

Er is een toenemende behoefte om het (wiskunde)onderwijs in verschillende landen met elkaar te vergelijken. De OECD is opdrachtgever van het internationale project PISA, dat zich richt op onderwijs aan vijftienjarigen. **Kees Lagerwaard** en **Gerben van Lent** beschrijven de stand van zaken.

## Wat moet je met wiskunde als je 15 bent?!

### PISA 2003 geeft het antwoord

#### de Ombudsman

Theo Klein

De meeste klachten gaan niet over journalistieke onderwerpen, maar over slordigheden en domme uitglijders. Behalve bijschriften scoren foute rekensommen, spel- en schrijffouten en verkeerde koppen hoog. Het lijken vaak ondergeschikte punten, maar ze ondermijnen sluipenderwijs het vertrouwen van de lezer in de krant. Een willekeurige greep uit het aanbod van de laatste weken. De tanker die voor Bretagne zinkt, ligt volgens de Volkskrant op 60 kilometer diepte. Nederland zou binnen 50 jaar een rampzalige 20 duizend kubieke meter water extra moeten verwerken. Elf procent van 2650 zwarte neushoorns is 450 zwarte neushoorns.

Bron: de Volkskrant

Zouden de fouten uw vijftienjarige leerlingen van VMBO tot VWO zijn opgevallen en waren ze in staat geweest hierover een brief naar de Volkskrant te schrijven?

Daar is *Number sense* voor nodig en communicatieve vaardigheid. Dit zijn onderdelen van het wiskunde *framework* dat een expertgroep van wiskundigen uit de OECD landen voor het project PISA 2003 heeft geschreven. In dat framework beschrijft deze groep deskundigen wat de belangrijkste aspecten zijn van wiskundeonderwijs voor alle vijftienjarigen.

### Wat is PISA

PISA staat voor *Programme for International Student Assessment*. De opdrachtgever van het project is de Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling (vaak afgekort tot OESO, maar meestal OECD genoemd). De OECD verzorgt voor haar 29 lidstaten een publicatie, *Education at a Glance*. Dit rapport vergelijkt hoeveel er in deze landen in onderwijs geïnvesteerd wordt en rapporteert ook over het rendement van dat onderwijs. De publicatie drukt de bevindingen daarover uit in indicatoren. PISA levert de 'Outcome Indicators', cijfers die laten

zien wat leerlingen in een zeker domein zich aan vaardigheden hebben eigen gemaakt en hoe dat samenhangt met de omstandigheden waarin ze verkeren, hun gewoonten en het onderwijs dat ze genieten.

De domeinen waarin de vaardigheden van de leerlingen gemeten en vergeleken worden zijn Lezen, Natuurwetenschappen (Science) en Wiskunde. Omdat er in de OECD-landen tot en met vijftien jaar leerplicht is, worden de toetsen voorgelegd aan vijftienjarigen.

Vorig jaar was de eerste cyclus van PISA. Leesvaardigheid was daarbij het hoofdonderwerp. Voor wiskunde en science was slechts een bijrol weggelegd. Deelnemende leerlingen kregen een toets van twee uur voorgelegd. Doordat er een aantal verschillende toetsboekjes was gemaakt, konden er enkele honderden vragen worden gesteld. Iets meer dan dertig van die vragen gingen over wiskunde.

In PISA 2003 is wiskunde het hoofdonderwerp. Om te kunnen vaststellen of er vanaf 2000 veranderingen zijn opgetreden, wordt een aantal vragen uit PISA 2000 in 2003 opnieuw afgenomen. Die vragen mogen daarom nu nog niet worden gepubliceerd. U zult begrijpen dat we de allermooiste opgaven dus niet in dit artikel mogen tonen. Maar de voorbeelden van PISA-opgaven in dit artikel geven wel een goed beeld van de wiskundige vaardigheden die bij PISA belangrijk worden geacht.

### Wat is volgens PISA relevante wiskunde

#### *Mathematical Literacy*

De definitie van *Mathematical Literacy* luidt: iemands vermogen om de rol die wiskunde in de wereld speelt te herkennen en te begrijpen, in staat te zijn om gefundeerde beoordelingen te maken en wiskunde aan te wenden op een manier die nodig is om te kunnen functioneren als een betrokken, opbouwend en kritisch wereldburger.

In de moderne wereld worden burgers steeds vaker geconfronteerd met zaken die aspecten van gecijferdheid, kans en onzekerheid, ruimtelijke aspecten en functionele en relationele aspecten bevatten. Elke dag, om maar een

voorbeeld te geven, staan er in kranten talloze tabellen en grafieken, pictogrammen, berekeningen, met cijfers onderbouwde argumentaties en ga zo maar door. Worden toekomstige volwassenen voorbereid om hiermee te kunnen omgaan, om drogredeneringen van ware redeneringen te onderscheiden, om effecten te kunnen inschatten, om gegevens te extrapoleren en resultaten te veralgemeniseren?

Niet alleen bij wereldomvattende thema's als het broeikaseffect, verstedelijking en milieuvervuiling wordt steeds meer een beroep gedaan op *Mathematical Literacy*. Ook dichterbij huis is het van belang greep te hebben op zaken als het beoordelen van tekeningen voor een huis, bestemmingsplannen, omgaan met geld, beleggen, enzovoort.

PISA probeert de stand van zaken bij vijftienjarigen te meten. Ze concentreert zich daarbij niet in eerste instantie op de kennis en vaardigheden zoals die in wiskunde curricula overal ter wereld zijn beschreven, maar op de functionaliteit van die wiskunde in de hedendaagse en toekomstige samenleving.

Om een heldere beschrijving te krijgen in het *framework* is het domein langs drie lijnen georganiseerd: Contexten, Inhoud en Processen.

### Contexten

Het ligt voor de hand dat veel van de opgaven die in het kader van PISA worden gebruikt, uitgaan van een realistische setting. Of het nu gaat om de opdracht zelf of de context waarin vragen gesteld worden, vaak zal de werkelijkheid een grote rol spelen. Het vergt niet al te veel voorstellingsvermogen om in te zien dat de contexten als het ware op afstand tot het individu kunnen worden geordend. Dichtbij is de alledaagse omgeving, dan komt de schoolomgeving en de werkomgeving, gevolgd door het publieke domein en de wetenschappelijke omgeving. Ook vragen in een wiskundige context komen aan de orde, als het maar gaat om hoe wiskunde gebruikt wordt.

### Inhoud

Je zou verwachten dat de wiskundige inhoud van de PISA-toets rechtstreeks afgeleid is van de gangbare manier waarop wiskunde onderwezen wordt en van curriculum-inhoud. Dat is bijvoorbeeld bij TIMSS het geval. PISA kiest echter een ander uitgangspunt. Conform de definitie van *Mathematical Literacy* is gekozen voor vier brede aandachtsgebieden. In het dagelijks leven manifesteert wiskunde zich niet als onderdeeljes uit een curriculum, maar als concrete problemen waarbij wiskundige kennis en vaardigheden in samenhang nodig zijn.

De vier aandachtsgebieden zijn *Quantity*, *Space and Shape*, *Change and Relationships* en *Uncertainty*. Het signaleren van fouten in het citaat aan het begin van dit artikel hoort thuis in *Quantity*. Een voorbeeld vanuit *Uncertainty* is het kunnen becommentariëren van het volgende voorbeeld:

In 1975 vroeg Ann Lauders aan haar lezers: 'Als u het leven overnieuw zou mogen doen, nam u dan weer kinderen?' 10000 mensen antwoordden, van wie 70% zei: NEE. Een landelijke representatieve steekproef over dezelfde vraag leverde als resultaat dat 90% opnieuw voor kinderen zou kiezen.

Verderop zullen we meer voorbeelden geven.

### Processen

In PISA wordt onderzocht in hoeverre vijftienjarigen in staat zijn wiskundige problemen te formuleren en op te lossen door op effectieve wijze wiskundige noties te analyseren, te beredeneren en te communiceren. In meer gewone taal levert dat het volgende proces op dat wel *mathematiseren*<sup>1</sup> wordt genoemd.

Uitgangspunt is een probleem uit de werkelijkheid. Dit wordt getransformeerd naar een probleem in een wiskundige omgeving. De leerling moet de relevante wiskunde herkennen en de informatie organiseren, simplificeren en zonedig generaliseren, zodat een helder wiskundig probleem ontstaat. Daarna kan het probleem opgelost worden. De laatste stap is het terugvertalen van het resultaat naar het oorspronkelijke probleem. Hierbij komt ook reflectie op de gekozen aanpak aan de orde.

Een en ander is weergegeven in onderstaande figuur<sup>2</sup>.

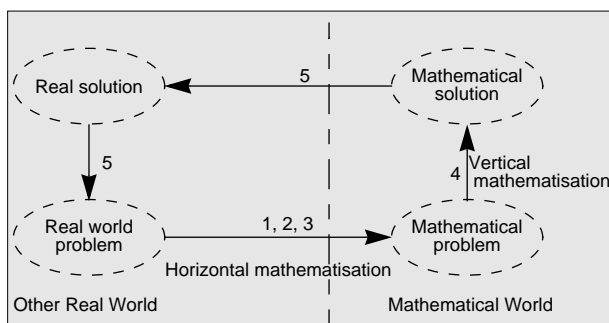


fig. 1 The Mathematisation Cycle

1. Starting with a problem situated in reality
2. Organising it according to mathematical concepts and identifying the relevant mathematics
3. Gradually trimming away the reality through processes such as making assumptions, generalising and formalising (which promote the mathematical features of the situation and transform the real problem into a mathematical problem that faithfully represents the situation)
4. Solving the mathematical problem and
5. Making sense of the mathematical solution in terms of the real situation.

Natuurlijk gaat het in veel vragen slechts om deelaspecten. Als bij een toets in dertig minuten meer dan tien vragen moeten worden beantwoord, kan natuurlijk niet bij elke vraag de hele cyclus doorlopen worden.

## Voorbeeldopgaven

In PISA 2000 is er bij wiskunde voor gekozen om slechts vragen te maken bij Space and Shape en bij Change and Growth<sup>3</sup>. Onderstaande opgaven hebben dan ook uitsluitend betrekking op deze twee onderwerpen. In PISA wordt gebruik gemaakt van drie vraagtypen: meerkeuze, kort-antwoord en lang-antwoord.

### Voorbeeld 1

De context is wetenschap. Een wat ongebruikelijke presentatie van een periodiek verschijnsel. Essentieel voor het oplossen van dit probleem is het goed hanteren van de periodiciteit. De benodigde wiskundige techniek is elementair. Deze opgave hoort thuis bij Change and Relationships.

#### Het slapen van een zeehond

Een zeehond moet op gezette tijden ademhalen, zelfs als hij slaapt in het water. Martin bestudeerde het gedrag van de zeehond gedurende een uur. Aan het begin van die periode zwom de zeehond aan de oppervlakte en haalde adem. Toen zakte hij in 3 minuten naar de zeebodem en viel in slaap. Vanaf de bodem dreef hij in 8 minuten langzaam naar de oppervlakte en haalde opnieuw adem. Na 3 minuten was hij weer op de bodem. Martin merkte dat dit gehele gebeuren zich volkomen regelmatig bleef herhalen.

Vraag:

- Na een uur was de zeehond
- A. op de bodem
  - B. op weg naar boven
  - C. aan het ademhalen
  - D. op weg naar beneden

### Voorbeeld 2

Een situatie uit het dagelijks leven. Een opgave met één open vraag. Afhankelijk van de aanpak zou deze opgave zowel kunnen behoren tot Space and Change als tot Change and Relationships.

#### Pizza's

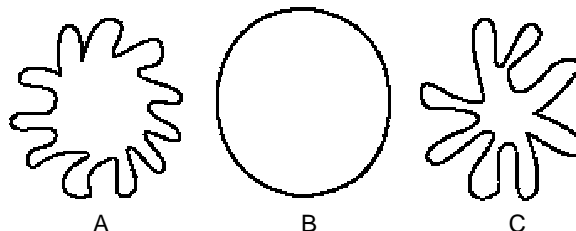
Een pizzeria heeft twee ronde pizza's van dezelfde dikte in twee verschillende maten. De kleine heeft een diameter van 30 cm en kost 30 zeds. De grote heeft een diameter van 40 cm en kost 40 zeds.

Welke pizza geeft meer waar voor zijn geld? Leg uit waarom.

### Voorbeeld 3

Dit is een reproductieve vraag. Behoort tot het terrein Space and Shape. Er is geen levensechte context. De leerling moet hier niet alleen verworven wiskundige kennis inzetten, maar dient die kennis ook te verwoorden.

## Figuren



Welke figuur heeft de grootste oppervlakte? Leg uit waarom.

### Voorbeeld 4

Deze situatie is voor een leerling vrij gemakkelijk voorstelbaar. Het bedenken van de aanpak is het cruciale deel van de oplossing. Het contextgebied is Space and Shape.

#### PATIO

Nick wil het rechthoekige terras bij zijn nieuwe huis bestraten. Het terras heeft een lengte van 5,25 meter en een breedte van 3,00 meter. Hij heeft 81 stenen per vierkante meter nodig.

Bereken hoeveel stenen Nick nodig heeft voor het hele terras.

### Voorbeeld 5

Deze opgave is ontleend aan een examenopgave wiskunde A HAVO. De eerste vraag is een standaardbewerking. De tweede is technisch wat lastiger. De derde vraag is een echte probleemoplossing. Deze opgave hoort bij Change and Relationships. De context is authentiek, maar ligt vrij ver van de leerling af.

#### Korstmossen

Doordat het op aarde steeds warmer wordt, is het ijs van sommige gletsjers gaan smelten. Twaalf jaar nadat het ijs verdwenen is, beginnen daar kleine plantjes, korstmossen genaamd, op de rotsen te groeien. Elk korstmos groeit min of meer in de vorm van een cirkel.

De samenhang tussen de diameter van deze cirkel en de leeftijd van het korstmos kan bij benadering berekend worden met de volgende formule:

$$d = 7.0 \times \sqrt{t - 12} \text{ voor } t \geq 12$$

waarbij  $d$  de diameter van het korstmos in millimeters weergeeft en  $t$  het aantal jaren sinds het ijs verdwenen is.

Vraag 1

Bereken de diameter van het korstmos, 16 jaar nadat het ijs verdwenen is. Gebruik daarbij de formule.

Vraag 2

Anne heeft de diameter van een korstmos opgemeten en kwam uit op 42 mm. Hoeveel jaar geleden is het ijs op die plek verdwenen? Schrijf je berekening op.

### Vraag 3

Over hoeveel jaar zal de diameter van een korstmos verdubbeld zijn als het korstmos nu een diameter van 35 mm heeft? Leg uit hoe je je antwoord hebt gevonden.

## Hoe is PISA georganiseerd?

De OECD is de opdrachtgever. Een consortium, bestaande uit ACER (Australian Council for Educational Research), NIER (National Institute for Educational Research in Japan) en de Cito-groep, heeft deze opdracht verworven. Dat betekent ondermeer dat zij de opgaven voor PISA moeten construeren. Daarbij worden de deelnemende landen uitgenodigd om (ideeën voor) opgaven in te sturen.

Een internationale groep van experts (onder voorzitterschap van Jan de Lange) ziet toe op de kwaliteit van de opgaven. Zij zijn ook de schrijvers van het framework, dus zij zijn de aangewezen personen om te beoordelen of de opgaven inderdaad de gewenste vaardigheden toetsen. Een jaar voor het echte onderzoek vindt er een proefafname plaats in alle deelnemende landen. Daarin worden ongeveer twee keer zoveel opgaven ingezet als er voor het echte onderzoek nodig zijn. Op basis van de resultaten van die proefafname wordt de uiteindelijke toets samengesteld.

Om de opgaven in alle deelnemende landen te kunnen afnemen, moeten er heel wat vertalers aan het werk. Allerlei procedures moeten vermijden dat de opgaven door het vertalen gemakkelijker of juist moeilijker worden.

De grootte van het land bepaalt het aantal leerlingen dat nodig is om een betrouwbaar beeld van het kennisniveau van vijftienjarigen te krijgen. In elk deelnemend land wordt een steekproef genomen uit het volledige scholenbestand. Daarbij wordt er nauwlettend op toegezien dat er een evenredige verdeling is van leerlingen van de diverse schooltypen. PISA wenst de vaardigheden te meten van alle vijftienjarigen, dus van I-VBO tot en met VWO.

Leerlingen van deelnemende scholen zijn drie uur bezig met PISA. Ze krijgen eerst een vragenlijst voorgelegd over school en hun houding ten opzichte van leren. Vervolgens is er twee uur echte toetstijd.

Waar het gesloten vragen en kort-antwoordvragen betreft, kan het leerlingenwerk machinaal gescoord worden. Voor de open vragen worden correctoren ingezet, die werken met een gedetailleerd antwoordmodel.

De kosten voor de organisatie van de afname en de correctie worden door elk land afzonderlijk gedragen.

Er gaat nogal wat tijd overheen voordat de gegevens uit alle deelnemende landen verwerkt zijn. Daar komt nog bij dat vorig jaar een tiental niet-OECD-landen ook deelnemer aan PISA is geworden. Pas als alle resultaten verwerkt en geanalyseerd zijn, zal er over PISA 2000 gerapporteerd worden. Daarom weten we op dit moment nog

niet hoe de Nederlandse vijftienjarigen presteren vergeleken met hun leeftijdgenoten elders in de wereld.

## Wat moet je met PISA als je leraar bent?

Voor sommigen is de vraag waarschijnlijk snel beantwoord: 'Niet veel'. Dat vinden we jammer. In de lespraktijk van alledag zal er misschien niet een directe invloed merkbaar zijn en ook levert PISA niet meteen allerlei kant en klare les-ideeën op.

Wel geeft PISA elke paar jaar een uniek beeld van wat de capaciteiten zijn van vijftienjarigen op het gebied van toegepaste wiskunde.

Of beter gezegd van de toepasbaarheid van wiskunde.

Of nog beter gezegd: Het gaat niet alleen om vijftienjarigen, maar om welke basiskennis en vaardigheden burgers nodig hebben om in een alsmaar veranderende samenleving te kunnen functioneren: 'Preparedness for Life' in OECD jargon.

Kortom, wat in het framework staat beschreven en de voorbeelden van opgaven geven een antwoord op die eeuwig terugkerende vraag in de klas: 'Waarom moet ik dit nou leren?'

Het framework levert ook heldere beschrijvingen op over hoe allerlei onderwerpgebieden van de (school)wiskunde samenhangen als je het bekijkt vanuit de gebruikerskant. Het concept van mathematisering is gekoppeld aan de hoofdcompetenties die je moet bezitten als je wiskunde wilt kunnen toepassen. De competentieklassen geven aan welke vaardigheidsniveaus daarin te onderscheiden zijn. Het framework met al haar voorbeelden vormt daarmee een krachtig document voor reflectie op die lespraktijk van alledag.

In het internationale rapport staat hoe Nederland presteert in vergelijking tot andere landen. In het nationale rapport worden, zoals al eerder beschreven, de Nederlandse resultaten afgezet tegen factoren die deze resultaten beïnvloeden. Ook dat kan interessant zijn, om de eigen schoolsituatie mee te vergelijken.

Het is een wisselwerking: als veel leraren het belang van PISA inzien, mee willen doen aan fieldtests en echte afnamen en willen weten wat resultaten voor het onderwijs kunnen betekenen, dan zal een Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen meer met de nationale rapportage willen doen en meer in de nationale rapportage willen investeren. Met als gevolg dat weer meer, voor leraren relevante informatie beschikbaar kan komen.

Helaas is het niet mogelijk om op schoolniveau te rapporteren, dus de natuurlijke vraag 'hoe hebben mijn leerlingen het gedaan?' zal nooit rechtstreeks kunnen worden beantwoord. Maar voor de echte toegepaste wiskundeleeraar moet het een peulenschil zijn om uit de beschikbaar komende informatie een gedeeltelijk antwoord te vinden op de vraag 'hoe zouden mijn leerlingen het hebben gedaan?'

## Wat moet je met wiskunde als je 15 bent?

Als vijftienjarige is de vraag waarschijnlijk snel beantwoord: 'Niet veel'. De OECD denkt daar anders over, zo als het artikel heeft laten zien. Voor hen is de vraag meer 'wat moet je met wiskunde als je vijftien bent?'

En ach, het is toch aardig als leerlingen de volgende vraag niet alleen doorzien, maar er ook de humor van kunnen inzien:

Koning Hendrik VIII had zes vrouwen. Hoeveel vrouwen had Hendrik IV? ...

## Meer informatie?

Het PISA-project heeft een fraaie website waarop naast informatie ook het een en ander aan opgaven te vinden is: [www.pisa.oecd.org/pisa/math.htm](http://www.pisa.oecd.org/pisa/math.htm).

Tot nu toe zijn er twee publicaties verschenen:

*Measuring Student Knowledge and Skills. A new Framework for Assessment*, ISBN 92-64-17053-7, uitgegeven door de OECD in 1999.

*Measuring Student Knowledge and Skills. The PISA 2000 assessment of reading, mathematical and scientific literacy*, ISBN 92-64-17646-2, in 2000 uitgegeven door de OECD.

Kees Lagerwaard en Gerben van Lent, Cito, Arnhem

## Noten

[1] Zie onder andere Jan de Lange (1987). *Mathematics Insight and Meaning*. Utrecht: OW & OC, pp. 38-72.

[2] Dit schema is ontleend aan het Framework for Mathematical Literacy for PISA 2003.

[3] Change and Growth is in PISA 2003 ondergebracht in het thema Change and Relationships.

## Koninklijke onderscheiding voor Ed de Moor

Tijdens de jaarlijkse studiedag van de Historische Kring (HKRWO) op 26 mei kreeg Ed de Moor een koninklijke onderscheiding. Hij werd benoemd tot Officier in de Orde van Oranje Nassau door Jan Veldhuis, voorzitter van het CvB van de Universiteit Utrecht.

Die verdiensten van Ed voor het Nederlandse reken/wiskundeonderwijs zijn zeer veelzijdig. Begonnen als wiskundedocent op het Barlaeus gymnasium in Amsterdam, is hij zich later vooral op het basisonderwijs gaan richten. In 1971 werd Ed aangenomen bij de Wiskobas, de groep van het IOWO (voorloper van het Freudenthal Instituut) die zich vooral met het basisonderwijs bezig hield.

Hetgeen overigens niet inhield dat Ed 'verloren' was voor het voortgezet onderwijs: zo was Ed betrokken bij de leerlijn rekenen van het W12-16 project, waarover hij ook diverse malen publiceerde in dit blad. Op verzoek van de redactie schreef hij voor nummer 14(3) het artikel 'Weg met van Dalen'. Nog steeds een zeer nuttig artikel als dit onderwerp de kop weer eens opsteekt (zoals recentelijk nog in de WiskundeEbrief).

Iedereen die Ed een beetje kent, weet dat hij tenminste twee grote liefdes heeft: het meetkundeonderwijs en de geschiedenis van het reken/wiskundeonderwijs. Vooral

over dit laatste thema publiceerde Ed regelmatig in de *Nieuwe Wiskrant*. De combinatie van die twee thema's leverde in 1999 een prachtig proefschrift op over de geschiedenis van het reken/wiskundeonderwijs (voor de *Nieuwe Wiskrant* besproken door Jan van Maanen, zie nummer 19(1)).

Ed toont zich ook een bekwaam organisator. In 1982 richtte hij de NVORWO op, de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs, zustervereniging van de NVvW. Ook de HKRWO komt uit Ed's koker.

Dat Ed een begenadigd spreker is, weet iedereen die wel eens een voordracht van hem heeft bijgewoond. Hij had plenaire lezingen op de regionale bijeenkomsten (voorjaar 2000) en op het lustrumcongres van de NVvW (november 2001) en leverde een bijdrage aan de laatste NWD.

En altijd, in wat voor omstandigheden dan ook, heeft Ed een enorm gevoel voor humor en zet hij al z'n charmes in om te bereiken wat hij voor ogen heeft.

Ed, we feliciteren je van harte!

*De redactie*