitspraak over iets eenmaligs heeft dan ook geen werkbare betekenis. Het probleem bij Aczel en zijn bewijs voor buitenaards leven is onder meer het feit dat hij een kans toekent aan het ontstaan van leven op aarde. Dat heeft dus geen zin. Het zou een bepaalde zin kunnen krijgen als we andere planeten konden inspecteren. We zouden dan de fractie planeten kunnen tellen

waar leven ontstaan is en die fractie zouden we dan de kans op leven kunnen noemen. Maar dit zou alleen zinvol zijn bij gratie van het feit dat we dan vele planeten tegelijkertijd bekijken. Over een specifieke planeet, de onze bijvoorbeeld, kun je dan nog steeds geen zinvolle uitspraak doen.

Zijn kansuitspraken van de weerman zinvol? Je kunt hier niet zonder meer nee op antwoorden. Een probleem is wel dat je nooit precies weet wat hij bedoelt wanneer hij zegt dat de regenkans morgen 30% is. De kans op regen blijkt nooit lager dan 10% te zijn, hetgeen moeilijk te rijmen valt met het klimatologische gemiddelde van ongeveer 12%. Maar je zou wel een bepaalde betekenis kunnen zien als de weerman een model gebruikt dat zichzelf heeft bewezen.

## Toeval of determinisme?

We kunnen de pragmatische benadering van zojuist ook op een andere manier bekijken. De dualiteit tussen toeval en determinisme laat zich wellicht vergelijken met de beroemde dualiteit bij het modelleren van lichtverschijnselen. Eerst dacht men dat licht een deeltjesverschijnsel was, vanwege bepaalde eigenschappen die door een deeltjesmodel mooi verklaard worden. Maar andere verschijnselen lijken juist weer beter verklaarbaar als we licht als een golfverschijnsel opvatten.

De moeilijkheid zit hier in het woord 'verklaarbaar'. Verklaarbaar betekent gewoon dat het model verschijnselen suggereert die in de realiteit inderdaad worden waargenomen. Met licht hebben we dus een probleem, en ik vermoed dat we met toeval een gelijksoortig probleem hebben. Om bepaalde verschijnselen te beschrijven heb je wellicht in sommige gevallen een kansmodel nodig, maar in andere gevallen kan je misschien beter een deterministisch model gebruiken. Er is inderdaad sprake van enig pragmatisme. Enigszins gechargeerd kun je ook hier misschien zeggen dat je dat model kiest dat jou op dat moment het beste uitkomt.

Een eenvoudig voorbeeld uit de populatiedynamica verheldert dit misschien. In dit vakgebied van de wiskundige biologie wordt nagegaan hoe bepaalde populaties zich ontwikkelen. Welnu, soms lijkt het verstandig, handig, nuttig of gewoon gevoelsmatig correct om het model zo te kiezen, dat een individu in de populatie met een bepaalde kans een bepaald aantal nakomelingen krijgt. Dan introduceer je dus toeval. Soms echter lijkt het beter om de ontwikkeling van de populatie te beschrijven met behulp van een differentiaalvergelijking, die simpelweg voorschrijft hoe de populatie zich globaal zal ontwikkelen, op een deterministische manier. Afhankelijk van wat je wilt beschrijven of bereiken, kies je voor een bepaalde benadering. De twee benaderingen kunnen overigens ook heel goed gecombineerd worden. Er ontstaat dan een model waarin sommige aspecten toevallig genoemd worden en andere deterministisch.

## De evolutie

Laten we eens, gewapend met het hierboven ontwikkelde beeld van kansrekening, kijken wat dat beeld oplevert bij het verschijnsel biologische evolutie. Dat verschijnsel is weliswaar niet direct onderdeel van het dagelijks leven, maar de meeste mensen hebben er toch wel een persoonlijk beeld van. Het gaat niet over de vraag óf de evolutie heeft plaatsgevonden. Afgezien van de voornamelijk Amerikaanse creationisten is iedereen het daar wel over eens. Het gaat om de vraag hóe de evolutie tot stand is gekomen, door blind toeval – wat dat ook moge zijn – of een sturende kracht. Alle partijen in dit debat maken op de een of andere manier gebruik van kanstheoretische argumenten.

Eerst zullen twee min of meer klassieke standpunten de revue passeren. Het eerste standpunt wordt verdedigd door onder meer de Engelse theoloog en filosoof Keith Ward. Zijn argument ziet er ruwweg als volgt uit. Laten we eerst aannemen dat God niet bestaat. Dan is de kans op de achter ons liggende evolutie heel klein. Er zijn zo veel gebeurtenissen die dan toevallig plaats hebben moeten vinden, het is niet erg aannemelijk dat dat mogelijk zou zijn. Als we daarentegen aannemen dat er wél een God bestaat, dan wordt de evolutie veel aannemelijker. God kan deze immers sturen naar zijn wil. De conclusie is dat het dus aannemelijker is dat God bestaat dan dat hij niet bestaat.

Het tweede standpunt is het materialistische standpunt. Dit standpunt behelst de idee dat evolutie optreedt door volslagen toevallige veranderingen, mutaties genoemd, waarbij sommige mutaties overleven door natuurlijke selectie. Die veranderingen zijn natuurlijk uiterst zeldzaam. Maar in de woorden van Nobelprijswinnaar en bioloog George Wald, een van de bekendste hedendaagse verdedigers van dit standpunt: 'Als je maar lang genoeg de tijd hebt, dan wordt het onmogelijke mogelijk, het onwaarschijnlijke waarschijnlijk en het waarschijnlijke zeker'.

Het zal inmiddels duidelijk zijn dat in onze opvatting van kans geen van beide standpunten hout snijdt. In beide wordt namelijk een wiskundig model gebruikt om een conclusie over de realiteit te trekken. Keith Ward lijkt te suggereren dat eenmalige verschijnselen met kanstheoretische argumenten benaderd kunnen worden, en George Wald trapt in dezelfde valkuil als Aczel.

Zoals te verwachten zullen we geen van deze standpunten

onderschrijven. De oorsprong van het menselijk leven zal wel in nevelen gehuld blijven. Toch kan de kansrekening wel een rol spelen als het gaat om evolutie. Deze rol is geheel overeenkomstig de rol van de kansrekening zoals zojuist is beschreven. Kansrekening verklaart niet, maar beschrijft. In de evolutie is het een komen en gaan van soorten. Er zijn vele redenen om aan te nemen dat de evolutie niet in een min of meer constant tempo heeft plaatsgevonden, zoals bijvoorbeeld Darwin dacht. Eerder lijkt het allemaal zeer schoksgewijs tot stand te zijn gekomen, in een opeenvolging van erupties. Het lijkt erop dat er veel kleine erupties geweest zijn waar slechts relatief weinig soorten verdwenen en werden gevormd. Ook zijn er enkele gigantische erupties geweest. In de grootste daarvan is in één klap 96% van de soorten uitgestorven. Het verband tussen de grootte van een eruptie en de frequentie ervan in de geschiedenis is heel speciaal, en we kunnen proberen dit bijzondere gedrag te beschrijven met deterministische of kanstheoretische modellen.

Nu is het aardige dat recente ontwikkelingen in de theoretische natuurkunde tot kanstheoretische modellen hebben geleid die precies dit gedrag vertonen. De eerste eenvoudige kanstheoretische modellen die evolutionair gedrag lijken te vertonen, zijn dan ook inmiddels geformuleerd. Tot nu toe is er voornamelijk gesimuleerd en theoretische resultaten zijn er nog nauwelijks. Bij de theoretische ontwikkeling van dit nieuwe vakgebied staat de kansrekening centraal.

## Conclusies

We hebben gezien dat de rol van de kansrekening weinig met het begrip toeval te maken heeft, maar des te meer met de keuze van het model dat je kiest om een bepaald fenomeen te beschrijven. Toeval zal nooit een verklarende factor kunnen zijn, aangezien we niet weten wat toeval is. Kansrekening is, mits zorgvuldig gebruikt, een machtig hulpmiddel bij zeer uiteenlopend wetenschappelijk onderzoek. Bij het gebruik van kanstheoretische modellen moet altijd bekeken worden of het model in de specifieke situatie relevant is. Uiteindelijk is kansrekening zinvol als het werkt.

*Ronald Meester, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht en Divisie Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit, Amsterdam*

## Historische kring reken- en wiskunde onderwijs Symposium 2001

Het zevende symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs (HKRWO) heeft als onderwerp *Akten en Bevoegdheden. Het ontstaan van het beroep van reken- en wiskundeleraar in Nederland (1800-*

*2000)* en vindt plaats op 26 mei 2001 in de Hogeschool Domstad te Utrecht.

In het maartnummer 2001 van de *Nieuwe Wiskrant* vindt u nadere bijzonderheden. Noteert u alvast de datum.