

Welke basisvaardigheden mogen verwacht worden van eerstejaarsstudenten bedrijfswiskunde en informatica? En beheersen ze die ook? **Wim Groen** zet op een rij waar men tegenaan loopt op de Vrije Universiteit in Amsterdam.

Parate wiskundekennis en rekenvaardigheid

Een instaptoets voor wiskunde

In eerstejaarscolleges wiskunde komen soms merkwaardige communicatiestoringen voor. De docent vervangt

$$\frac{2}{3^{-2}} \text{ door } 18$$

en merkt dat een aantal studenten zorgelijk blijft kijken. Navraag leert dat het probleem zit in het gebruik van simpele rekenregels voor exponenten en machten.

Omdat we proberen zo goed mogelijk aan te sluiten bij wat de instromende studenten kennen en kunnen, leek het ons goed voor het begin van de rit na te gaan welke wiskundige basisvaardigheden de studenten wel en welke ze niet hebben.

Zo ontstond een aantal jaren geleden het idee van de *instaptoets*, een toets die werd afgenomen voordat de colleges begonnen en waarin werd gepeild wat de aankomende student aan parate kennis van de VWO-wiskunde meebracht. Wie voor deze toets een lage score had (minder dan 70%) kon, buiten de gewone colleges om, hulplessen volgen om de lacunes in het gebruik van basisvaardigheden van wiskunde B op te vullen. Zowel de toets als de lessen waren bedoeld als service aan de student, waren niet verplicht en leverden dus ook geen studiepunt op.

In die hulplessen probeerden we duidelijk te maken dat je niet bij elke stap moet terugvallen op de rekenmachine, dat je ook voor wiskunde een hoeveelheid parate kennis moet hebben en dat je een aantal dingen op de automatische piloot moet kunnen uitvoeren. En een aantal regels en verbanden moet je zonder tabellen of naslagwerken kunnen gebruiken. We vonden en vinden bijvoorbeeld dat de opgave 'gegeven $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; bereken $\cos \alpha$ ' niet moet worden opgelost door op de rekenmachine via de knop \sin^{-1} eerst α te bepalen en dan vervolgens met de knop \cos de waarde van $\cos \alpha$ te vinden.

Ook vinden we dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

niet moet worden uitgerekend door met de rekenmachine functiewaarden in de buurt van $x = 0$ te bepalen en daarna

te gokken dat het antwoord wel $\frac{2}{3}$ moet zijn.

Uiteraard beschouwen ook wij $\frac{2}{3}$ de (grafische) rekenmachine als een zeer nuttig hulpmiddel, maar het mag niet zo zijn dat je zonder de machine volstrekt hulpeloos bent.

Dit jaar hebben we voor het eerst de instaptoets een officieel tintje gegeven; voor de studierichtingen informatica en BWI (bedrijfswiskunde en informatica) werd de toets verplicht. Wie ervoor slaagde, kreeg direct 1 studiepunt; wie een onvoldoende had, kreeg gedurende drie weken vier hulplessen per week en kon daarna nogmaals een (bijna identieke) toets afleggen.

We hebben de studenten bij de introductie (twee weken voor de toetsdatum) mondeling en schriftelijk ervan op de hoogte gesteld dat de toets zou worden afgenomen en welke onderwerpen zouden worden getoetst. Ook werd vermeld dat de rekenmachine niet gebruikt zou mogen worden. Bij elk domein waren één of meer voorbeeldopgaven gegeven. Hieronder staan enkele fragmenten uit het aan de studenten uitgereikte informatieblad.

Wat getoetst wordt

A. Algemene rekenvaardigheden

(optellen en vermenigvuldigen van breuken; rekenregels voor machten, wortels en logaritmen)

Voorbeelden:

- Schrijf als één breuk:

$$\frac{p}{ab} + \frac{a}{p} - \frac{q}{a^2}$$

- Vereenvoudig: $\ln a^2 - \ln ab + \ln b^4$

- Schrijf zonder worteltekens:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

B. Vergelijkingen en ongelijkheden

(oplossen van eerstegraads en tweedegraads vergelijkingen en ongelijkheden, omgaan met absolute strepen).

Voorbeelden:

- Los op: $\frac{3x-1}{x+2} > 4$;
 $|3-4x| = 6$.

C. Differentiëren

(de afgeleide kennen van standaardfuncties, rekenregels voor het differentiëren, de definitie van de afgeleide van een functie in een gegeven punt)

Voorbeelden:

- Bereken de afgeleide van de functie

$$f(x) = \sin 2x + 3^{\cos x} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

- Bereken:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$$

D. Integreren

(de primitieven kennen van standaardfuncties en die kunnen gebruiken, de oppervlakte tussen twee grafieken kunnen berekenen)

Voorbeelden:

- Bereken een primitieve van

$$f(x) = x + \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \sin 2x$$

- Bereken de oppervlakte van het eindige gebied tussen de grafieken van $f(x) = x$ en $g(x) = x(x-3)$.

E. Standaardlimieten

($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ en $\lim_{x \downarrow 0} x \cdot \ln x$ kunnen gebruiken in eenvoudige limietberekeningen)

Voorbeeld:

- Bereken:
 $\lim_{x \downarrow 0} \sqrt{x} \cdot \ln 3x$

F. Goniometrie

(de sinus en de cosinus in de eenheidscirkel; de relaties $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ en $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$)

Voorbeeld:

- Toon aan dat:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1.$$

Resultaten van de toets

De toets werd afgenomen op 5 september en bevatte 26 kort-antwoord-vragen. Alleen dat antwoord moest worden opgeschreven en werd beoordeeld. De toegestane werktijd was twee klokuren.

Wie alles goed had, kreeg een score van 26 punten. Omdat we meenden dat het ging om elementaire kennis en vaardigheden, legden we vooraf de lat tamelijk hoog: een score van 19 of hoger (ruim 70% dus) zou voldoende zijn. Toen we het werk hadden bekeken, verlaagden we die grens naar 16 (ruim 60%).

Van de 98 aankomende informatici haalden er 28 een voldoende; van de 38 aankomende studenten BW1 haalden er 16 een voldoende. Het slagingspercentage was dus 32. Om een beeld te geven van de vragen en de voor die vragen behaalde score, volgen hier per genoemd leerstofdoel de vraag met de hoogste en de vraag met de laagste score (de p -waarde van de opgave geeft de fractie goede antwoorden op die opgave in de totale populatie).

Domein	Opgave	p -waarde
A	Schrijf als één breuk $\frac{a}{a+2} + \frac{a-3}{a}$	0,74
A	Vereenvoudig zo veel mogelijk: $\ln(6e^5) - \ln 2 - \ln 3$	0,25
B	Los op: $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-3}{x+3}$	0,71
B	Los op: $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$	0,54
C	Differentieer: $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$	0,85
C	Differentieer: $f(x) = e^{2x} + 2^{2e} + 3^{4x}$	0,36
D	Bereken een primitieve van: $f(x) = x \cdot e^{x^2}$	0,67
D	Bereken: $\int_1^t \left(\frac{1}{x} + 2x + 2^x\right) dx$ ($t > 0$)	0,28
E	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$	0,68
E	Gegeven is de functie $f(x) = 3 \sin x + e^{\cos x}$. Bereken: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h}$	0,18
F	Laat zien dat voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$ geldt $\left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) \cdot (1 - \cos^2 x) = 1$	0,47
F	Gegeven is dat $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ en dat $\cos \alpha = \frac{-12}{13}$. Bereken $\sin \alpha$.	0,21

Men kan zich voorstellen dat we een slagingspercentage

van 32 nogal teleurstellend vonden. We spraken elkaar moed in met de veronderstelling dat dit matige resultaat wel eens het gevolg zou kunnen zijn van een lange en uitbundige vakantie. ‘Ze kunnen het natuurlijk wel, maar ze zijn het nu even kwijt. Met een korte opfriscursus zal het leed wel geleden zijn’. Moedig begonnen we aan die opfriscursus. Een maand later zaten er 90 deelnemers aan een toets met vragen die als twee druppels water leken op de vragen van de eerste toets. Ook toen legden we de grens voor een voldoende bij een score van 16 uit de 26. Het aantal geslaagden was 51. Er waren dus nog steeds bijna 40 studenten die geen voldoende hadden. Bij een herkansing in november slaagden er alsnog 15.

Hoe nu verder?

Om wiskunde of informatica te kunnen studeren, moet je wiskunde B (en straks wiskunde B1,2) in je pakket hebben. Bij de opbouw van eerstejaarsvakken als Calculus gaan we uit van de kennis van wiskunde B. Via de publicaties over de aanpassingen van de VWO-programma’s en recente schoolboeken proberen we zo goed mogelijk bij de ontwikkelingen in het VWO aan te sluiten. Toch gaven tijdens de opfriscursus nogal wat leerlingen te kennen dingen voor het eerst te zien (de rol van de eenheidscirkel bij de goniometrische functies, operaties met limieten, gebruik van de ln-functie). Vragen we te veel? Leggen we de verkeerde accenten door te willen dat elementaire operaties ook zonder rekenmachine kunnen worden uit-

gevoerd? Moeten we ervan uitgaan dat voortaan $e^{\ln 3a}$ alleen via intoetsen op de rekenmachine tot $3a$ kan worden vereenvoudigd? Maar je kunt toch niet voor elke handeling naar de rekenmachine grijpen! En welke parate kennis mogen we dan wel verwachten?

Het is natuurlijk niet goed nieuwe hulpmiddelen uit het onderwijs te weren. Maar als het gebruik ervan een totale afhankelijkheid van die hulpmiddelen tot gevolg heeft, dreigt er toch iets mis te gaan. Over niet al te lange tijd zullen ook Maple of Derive tot de standaardbagage van de VWO-scholier behoren. De beschikbaarheid van die programma’s zal waarschijnlijk een verdere afkalving van het standaardrepertoire van de leerling tot gevolg hebben. Ons lijkt dat niet zo gewenst, maar misschien is dat een standpunt dat hoort bij een achterhoedegevecht. Of moeten we de eis om wiskunde B1,2 te hebben gevolgd om zekere vakken te kunnen studeren gewoon afschaffen, zodat we voor elke academische studie de nodige wiskunde van de grond af moeten/kunnen opbouwen?

Graag ontvangen we hierover reacties van wiskundeleraars en andere belangstellenden; ook wie de gehele toets wil ontvangen, kan reageren.

Postadres: W.E. Groen, FEW van de VU, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam; e-mail: groen@cs.vu.nl.

W.E. Groen, Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, Amsterdam

Historische kring reken- en wiskunde onderwijs Symposium 2001

Het zevende symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs (HKRWO) heeft als onderwerp *Akten en Bevoegdheden. Het ontstaan van het beroep van reken- en wiskundeleraar in Nederland (1800-2000)*.

Datum: 26 mei 2001

Plaats: Hogeschool Domstad te Utrecht
Koningsbergerstraat 9

Tijd: 10.15-16.00 uur

Programma

- *Het vak rekenen in de opleiding aan de kweekscholen, normaalscholen en PA's (1800-2000)*
Fred Goffree
- *De opleiding tot wiskundeleraar in het Voortgezet Onderwijs (1863-1958)*
Klaske Blom
- *De opleiding tot wiskundeleraar in het Voortgezet Onderwijs (1958-heden)*
Sieb Kemme

- *Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs in Westeuropa in vergleichender Perspektive*
Gert Schubring, Bielefeld

Verder posterpresentaties en tentoonstelling van oude boeken en dergelijke.

Deelname door overmaking van f 35,- op giro 4657326 t.n.v. HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen).

Inlichtingen bij E. de Moor: tel. 020-6121382 of 030-2611611.

Het symposium wordt mede mogelijk gemaakt door subsidies van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars (NVWV), de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) en ondersteuning van het Freudenthal Instituut (FI).