

Dynamische meetkunde

Een reactie op *euclides* 84-8

Dit stuk is geschreven naar aanleiding van enkele toevalligheden die bij elkaar kwamen in Euclides nummer 8 van juli 2009. De eerste aanleiding was het artikel over de door het Barleaus gymnasium gemaakte methode voor de eerste klassen [1]. Een mooi initiatief! Ik werd echter geprikkeld door twee opmerkingen. Ten eerste de kreet over “vele extra’s als computergrafien...”. Het is zeker zo dat veel computerondersteuning er gewoonweg ‘bij gesleept’ wordt. De meerwaarde is er soms wel en soms niet. Bij bestudering van de wiskundemethode is ‘ICT als hulpmiddel’ naar mijn mening wel heel karig bedeed. Zeker bij onderwerpen als meetkunde kan –zoals veel gebruikers van bijvoorbeeld Cabri en Geocadabra al weten- geprofiteerd worden van de dynamische mogelijkheden van een computer [2]. Het artikel breekt ook een lans voor ‘open source’. Ik moest meteen denken aan het programma dat dit jaar voor het eerst onderwerp was van de internationale conferentie CADGME dat de Universiteit van Linz organiseerde: Computer Algebra en Geogebra stonden hier centraal. De website <http://www.geogebra.org> heeft het over:

Geogebra is een wiskundepakket dat meetkunde, algebra en analyse combineert.

Enerzijds is Geogebra een dynamisch meetkundepakket. Je kan constructies uitvoeren met punten, vectoren, lijnstukken, rechten en kegelsneden en je kan deze tekenobjecten daarna dynamisch wijzigen.

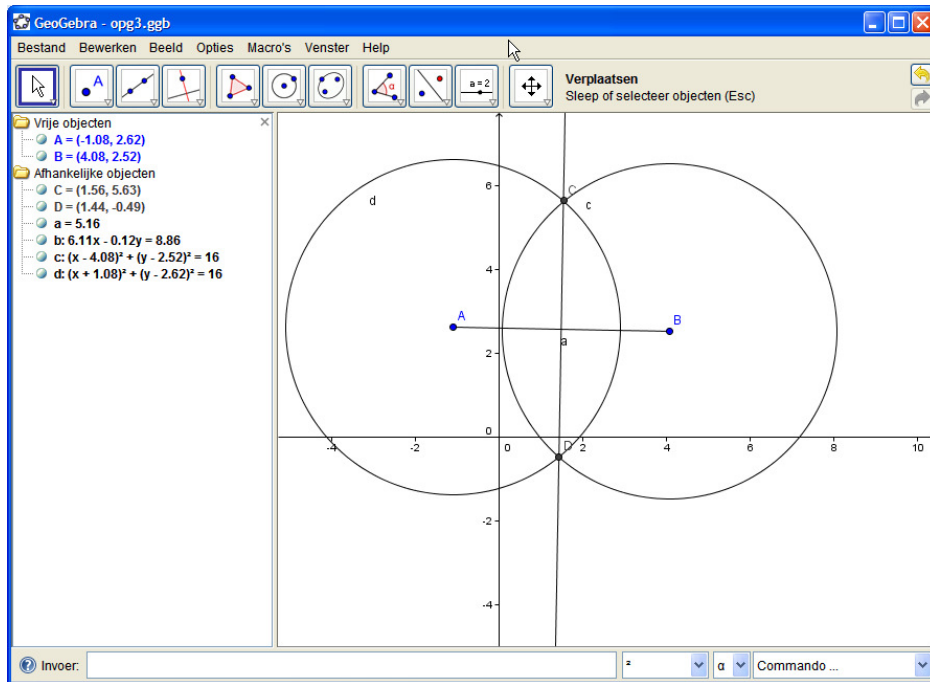
Anderzijds kunnen functies, vergelijkingen en coördinaten rechtstreeks worden ingevoerd. Met Geogebra is het dus ook mogelijk om met variabelen te werken voor getallen, te rekenen met vectoren en punten, afgeleiden en integralen van functies te berekenen en er zijn ook commando's voorzien om bijv. nulpunten of extrema te berekenen.

Deze twee standpunten zijn typisch voor Geogebra: een uitdrukking in het algebravenster correspondeert met een object in het tekenvenster en

In de serie ‘Vanuit de oude doos’ daagt Ton Lecluse regelmatig uit om oude meetkundeopgaven met een dynamisch computerprogramma te construeren [3]. Dit om inzicht te krijgen in de opgave. In dit artikel wil ik aan de hand van drie opgaven uit de methode van het Barleaus, en de uitdaging van Ton Lecluse in vogelvlucht laten zien hoe Geogebra –of een ander dynamisch meetkundeprogramma- inzicht kan verschaffen in meetkundige constructies. Hierbij moet deze aanpak staan *naast* een pen-en-papier aanpak. Leerlingen kunnen van beide profiteren.

Voorbeeld 1: constructie middelloodlijn lijnstuk AB

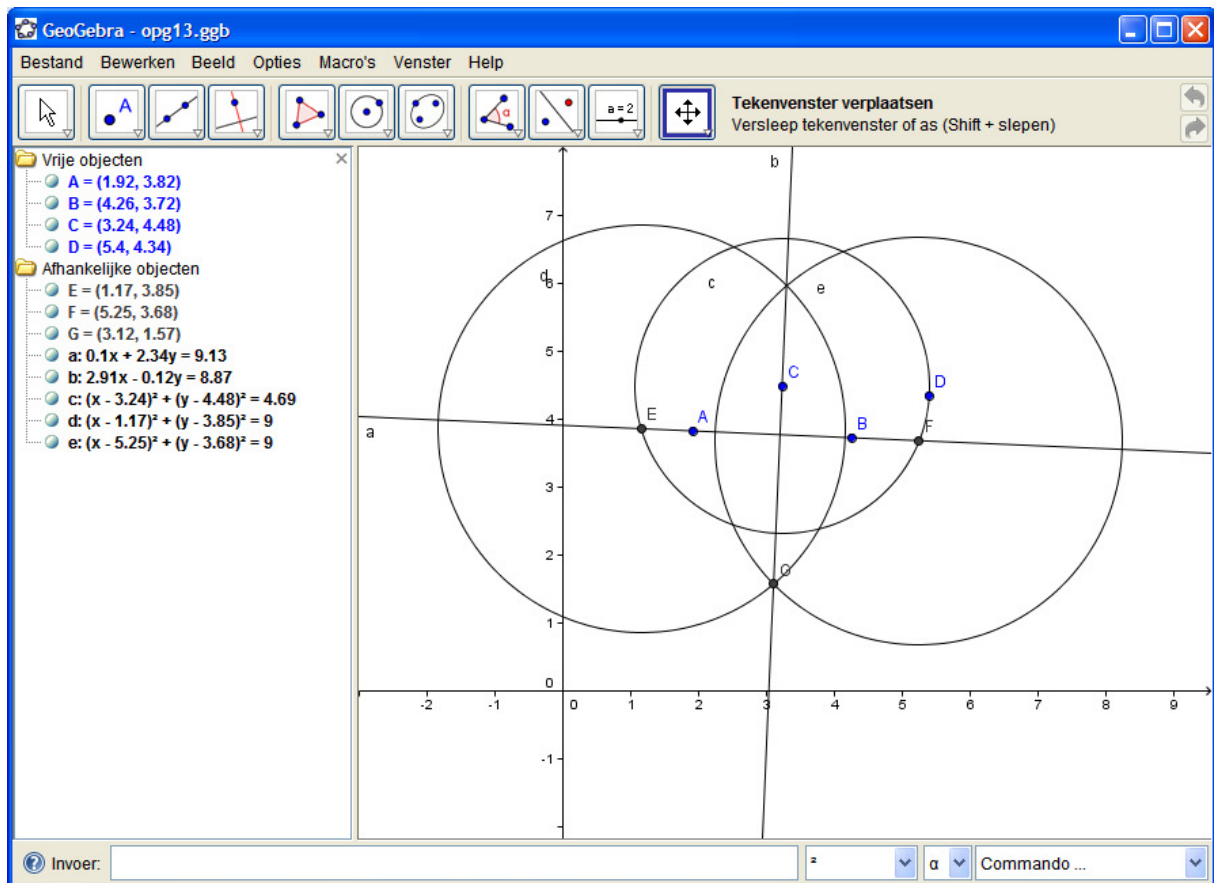
Met een passer en lineaal kan deze constructie eenvoudig gemaakt worden. In Geogebra kan dat ook vrij eenvoudig. De lengte van het lijnstuk kan alleen eenvoudig veranderd worden door een punt te verschuiven. Hierdoor kan bijvoorbeeld makkelijk geobserveerd worden dat de te tekenen cirkels een straal moeten hebben van minimaal de helft van de lengte AB. Dit lijkt tamelijk triviaal, maar het tekenen van meerdere situaties kan een tijdrovende bezigheid zijn. Bij een dynamisch programma is het een kwestie van slepen.



Figuur 1: de constructie middelloodlijn van een lijnstuk AB

Voorbeeld 2: loodlijn vanuit een punt C op een lijnstuk AB

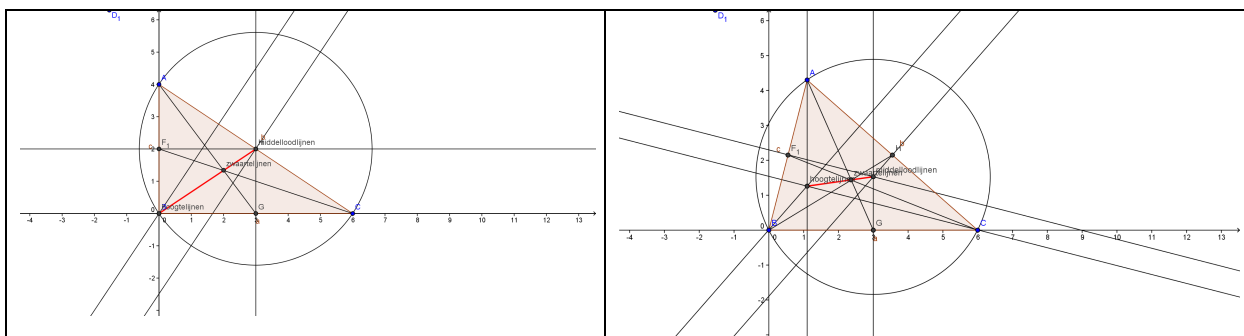
Deze constructie is al wat ingewikkelder. Bij het meerdere keren construeren zal een leerling lang bezig zijn. Voor de motoriek is dat wellicht fijn, maar voor het ontdekken van “bijzondere gevallen” zal een computerprogramma kunnen helpen. Zo kan door slepen bijvoorbeeld gezien worden dat de plaats van A en B op de lijn niet uitmaken. Ook kan weer ontdekt worden hoe groot de hulpcirkel minimaal moet zijn.

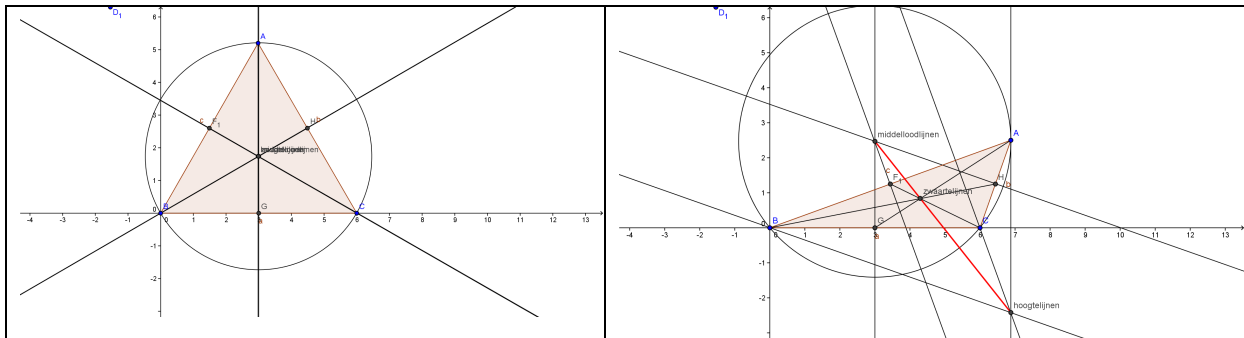


Figuur 2: loodlijn vanuit een punt C op een lijnstuk AB

Voorbeeld 3: de rechte van Euler

Hoe complexer de vraag, hoe nuttiger een computerprogramma wordt. Niet omdat het programma mentaal werk uit handen neemt, maar juist omdat het de mogelijk tijdrovende tekeningen 'dynamisch' maakt, zodat veel sneller verschillende plaatjes kunnen worden getekend. In deze opgave wordt bijvoorbeeld gestart met een arbitraire driehoek. Maar wat gebeurt er met de "bijzondere lijnen" als een driehoekig gelijkbenig, rechthoekig, gelijkzijdig is? Zo kunnen we kijken naar de "rechte van Euler": de lijn door het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van de omschreven cirkel van een driehoek. In de meeste lesboeken worden 'mooie' driehoeken gekozen die alle bijzondere punten tot hun recht laten komen. In een dynamisch meetkunde programma maak je gewoonweg een arbitraire driehoek en de constructie, en kunnen na voltooiing de hoekpunten van de driehoek worden verplaatst. Ook kunnen naar believen lijnen en punten 'aan' en 'uit' worden gezet, zodat de tekening overzichtelijk blijft. In de met Geogebra gemaakte tekening is de rechte van Euler dikker gekleurd, en zijn vlot verschillende driehoeken gemaakt.





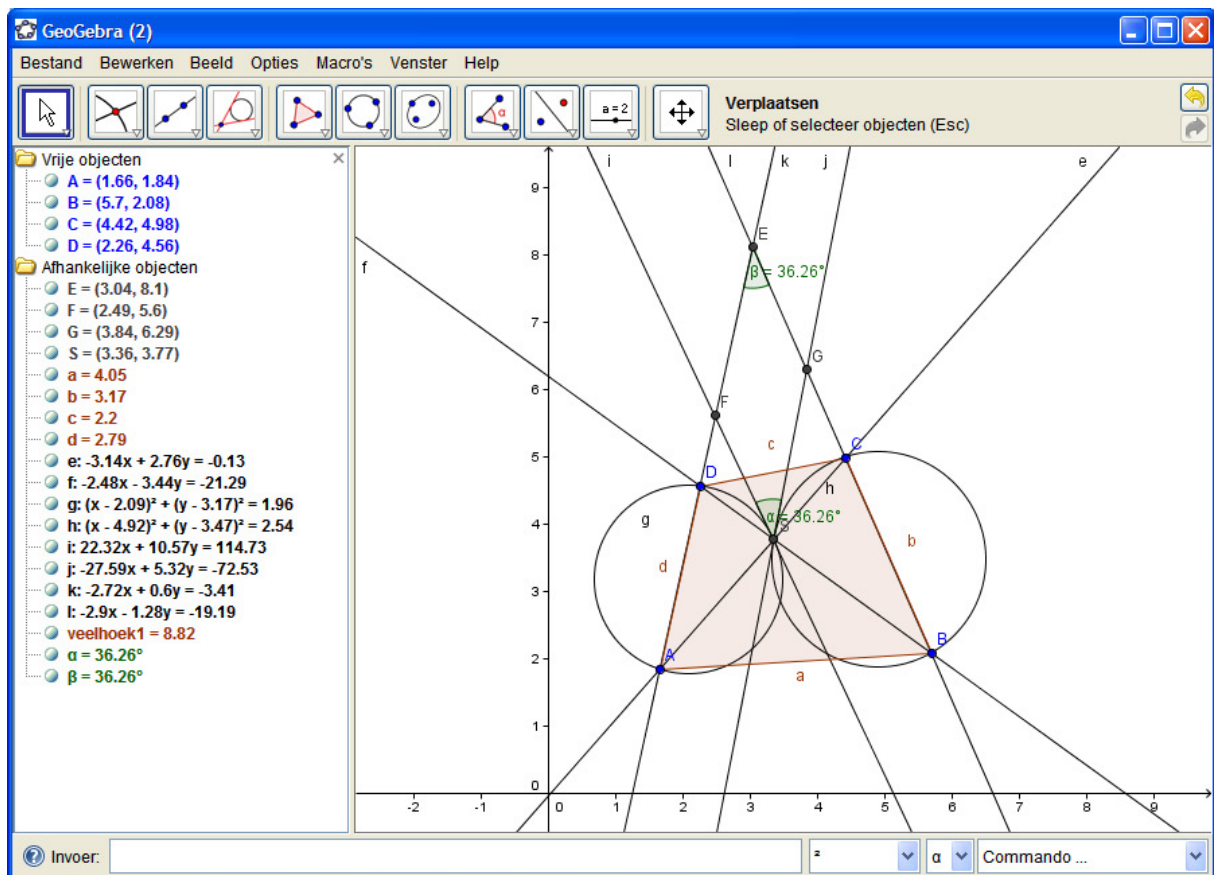
Figuur 3: vier verschillende driehoeken ABC met de 'bijzondere lijnen' en de lijn van Euler

Voorbeeld 4: Vanuit de Oude Doos

De opgave "Vanuit de oude doos" in februari 2009 was er één van een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1928:

In een vierhoek ABCD trekt men de diagonalen, die elkaar in S snijden. Bewijs, dat de cirkels beschreven om de driehoeken ASD en BSC elkaar snijden onder een hoek gelijk aan die, gevormd door AD en BC bij verlenging.

Uiteraard is het voorbeeld construeren niet hetzelfde als 'bewijzen'. Om inzicht te krijgen in de situatie kan een computerprogramma helpen. Ook kan zij helpen bij het formuleren van bepaalde vermoedens. En zo ontstond figuur 4.

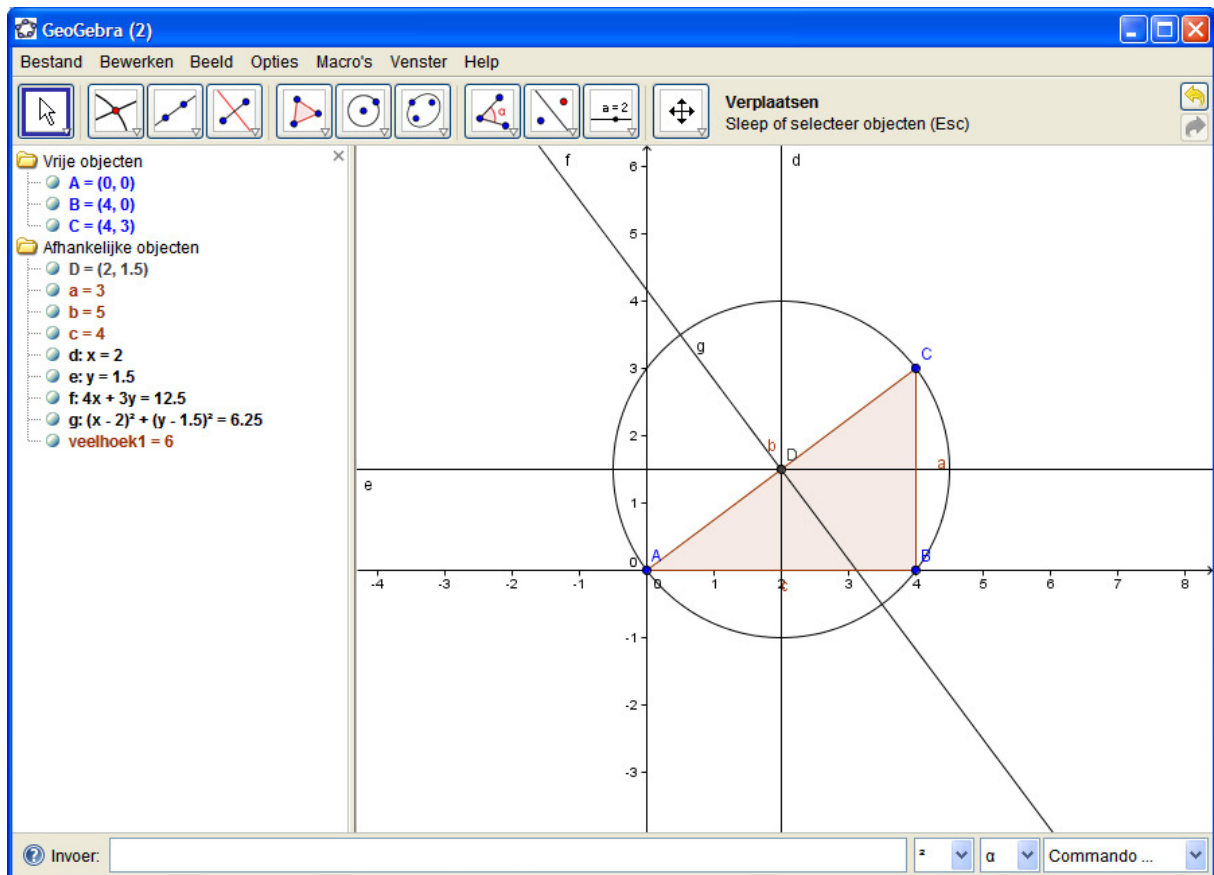


Figuur 4: Vanuit de Oude doos 84-4

Ook hier is het mogelijk om de hoekpunten van de vierhoek ABCD naar believen te verplaatsen. Verplaatsen laat zien dat de in de opgave beschreven cirkels elkaar –zie de raaklijnen- in een hoek α

blijven snijden die gelijk is aan hoek β die verlengde AD en BC maken. Ook laat de numerieke informatie aan de linkerzijde inderdaad zien dat de hoeken α en β gelijk blijven. Dit is natuurlijk nog geen bewijs. Sterker nog, dit is toch een lastig punt van meetkunde-software. In het geval van het laatste voorbeeld is de situatie zo ingewikkeld dat vaak alleen iets gezegd kan worden over de “bijzondere gevallen”. Wat gebeurt er als we te maken hebben met een vierkant? Wat als het een rechthoek is? En een trapezium?

Kijken we naar een simpeler voorbeeld, bijvoorbeeld die van middelloodlijnen in een driehoek (een onderdeel van de afbeelding over de rechte van Euler) dan kunnen ook “bijzondere driehoeken” worden bekeken.



Figuur 5: middelloodlijnen in een rechthoekige driehoek

Uit dit plaatje blijkt redelijk makkelijk dat de middelloodlijn de schuine zijde AC in tweeën deelt. Daarnaast gaan de andere middelloodlijnen ook door dit punt D. In deze tekening wordt misschien net wat sneller duidelijk dat A en B even ver afdiggen van de middelloodlijn van AB, B en C even ver van de middelloodlijn van BC, en A en C even ver van de middelloodlijn van AC. Maar dan: als $|AD|=|CD|$ en $|BD|=|CD|$ en $|BD|=|AD|$ geldt natuurlijk dat $|AD|=|BD|=|CD|$ en dat A, B en C door de cirkel met middelpunt D en straal $|AD|$ gaan.

Toch blijft dit toch ook de achilleshiel van dit soort software. Uiteindelijk zal een leerling toch zelf de mentale stap van het bewijzen moet doen. Een vakgebied op het grensvlak van informatica en wiskunde is onderzoek op het gebied naar *proof assistants*, waarin software voor meetkunde gecombineerd wordt met *proof checkers*. Deze kunnen op basis van axioma's afleidingen maken. Een

voorbeeld is GeoProof: <http://home.gna.org/geoproof/> . Die afleidingen kunnen onder andere gevonden worden door Groebner bases [4] te gebruiken. Daar had ik nog nooit van gehoord, totdat ik de “uitvinder” van deze theorie voor het eerst tegenkwam op een conferentie die hij eerder organiseerde: de CADGME. Waarmee de cirkel in ieder geval rond is.

Christian Bokhove is wiskundedocent en ICT coördinator op het St. Michaël College in Zaandam. Hij doet sinds 2007 een promotietraject in het Dudoc programma van het Platform Beta Techniek. Email: cbokhove@stmichaelcollege.nl

[1] Zevenhek, Bart & Blom, Nora. Een nieuwe wiskundemethode voor het gymnasium? *Euclides*. 84-8, juli 09.

[2] Zhonghong JIANG (2007). The Dynamic Geometry Software as an Effective Learning and Teaching Tool. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*. 1 (3).

[3] Lecluse, Ton (2009). Vanuit de oude doos. *Euclides*. 84-4, februari 09.

[4] Buchberger, Bruno (2001). Gröbner Bases: A Short Introduction for Systems Theorists. <http://www.risc.uni-linz.ac.at/people/buchberg/papers/2001-02-19-A.pdf>