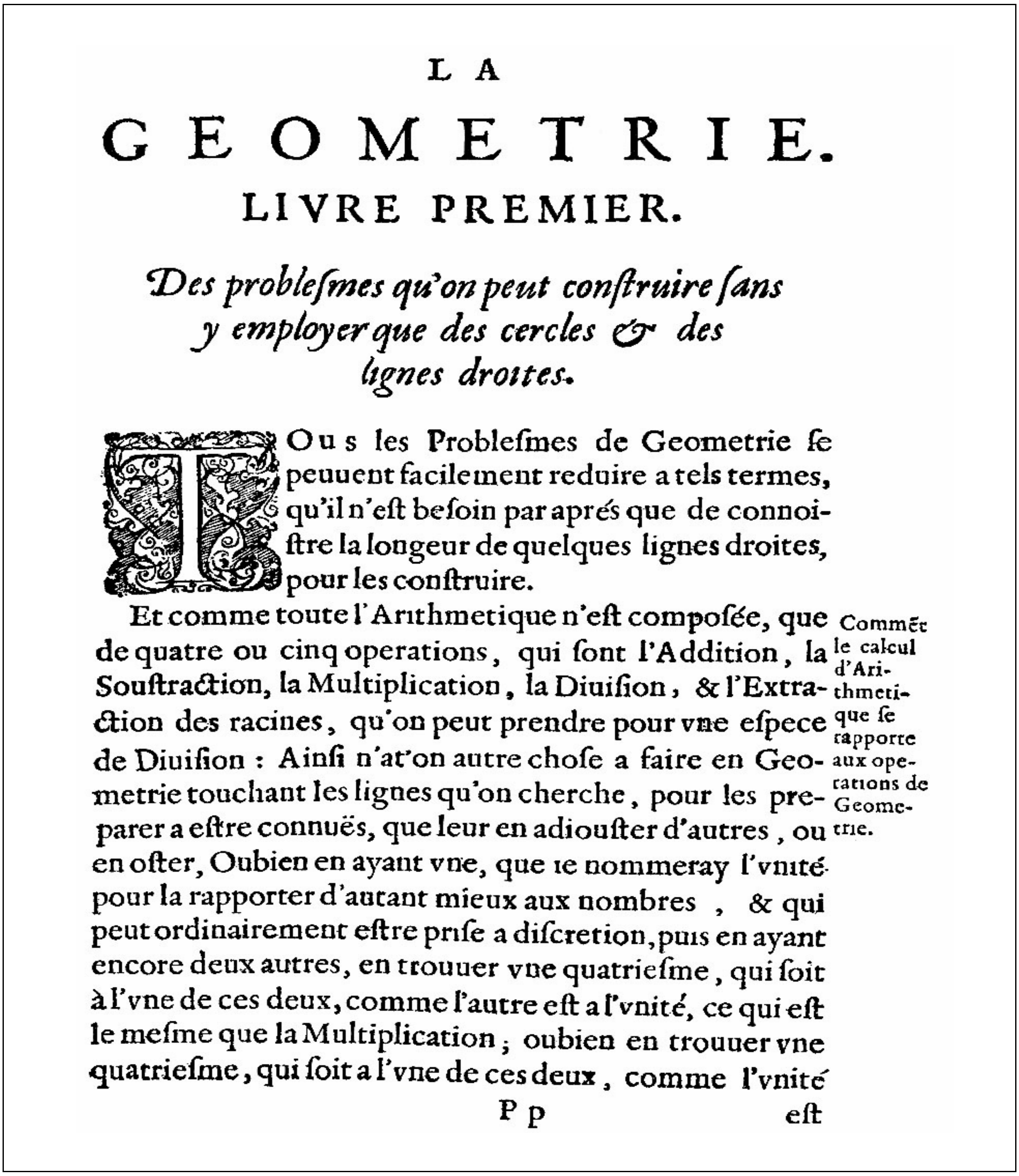
Hoofdstuk 3
Analytische meetkunde



LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Comment le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt composée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

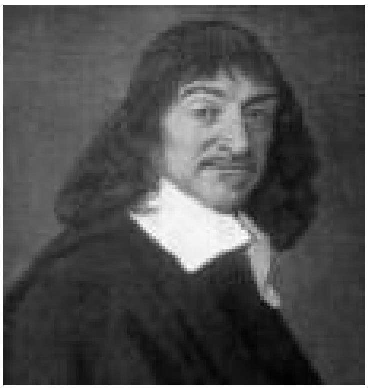
Pp eſt

Facsimile van de eerste bladzijde van
'La Geometrie' van René Descartes (1637)

16: Het Cartesische denken

Cartesius

De titel van deze paragraaf is een eerbetoon aan filosoof en wiskundige René Descartes (Cartesius, 1596 – 1650). Deze heeft in zijn tijd en in de eeuwen daarna enorme invloed gehad op de filosofie en de wiskunde.
Descartes begon zijn filosofie met absolute twijfel: niets mocht als waar aangenomen worden. Hij bedacht: *‘Ik denk, dus ik besta’*, en vond zo tenminste één zekerheid om vanuit te gaan [*].
In Descartes’ filosofie waren lichaam en geest van de mens geheel onafhankelijk en deze waren alleen via de pijnappelklier in contact. Dit *dualisme* wordt nu zeer bestreden door de modernere psychologie!



methode

Rond 1630 had Descartes al regels geformuleerd voor ‘de richting van het denken’. Eenvoudig gezegd kwamen die hier op neer:

a. elk vraagstuk of probleem in de wereld kan worden teruggebracht tot een *meetkundig* probleem;
b. elk meetkundig probleem moet worden teruggebracht tot een *algebraïsch* probleem;
c. elk algebraïsch probleem moet worden teruggebracht tot het *oplossen* van een *vergelijking* met één onbekende.

Omdat de wiskunde zekerheid bood, kon zo zekerheid in andere zaken bereikt worden.
Als denker is Descartes een extreme *rationalist*: alleen het denken leidt de mens op weg naar de waarheid, (en de ervaring der zintuigen of geloven bijvoorbeeld niet).

algebra & meetkunde

De wiskunde van onderdelen *b* en *c* van deze methode publiceerde Descartes in 1637 in het slot-essay van zijn*‘Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences’*[†] met de ondertitel *‘La Geometrie*’.
Elk meetkundeprobleem is uiteindelijk het bepalen van lengtes van lijnstukken, stelde Descartes in de eerste zin van ‘*La Geometrie*’ (zie de vorige bladzijde). Hij bedacht daarbij de volgende zeer algemene methode:

– geef alle lijnstukken in de figuur namen (letters), bekende zowel als onbekende;
– probeer één grootheid op twee verschillende manieren uit te drukken in de aldus benoemde lijnstukken;
– de uitdrukkingen zijn gelijk, dat geeft een *vergelijking*;
– los de onbekende uit de vergelijking op. Dan is alles bekend in de figuur en het probleem opgelost.

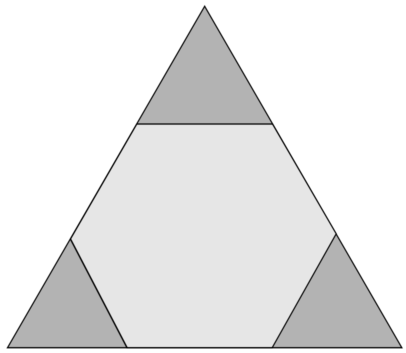
Descartes stimuleerde zo de toen nog tamelijk jonge letteralgebra en leverde meteen een van de belangrijkste toepassingen hiervan.
We volgen hem in dit hoofdstuk na bij het nader onderzoeken van de figuren parabool, ellips en hyperbool. Wat betreft punt *b* en *c* van zijn programma dus.
Punt *a* (dat *elk* probleem in wiskunde is te vertalen) is een filosofisch uitgangspunt, waar uiteraard de meningen over uiteenlopen.

[*] Bekender nog in het Latijn: *Cogito, ergo sum*.
[†] Verhandeling van de Methode om de rede te besturen en de waarheid in de wetenschappen te zoeken.

17: Voorbeeld van de drieslag

Hier is een eenvoudig probleem, dat we vertalen naar een meetkundig probleem dat we vervolgens met algebra oplossen. Dat is de drieslag van Descartes.

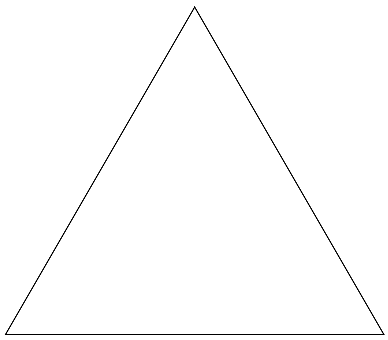
1 Het logo van een firma moet de vorm van een driehoek hebben zoals hiernaast; de punten in de hoeken van de driehoek zijn groen, de zeshoek in het centrum geel:
Men wil graag dat de gezamenlijke omtrek van de kleine groene driehoekjes precies gelijk is aan de omtrek van de gele zeshoek; binnen de 'corporate identity' van deze firma heeft dat een bijzondere betekenis die hier niet van belang is.

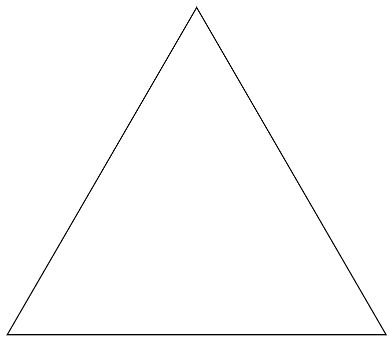


Voor de meetkundige vertaling nemen we aan dat de hele driehoek gelijkzijdig is en dat de drie gele punten alle drie even grote gelijkzijdige driehoeken zijn.

Nu de algebraïsering, fase drie van Descartes' plan.
Hij neemt je als volgt aan de hand mee:

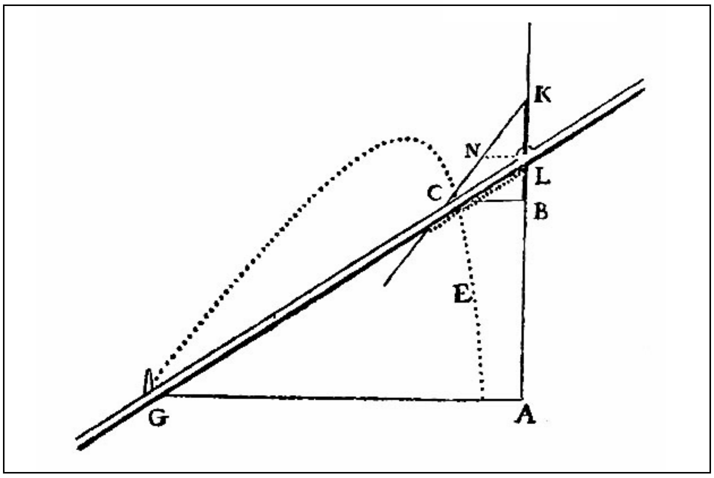
a. Zet een a bij de (bekende zijde) van de hele driehoek en een x bij een lijnstuk dat bepaald moet worden. Zet mogelijk meer uitdrukkingen bij zijden van driehoeken en zeshoek.
b. Druk de gezamenlijke omtrek van de gele driehoek uit in a en/of x.
c. Doe dat ook voor de zeshoek.
d. De uitdrukkingen van b en c moeten gelijk zijn, dat zegt de probleemstelling. Stel de vergelijking op die daaruit volgt en los die op.
e. Descartes (en de bewuste firma ook ..) eist dat de gevonden oplossing ook geconstrueerd moet worden in de figuur, het is immers een meetkundig probleem. Doe dat hieronder links, waar gekozen is voor $a = 5$.





2 Het ontwerp roept commentaar op: het geel domineert teveel. Dat kan verbeterd worden door te eisen dat geel en groen in oppervlakte gelijk zijn. Reken ook dat plan door en teken het resultaat in de tweede driehoek.

Coördinaten bij Descartes



a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne CB parallele a GA, & pourceque CB & BA ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de

pliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt.

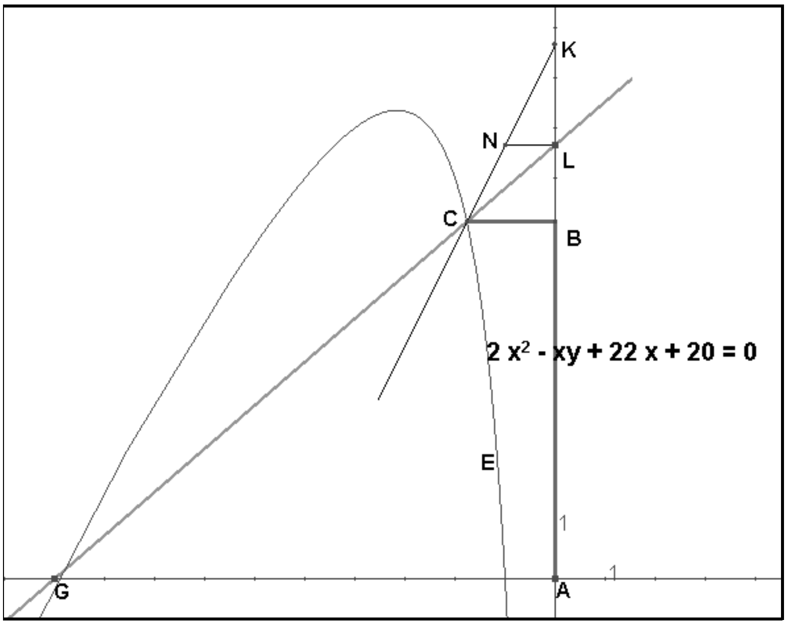
$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne EC eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

Descartes wilde vooral kromlijnige figuren bestuderen en vergelijken.

Dit voorbeeld komt uit *La Geometrie*, het gaat om de gestippelde kromme lijn, die met een eenvoudig mechaniekje gemaakt wordt.
GA is een vast lijnstuk. Punt *L* beweegt op de verticale lijn door.*A*. Het driehoekje van vaste vorm *KLN* schuift als *L* beweegt mee over de verticale lijn. Het punt *C* beschrijft de gestippelde kromme, het is het snijpunt van de lijn *GL* met het de lijn door *K* en *N*.

In de tekst van Descartes staat dat punt *C* beschreven kan worden met de lengtes van de lijnstukken *CB* en *BA*, die hij *y* en *x* noemt.
Verder neemt hij $GA = a$, $Kl = b$, $NL = c$. Die *a*, *b* en *c* zijn dus vaste grootheden.
Na enig algebraisch rekenwerk komt Descartes tot een vergelijking waar in de samenhang van *x* en *y* is te zien in de vorm van een vergelijking (Descartes gebruikt een eigen teken voor is-gelijk). Hij trekt de conclusie dat de kromme een *hyperbool* is.



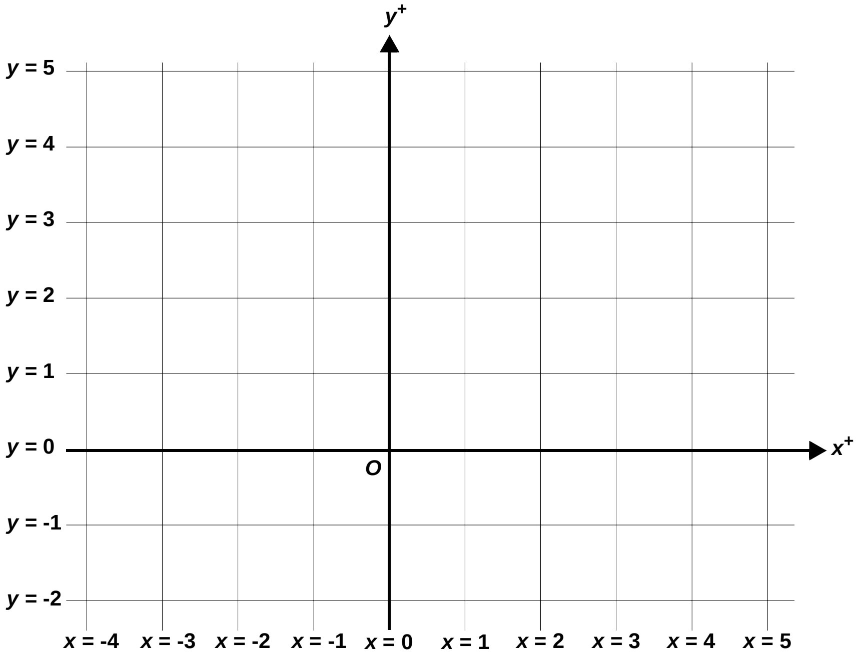
Coördinaten bij Cabri

Met CABRI kan de constructie die Descartes beschrijft ook gedaan worden. Dat is hier gebeurd.
CABRI geeft ook de vergelijking in *x* en *y*.
Het y-lijnstuk loopt bij Descartes horizontaal; tegenwoordig laten we de *x*-as horizontaal lopen. Na verwisselen van de letters *x* en *y* in de vergelijking die Cabri geeft, zien we Descartes' vergelijking terug.

18: Coördinaten bestuderen

De sleutel voor het gebruik van algebra bij meetkunde zoals Descartes dat deed is het aangeven van de positie van een punt met twee afstanden tot twee gegeven lijnen. Modern gezegd: met coordinaten. In de figuur op de vorige bladzijde zijn dat de afstanden *CB* en *CA* tot de vaste lijnen *AK* en *GA*. De afstanden noemt Descartes *x* en *y*, de ander gegeven lijnstukken krijgen letteraanduidingen uit het begin van het alfabet: *a*, *b*, *c*, etc.

Dat is bijna precies wat wij gewend zijn in een *xy*-coordinatenstelsel als hieronder staat. Maar bij ons mogen de *x* en *y* ook negatief zijn, omdat ze posities op de assen markeren, en niet meer als lengtes worden geinterpreteerd.



Het is een zogenaamd *cartesisch assenstelsel Oxy.*
Zo'n assenstelsel voldoet aan de volgende eisen:
– *de beide coördinaatassen staan loodrecht op elkaar* (daar kijk je niet van op),
– *de beide lengte-eenheden op de assen zijn even lang* (men spreekt wel van een vierkant assenstelsel; denk aan 'Zsquare', optie van de GR),
– *de oriëntatie van het stelsel is positief* (dat betekent: de draaiing om *O* in positieve richting over 90^{o} brengt de x^+-as naar de y^+-as).

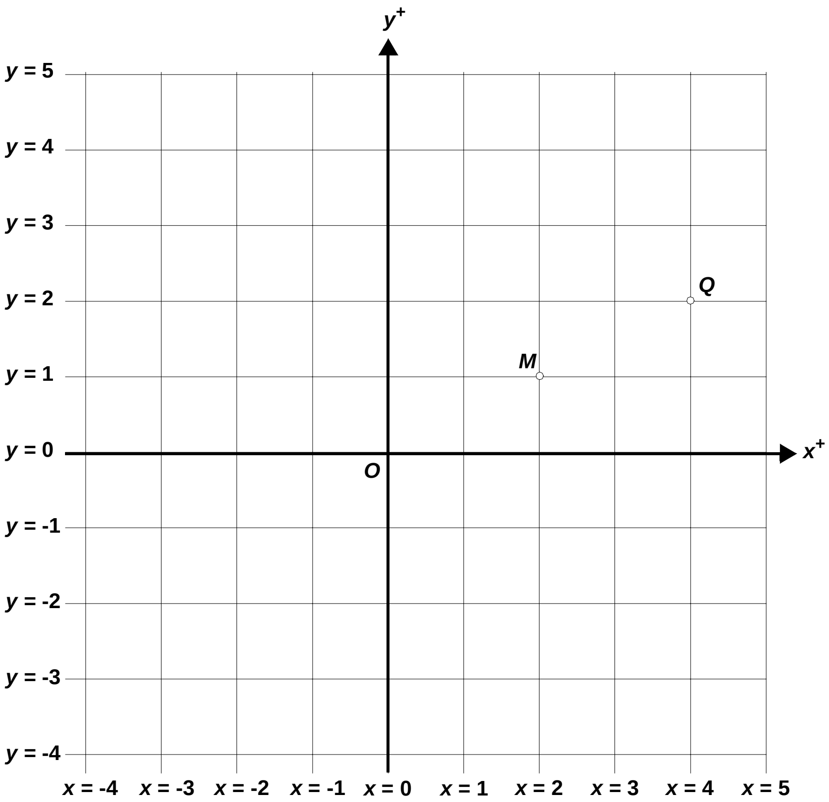
analytische voorstelling

Meetkundige begrippen zoals 'punt', 'rechte lijn', 'afstand', 'loodrecht', 'cirkel', 'rechthoekig gebied', 'hyperbool', ..., krijgen ten opzichte van zo'n assenstelsel een zogenaamde *analytische voorstelling.* Zo'n voorstelling kan weer zijn een vergelijking, een formule, een ongelijkheid, een parametervoorstelling of een combinatie van deze vormen. In dit hoofdstuk ga je analytische voorstellingen leren en gebruiken.

19: Afstanden, de cirkelvergelijking

rooster-lijnen, afstanden, Pythagoras

In het coordinatenstelsel zijn de zogenaamde *roosterlijnen* getekend. Die zijn een hulp bij het rekenen met *afstanden* in coordintanestelsel. Descartes geeft aan dat de stelling van *Pythagoras* hier onmisbaar is.



3 **a.** Verklaar dat in de voorbeeld figuur geldt: $d(Q,M) = \sqrt{5}$. Markeer de rechthoekige driehoek die je voor 'Pythagoras' hebt gebruikt.

b. Laat P nu een punt met de nog onbepaalde coordinaten (x, y) zijn. Druk de afstand van P tot M in x en y uit:

$d(P,M)$ = ...

Tip: denk aan de zijden van de te gebruiken rechthoekige driehoek.

c. Als we willen dat P op de cirkel met middelpunt M ligt die door Q gaat, dan weten we dat:

$$d(P,M) = \sqrt{5}$$

Descartes zegt: de gelijkstelling van die twee afstanden geeft de vergelijking van de cirkel. Stel die vergelijking op.

d. Al die afstanden zijn natuurlijk positief. Door kwadrateren (links en rechts) werk je dus veilig de wortels weg.
Teken de bedoelde cirkel in de figuur en schrijf de vergelijking er in de figuur bij.

terugblik

Om de afstand van M tot Q te bepalen gebruikte je de *horizontale* en *vertikale* afstand in het rooster; die vormen de rechthoekszijden van een driehoek. Die waren 2 en 1.
Bij de berekening van de afstand van $P(x, y)$ tot $M(2, 1)$ waren de *horizontale* en *vertikale* afstand de *absolute waarden* van de coordinaatverschillen:

$$|x - 2| \text{ en } |y - 1|.$$

Je afstandsformule was mogelijk dan ook deze:

$$d(P,M) = \sqrt{(|x-2|)^2 + (y-1)^2}$$

Vanwege de kwadraten zijn de absoluut-strepen niet nodig. De uiteindelijke vergelijking van de cirkel na het kwadrateren kon dus zijn:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

In deze vergelijking zijn de structuur van de stelling van Pythagoras en de horizontale en verticale afstanden nog goed te zien. Uitwerken van de haakjes-uitdrukkingen kán, maar is dus niet zonder meer een verbetering.

algemene vergelijking van de cirkel

4 Laat nu M het punt (a, b) zijn en r de straal van de cirkel met middelpunt M.
Stel de vergelijking van deze cirkel op.

5 **a.** Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(-5,2)$ en straal 13.
b. Beslis door invullen in de vergelijking of $P(6, 9)$ en $Q(7, 7)$ op deze cirkel liggen.
c. Beslis zonder tekenen door invullen of I(2, -9) binnen of buiten de cirkel ligt.

6 **a.** Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt M(-2, 3) die door (1, 7) gaat.
b. Hoeveel punten met gehele coordinaten liggen op deze cirkel?

van vergelijking naar figuur

een vergelijking stelt een figuur voor!

Je weet wel wat *voorgesteld* wordt door de vergelijking $y = 2x + 1$. Een rechte lijn, en wel die door de punten (0, 1) en (1,3).
Dat betekent dat al de punten (x, y) die aan de vergelijking voldoen, samen die lijn vormen.
Ook bij andere vergelijkingen kun je de vraag stellen: wat stelt het voor? Vooral als de vergelijking er anders uit ziet dan je denkt.

7 **a.** Toon aan dat deze vergelijking een cirkel voorstelt:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 51$$

b. Wat zijn middelpunt en straal?

8 Wat is de cirkel $x^2 + y^2 = 1$?

9 **a.** Toon aan dat voor elke a de cirkel

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

raakt aan de assen.
b. Van deze cirkels zijn er vier die raken aan de cirkel $x^2 + y^2 = 2$. Bepaal de twee positieve waarden van a waarbij dit raken plaats heeft. Maak een schetsje om het raakpunt te vinden.

10 Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt $(a, 0)$ die raakt aan de lijn $x = y$.

20: Rechte lijnen vinden

11 Welke lijnen worden voor gesteld door:

a. $x = 5$

b. $x = y$

c. $x = -y$

d. $y + 2 = 0$

rechte lijn door twee gegeven punten

We willen de vergelijking van een lijn bepalen die door twee gegeven punten gaat.
We doen dat in een paar stappen:

Eerst nemen we de oorsprong (0, 0) als een van de punten en
geven de lijn de juiste helling.
Daarna onderzoeken we wat er moet gebeuren om een lijn te verschuiven.

12 Lijnen door de oorsprong.
De vergelijkingen van de vorm $y = ax$ stellen lijnen voor door de oorsprong (0, 0).
Wat is a als de lijn door het punt (13, 5) gaat?

13 Een lijn verschuiven van de oorsprong naar een ander punt.
De lijn door (0, 0) en (2, 5) kunnen we zo voorstellen:

$$y = \frac{5}{2}x$$

a. We willen de lijn verschuiven, zo dat het punt op de oorsprong naar (4, 1) gaat.
Dat betekent

*Als (a, b) op de **nieuwe** lijn ligt, dan ligt (a – 4, b – 1) op de **oude** lijn,
en andersom*

Verklaar!

b. Waarom geeft

$$y - 1 = \frac{5}{2}(x - 4)$$

dus de gezochte vergelijking?

14 Een goede manier om de vergelijking op te stellen van een lijn door twee gegeven punten, is dus de volgende:

(1) bepaal eerst de richtingscoëfficiënt (Δy gedeeld door Δx)

(2) gebruik de vergelijking $y - y_0 = m(x - x_0)$; hierbij is m de gevonden richtingscoëfficiënt en zijn x_0 en y_0 de coördinaten van één van de twee punten.

a. Pas de methode toe om de vergelijking te vinden van de lijn door (-3, 2) en (5, 6).

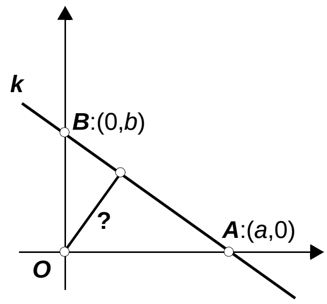
b. In welke situatie gaat deze methode mis? En hoe kun je dan toch direct een vergelijking van die lijn geven?

15 Onderzoek of de drie punten (5 , 8), (8 , 13) en (13 , 21) op één rechte lijn liggen.

de assenvergelijking van een rechte lijn

16 Deze vergelijking stelt ook een lijn voor: $2x + 5y = 1$.
- **a.** Wat zijn de snijpunten met de assen?
- **b.** Bedenk de vergelijking van de lijn die door de punten (1/3, 0) en (0, 1/7) gaat.
- **c.** Bedenk de vergelijking van de lijn die door de punten (2, 0) en (0, 3) gaat.

17 Laat k een rechte lijn zijn die niet door O gaat en die de x-as snijdt in $(a\ , 0)$ en de y-as in $(0\ , b)$.



- **a.** Toon aan dat $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

  een vergelijking is van die lijn.

  Opmerking:
  deze vergelijking wordt wel de '*assenvergelijking*' van de lijn genoemd. Deze voorstelling is alleen bruikbaar voor lijnen die niet door de oorsprong gaan.

- **b.** Bewering: de afstand van de oorsprong O tot k is gelijk aan:

$$\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

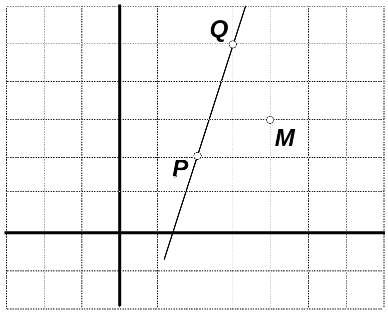
  Test deze formule voor $a = 1$ en $b = 1$.
- **c.** Nog een test: als a en b met dezelfde positieve factor worden vermenigvuldigd, moet dat ook met de afstand gebeuren. Controleer of dat zo is.
- **d.** Je zou deze formule kunnen bewijzen door een vergelijking op te stellen van de lijn door O die loodrecht staat op k en vervolgens de coördinaten van het voetpunt V van O te berekenen. Tenslotte kun je dan $|OV|$ vinden. Het rekenwerk hierbij is een beetje ingewikkeld. Als je je uitgedaagd voelt, moet je het maar proberen. Eenvoudiger gaat het echter door naar de oppervlakte van driehoek OAB te kijken.
  Die oppervlakte kun je op twee manieren bepalen: ten eerste met basis $|OA|$ en hoogte $|OB|$, ten tweede met basis $|AB|$ en hoogte $|OV|$. Daarmee kun je dan $|OV|$ vinden!

loodrecht snijden

18 Gegeven de punten P: (2 , 2) en Q: (3 , 5).

a. Geef een vergelijking van de lijn PQ.

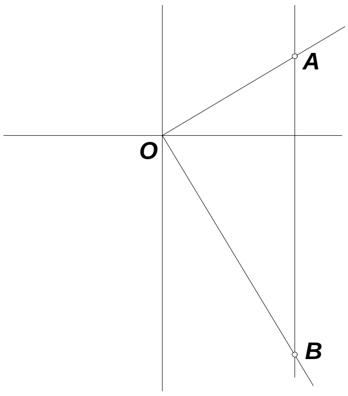
b. Door $M(4, 3)$ gaat juist één lijn die loodrecht op PQ staat. Er is gemakkelijk nog eenpunt aan te geven op die loodlijn.
Stel nu de vergelijking op van die loodlijn.



loodrechte lijnen

Kijk even terug naar opgave **18.**
De richtingscoëfficiënten van PQ en MN zijn respectievelijk 3 en $-\frac{1}{3}$.
De tweede is het *tegengestelde van het omgekeerde* van de eerste. Of, wat op hetzelfde neerkomt, het product van de twee richtingscoëfficiënten is gelijk aan −1.
Zoals de volgende opgave leert, geldt dit in het algemeen voor twee lijnen die loodrecht op elkaar staan (en die niet evenwijdig zijn met de coördinaatassen).

19 In een vierkant assenstelsel zijn gegeven de punten $A = (1, a)$ en $B = (1, b)$ zodanig dat de lijnen OA en OB loodrecht op elkaar staan.



a. In de figuur zijn a en b respectievelijk positief en negatief. Is het denkbaar dat a en b beide positief (of beide negatief) zijn?

b. Wat is de richtingscoëfficiënt van OA? En van OB?

c. Druk de $|OA|$, $|OB|$ en $|AB|$ uit in a en b.

d. Omdat driehoek AOB rechthoekig is in O, kun je de stelling van Pythagoras toepassen op die driehoek. Gebruik je resultaten van **c** en laat zien dat de hierboven aangekondigde wet voor de richtingscoëfficiënten van loodrechte lijnen klopt.

De volgende stelling is nu bewezen:

stelling

Als de lijnen l_1 en l_2 met richtingscoëfficiënten h_1 en h_2 (beide niet 0) loodrecht op elkaar staan, dan geldt:

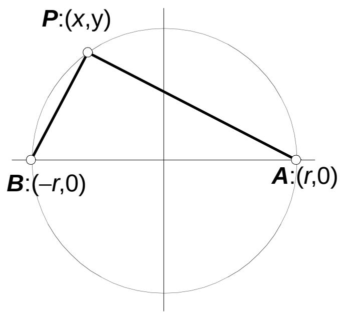
$$h_1 h_2 = -1$$

Omgekeerd:
Als het product van de richtingscoëfficiënten van twee lijnen gelijk is aan –1, dan staan die twee lijnen loodrecht op elkaar.

20 Dat de cirkel met middelpunt O en straal r analytisch kan worden voorgesteld door:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

volgt gemakkelijk uit de stelling van Pythagoras.
Er is nog een andere manier om deze vergelijking te vinden, namelijk met de stelling van Thales.
Stel A: $(r, 0)$ en B: $(-r, 0)$.
De punten P: (x, y) waarvoor geldt: $\angle APB = 90°$ vormen tezamen met A en B de cirkel met middelpunt O en straal r. Dat zegt de stelling van Thales.



a. De richtingscoëfficiënten van PA en PB kun je uitdrukken in x, y en r. Hoe?

b. Loodrechte stand betekent: product van de richtingscoëfficiënten is gelijk aan -1. Pas dit toe op het resultaat van **a** en leid opnieuw de cirkelvergelijking af.

c. Noem V het voetpunt van P op AB. Er geldt: $|PV|^2 = |AV| \times |BV|$.
Kijk je berekening bij **b** er nog eens op na of je dit resultaat (vertaald in algebra) kunt terugvinden.

de middelloodlijn van twee punten

Die kun je opstellen door:
– de lijn door de twee punten te bepalen,
– het midden te bepalen van de twee punten
– de loodlijn op de eerste lijn te bepalen die door het midden gaat.

Dat lukt vast wel, maar er is een aardige andere methode!

21 Daarbij maken we gebruik van het feit dat de middelloodlijn van twee punten de conflictlijn (of voronoi-grens) van die twee punten is.
Stel die punten zijn A: (3, 4) en B: (5, 2).
P: (x , y) is een conflictpunt, als (en alleen als) $d(P , A) = d(P , B)$.
Analytisch vertaald:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2}$$

Maar aan deze vergelijking zie je niet zoveel. Daarom is het zaak om deze vergelijking in een herkenbare vorm te krijgen.

a. De eerste stap die je kunt zetten, is het weglaten van de worteltekens. Waarom mag dat?

b. Werk de zo verkregen vergelijking uit, tot je de vergelijking van een rechte lijn hebt.

c. Je merkte dat de tweede graadstermen links en rechts wegvielen. Dat had je kunnen voorspellen. Hoe?

d. Controleer dat die lijn door het midden van A en B gaat en tevens loodrecht op AB staat.

22 Bepaal een vergelijking van de middelloodlijn van de punten $(-5 , 7)$ en $(3 , -3)$ door de middelloodlijn op te vatten als conflictlijn.

21: Vergelijking van de parabool

Nu ga je de methode om vergelijkingen van conflictlijnen te vinden, toepassen op de parabool. In de volgende paragraaf komen ellips en hyperbool aan de beurt.

belangrijke keuze: waar komt het assenstelsel te liggen?
Een belangrijke vraag vooraf is deze: hoe ga je het assenstelsel ten opzichte van de parabool leggen?
Eerdere ervaringen hebben je wel geleerd dat symmetrie tot eenvoudige berekeningen leidt. Conclusie: een as van het coordinatenstelsel gaat de symmetrie as worden van de parabool; neem bijvoorbeeld de y-as.
Verder is het net als bij lijnen handig als de parabool door (0, 0) gaat. Dat is namelijk een heel makkelijk in te vallen punt.

23 Je hebt nu nog de ligging van het brandpunt F in de hand. Laat dat (0, 1) zijn.
- **a.** De richtlijnl weet je nu ook. Maak een schets.
- **b.** Voer het standaardplan met de vergelijking d(....) = d(.....) maar uit om de vergelijking van de conflictlijn te vinden!

24 Achteraf blijkt dat je niet de allereenvoudigste paraboolvergelijking hebt gekregen. Hoe groot moet je de afstand top-brandpunt nemen om $y = x^2$ als vergelijking van de conflictlijn te vinden?

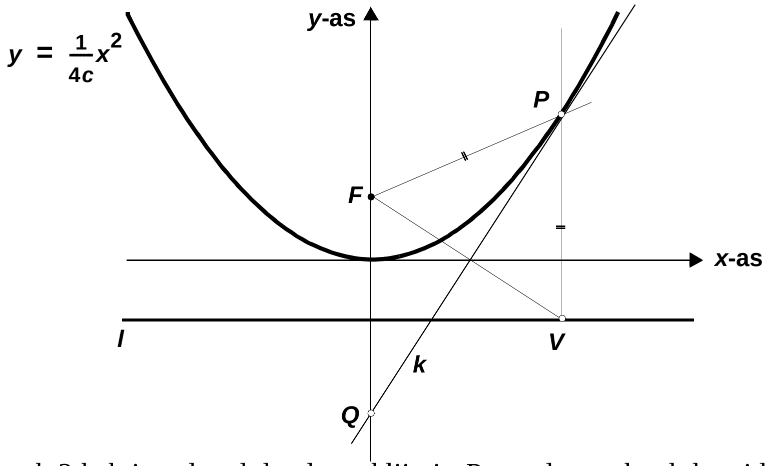
vergelijking parabool

Wat je in opgave **23** hebt gezien, kan wat algemener worden gesteld.
Laat de y-as de symmetrieas van een parabool zijn en de oorsprong de top.
Als het brandpunt F de coördinaten (0, c) heeft, dan is de analytische voorstelling van de parabool:

$$y = \frac{1}{4c}x^2$$

25 Geef een vergelijking van de parabool met brandpunt (4, 0) en richtlijn $x = -4$.
Kies de methode die jij het handigst vindt.

raaklijn parabool



In hoofdstuk 2 heb je geleerd dat de raaklijn in *P* aan de parabool de middelloodlijn is van *F* en *V*, waarbij *V* het voetpunt van *P* op de richtlijn is. In opgave **26** ga je controleren dat dit dezelfde raaklijn is, als de raaklijn die je bij de differentiaal- en integraalrekening bent tegengekomen.

26 Stel het punt $P\ (x_P\ , y_P)$ ligt op de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{4c}x^2$.

a. Stel de vergelijking op van de raaklijn-van-de-differentiaalrekening in het punt *P*. Noem die lijn verder *k*.

b. Deze snijdt de *y*-as in *Q*. De *y*-coördinaten van *P* en *Q* zijn aan elkaar tegengesteld. Laat dat zien dat klopt met behulp van de vergelijking door de raaklijn met de y-as te snijden.

c. Bewijs nu dat de lijnstukken *FQ* en *PV* even lang zijn.

d. Uit **b** volgt dat *k* inderdaad de middelloodlijn is van *FV*. Hoe? (Tip: let op vierhoek *FQVP*).

27 Er is nog een instructieve andere methode om analytisch te laten zien dat de middelloodlijn van *VF* een raaklijn aan de parabool is.

a. Stel de vergelijking op van die middelloodlijn van *VF*; je vindt zoiets als

y = lijnformule.

b. Die lijn snijden we met de parabool, maar we doen dat analytisch.
Dat wil zeggen dat we ook kijken naar de vergelijking van de parabool:

y =paraboolformule

Nu moeten we de *x* oplossen uit:

lijnformule = paraboolformule.

Probeer dit plan uit te voeren en zie of je de redenering af kan ronden om uit te komen op:

de mll(V, F) heeft precies één punt met de parabool gemeen.

c. Is dat voldoende bewijs voor ‘raken’?

22: Vergelijkingen van de ellips

De methode om langs analytische weg conflictlijnen te vinden, kan worden gebruikt om analytische voorstellingen van ellips en hyperbool te vinden. Het rekenwerk dat nodig is om een 'mooie' vergelijking te krijgen, vraagt wat meer uithoudingsvermogen dan in de voorbeelden van de vorige paragraaf.

ellips

Van de ellips heb je een definitie gezien als conflictlijn van een punt en een cirkel. Verder weet je dat de ellips twee symmetrieassen heeft. Daarmee heeft het assenstelsel zichzelf al bijna gekozen!

28 Neem nu de x-as langs de lange as en de y-as langs de korte as. Stel de afstand van een brandpunt F_1 tot oorsprong gelijk aan 4, zeg F_1: (4 , 0). De straal van de cirkel om het andere brandpunt (F_2) mag dan niet kleiner dan 8 zijn! Laat die straal bijvoorbeeld gelijk zijn aan 10.

a. Hoe lang zijn de beide assen van de ellips?

b. $P(x , y)$ is een conflictpunt van c en F_1 betekent dan hetzelfde als:

$$10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

Verklaar dit.

c. Het uitwerken hiervan tot een eenvoudige vergelijking valt niet mee. Als je links en rechts kwadrateert om de worteltekens weg te werken, blijf je nog met één wortelteken zitten. Schrijf de vergelijking op die zó ontstaat.

d. Als je nu 'schoon schip' maakt, nog een keer kwadrateert, en weer schoon schip maakt, krijg je deze vergelijking:

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

en dat kan ook zó worden geschreven:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Controleer dit alles.

e. Aan deze vergelijking kun je direct een paar dingen controleren, namelijk de symmetrie en de lengten van de assen. Hoe?

vergelijking ellips

In het algemeen kan worden bewezen dat een ellips waarvan de x-as en de y-as de symmetrieassen zijn, een vergelijking heeft van de vorm:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hierbij veronderstellen we $a > 0$ en $b > 0$.
Men spreekt wel van 'assenvergelijking' van de ellips.

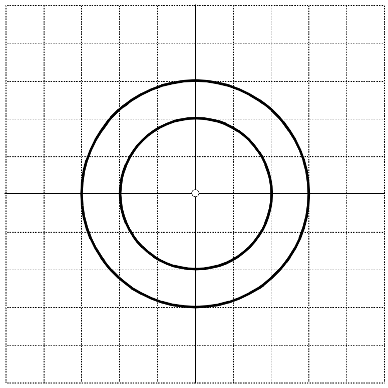
29 a. Hoe lang zijn de assen van de ellips met deze vergelijking?

b. Wat stelt deze vergelijking voor als $a = b$?

c. Je kunt zeggen: een ellips is een opgerekte cirkel. Verklaar dat uit de gevonden vergelijking.

30 Hiernaast zie je een tekening van de cirkels voorgesteld door:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$ en $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$.



a. Neem de figuur over en schets daarbij ook de ellips:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

b. Nu ook de ellips:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

c. De vier snijpunten van die twee ellipsen liggen symmetrisch rond de oorsprong, ze liggen weer op een cirkel. Zo'n snijpunt (x, y) voldoet aan beide vergelijkingen. Dus ook aan de vergelijkingin die je krijgt door de twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen.
Bepaal nu hoe ver die vier snijpunten van de oorsprong af liggen.

***abc* van de ellips**

31 Neem aan dat in de ellipsvergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ geldt $a > b$.

De lange as valt dan langs de x-as en de brandpunten liggen dus op die as.

a. Wat zijn de coördinaten van de vier toppen van de ellips?

b. Stel de afstand van de brandpunten tot de oorsprong gelijk aan c.
Bewijs dat geldt:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

32 Bereken de coördinaten van de brandpunten van de ellipsen in opgave **30**.

33 Van een ellips is (0 , 0) het middelpunt, (2,0) een top en $(\sqrt{3}, 0)$ een brandpunt.
Geef een vergelijking van deze ellips.

34 Bekijk op de GR (vierkant assenstelsel) de beweging volgens de formules:

$$\begin{cases} x = 13\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$$

a. De baan is een ellips. Hoe kun je dat zeker weten?

b. Welke punten zijn de brandpunten?

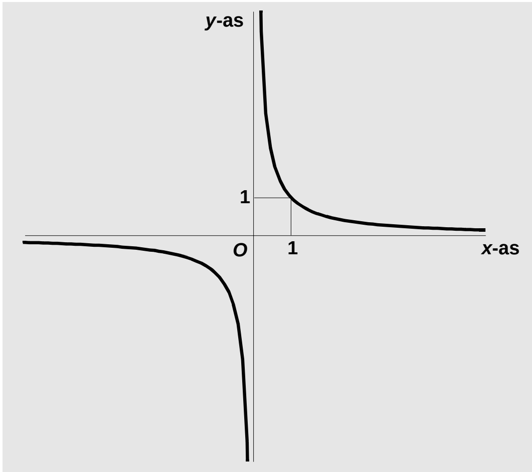
35 Gegeven zijn de cirkels c_1: $(x + 1)^2 + y^2 = 9$ en c_2: $(x - 1)^2 + y^2 = 25$.

a. Teken beide cirkels in een coördinatenstelsel.

b. Wat voor een soort kromme is de conflictlijn van beide cirkels?

c. Bepaal een vergelijking van die conflictlijn.

23: Vergelijking orthogonale hyperbool



Een hyperbool die je eerder bent tegengekomen, luistert naar de vergelijking: $y = \frac{1}{x}$ ofwel $xy = 1$.
In nog wat algemenere vorm is de vergelijking: $xy = c$, waarbij c een constante ongelijk aan 0 is.
Ook in de natuurkunde ben je deze kromme en een dergelijke formule tegengekomen bij de gaswet van Boyle (bij gegeven temperatuur geldt: *druk* × *volume =constant).*
Van zo'n hyperbool staan de asymptoten loodrecht op elkaar en daarom wordt het een *orthogonale hyperbool* genoemd (orthogonaal betekent loodrecht).

Verdient een kromme met vergelijking $xy = c$ inderdaad de naam hyperbool? Met andere woorden: beantwoordt de kromme aan de definitie zoals gegeven in het vorige hoofdstuk? Daarover gaat de volgende opgave.

36 a. Van een hyperbool zijn de coördinaatassen de asymptoten.
Welke lijnen zijn dan de symmetrieassen?

b. Veronderstel dat het brandpunt F_1 de coördinaten (2 , 2) heeft. Wat zijn de coördinaten van het andere brandpunt (F_2)?

c. We beperken ons nu tot de tak in het gebied $x > 0$ en $y > 0$. Die kun je opvatten als de conflictlijn van het punt (2 , 2) en een cirkel met middelpunt F_2.
Hoe groot moet de straal van die cirkel zijn?
(Raadpleeg zo nodig hoofdstuk 2).

d. Vertaal nu de conflictvoorwaarde in een x,y-vergelijking en werk deze uit. Als je geen rekenfouten maakt, moet je een vergelijking krijgen van de vorm $xy = c$!

Je weet nu zeker dat de hyperbool die je vroeger tegen bent gekomen, dezelfde is als de hyperbool (met onderling loodrechte asymptoten) van de standaarddefinitie.

De vorm $xy = c$ leert ons onmiddellijk een speciale eigenschap van de orthogonale hyperbool: *als je uit een punt P van de orthogonale hyperbool twee loodlijnen op de asymptoten neerlaat, dan vormen die samen met de asymptoten een rechthoek waarvan de oppervlakte onafhankelijk is van de plaats van P op de hyperbool.*

37 Dat is een ingewikkelde zin. Pluis die zin goed uit en ga zorgvuldig na of je het met de uitspraak eens bent.

24: Assenvergelijking hyperbool

Net als bij de ellips is de favoriete vergelijking van de hyperbool die, waarbij de coördinaatassen de symmetrieassen zijn. Om zo'n vergelijking op te stellen, kun je op dezelfde manier te werk gaan als bij de ellips. Brandpunten kiezen (op de *x*-as), conflictvoorwaarde opstellen, vergelijking uitwerken. Er komt dan tenslotte een vergelijking die heel erg lijkt op die van de ellips, met één belangrijk verschil: in plaats van een plusteken in het linkerlid, staat er een min. Dat wil zeggen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Net als bij de ellips is er ook weer een verband tussen de afstand van de brandpunten naar het centrum en deze *a* en *b*.

Voor de volledigheid formuleren we dat net als bij de ellips zo:

***abc* van de hyperbool**

Als *c* de afstand van het midden van de hyperbool tot een brandpunt is, dan geldt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

38 Gegeven de hyperbool met vergelijking: $4x^2 - y^2 = 4$.
- **a.** Wat zijn de coördinaten van de toppen en van de brandpunten?
- **b.** Wat zijn de vergelijkingen van de asymptoten?

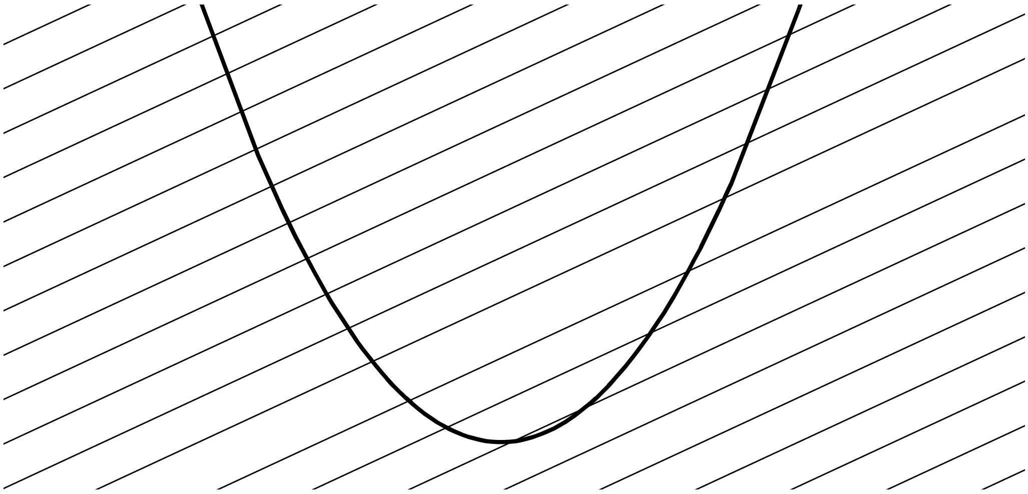
39 Bekijk op de GR (vierkant assenstelsel) de beweging volgens de formules:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\cos t} \\ y = 4\tan t \end{cases}$$

- **a.** De baan is een hyperbool. Verklaar dit door de *x*,*y*-vergelijking op te stellen.
- **b.** Wat zijn de vergelijkingen van de asymptoten?
- **c.** Wat zijn de coördinaten van de brandpunten?

25: Parametrisering als methode; vier verschillende voorbeelden

1: Parabool met bundel lijnen



40 Een parabool, gesneden door een bundel evenwijdige lijnen.

a. Een bijzonder fenomeen treedt op als je de middens bekijkt van het stuk van die lijnen dat binnen de parabool ligt.
Teken de middens en formuleer er een vermoeden over.

We gaan het vermoeden bewijzen met behulp van de analytische methode.
We nemen de parabool zo makkelijk mogelijk, het geval $y = x^2$. De lijnen hebben een vaste richtingscoefficient, zeg b.
Je kunt nu wel een algemene vergelijking maken voor de lijnen met een bepaalde richtingscoefficient, maar dan maak je niet handig gebruik van de parabool. Je rekenwerk gaat dan steevast ingewikkeld worden. Je moet dan namelijk bij het snijden van die lijnen met de parabool twee snijpunten vinden. Wortels komen dreigend binnen, toe maar. Handiger is één van de snijpunten er al van meet af aan in te stoppen door te kijken naar een lijn met r.c. b en gaande *door een punt van de parabool.* De truuk van ‘parametrisering’ is dat je het punt zó noteert, dat je al van te voren weet dat het op de parabool ligt.

Punten van de parabool zijn $(1, 1^2)$, $(3,3^2)$. enzovoort. Algemeen: (a, a^2).
We zeggen dat je met $P_a = (a, a^2)$ een parametrisering te pakken hebt. Als a alle getallen doorloopt, doorloopt P_a de hele parabool. Nu de uitvoering.

b. Stel de vergelijking op van de lijn met r.c. gelijk b, die door $P_a = (a, a^2)$ gaat. (Denk terug aan opgave 13, bladzijde 57).

c. Die lijn moeten we snijden met de parabool $y = x^2$. Invullen van x^2 in je lijn-vergelijken en oplossen naar x dus. Dat geeft in een vierkantsvergelijken.
MAAR: Van die vergelijking ken je al een oplossing, namelijk $x = a$.
Waarom is dat zo?

d. Los de vergelijking nu op, door de factor $x - a$ buiten haakjes te brengen.

e. Je hebt de x-coordinaat van het tweede snijpunt nu snel te pakken. Bepaal het midden van de x-coordinaten van dit snijpunt en het bekende snijpunt P_a.

f. Voltooi de redenering die tot een bewijs van het vermoeden leidt.

2: Alle parabolen zijn gelijkvormig

Je hebt gezien dat we alle parabolen kunnen voorstellen door een vergelijking van de vorm

$$y = \frac{1}{4c}x^2$$

Het gaat namelijk even om de vorm, niet om de positie.

Om te bewijzen dat alle parabolen gelijkvormig zijn, is het voldoende te bewijzen dat de parabool met vergelijking

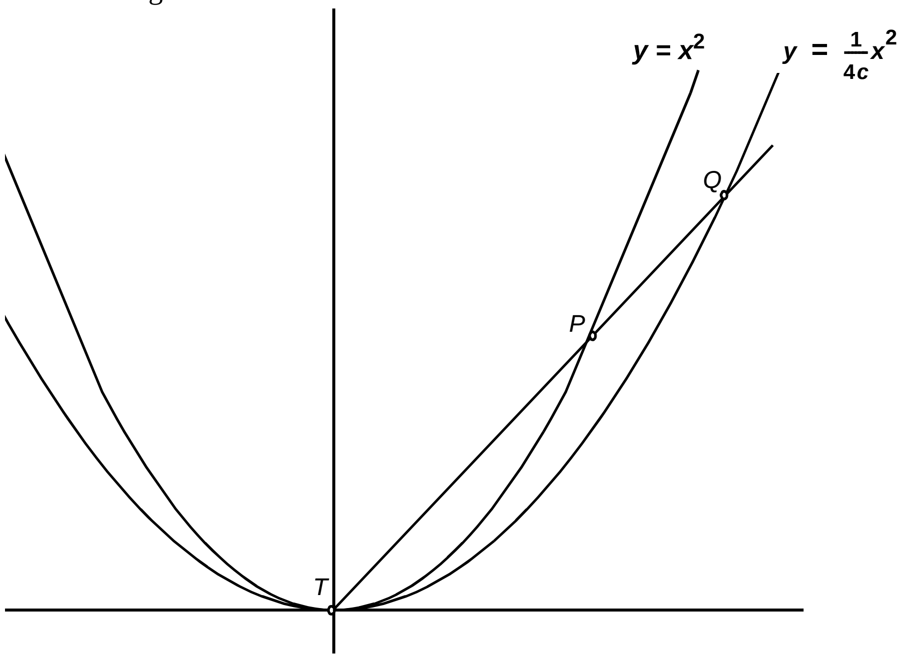
$$y = x^2$$

voor elke waarde van c gelijkvormig is met de parabool

$$y = \frac{1}{4c}x^2$$

De twee parabolen hebben de top en de symmetrie-as gemeen. Kunnen we de eerste parabool zo vanuit (0,0) opvermenigvuldigen met een factor, dat de tweede ontstaat?

41 Hier is een figuur.



De vermenigvuldigfactor zou moeten zijn $|TQ| / |TP|$. Die zou dan onafhankelijk van P moeten zijn. Maar uiteraard wel afhankelijk van c.

a. Neem de bekende parametrisering voor P , bereken dan de coorinaten van Q.

b. Is het nodig om de afstanden zelf uit te reken, of kunnen we bij berekening van $|TQ| / |TP|$ volstaan met de x-coordinaten?

c. Voltooi het bewijs.

3: Er is meer dan $3^2 + 4^2 = 5^2$

pythagoreïsche drietallen

Je kent vast wel de getalrelatie:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

en misschien ook nog

$$12^2 + 5^2 = 13^2 \text{ en } 21^2 + 20^2 = 29^2 .$$

Dergelijke drietallen hele getallen vormen een rechthoekige driehoek en heten daarom *pythagoreïsche drietallen.* Er zijn er meer:

$$335517^2 + 717956^2 = 792485^2$$

en ook:

$$13444655170416^2 + 27975811156937^2 = 31038762258505^2$$

Naar die laatste is natuurlijk eeuwenlang gezocht ?? Nee hoor, zoiets kun jij een opgaven verder zelf ook uitvinden. Met behulp van een snuifje analytische meetkunde!

een plan trekken

Het basis idee is dit:
Als $a^2 + b^2 = c^2$, dan ligt het punt $(a/c, b/c)$ op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.
We zoeken dus punten op die cirkel met gewone breuken als coordinaten.

Het werkt echter niet om naar punten van met de parametrisering $(a, \sqrt{1-a^2})$ te gaan zoeken. Want die wortel willen we juist kwijt! We zoeken een ander parametrisering, zonder wortels.

oplossing

We hebben gezien snijden van lijnen met de parabool makkelijk werd als we de lijn door een makkelijk punt van de parabool lieten gaan. Dan zag het tweede snijpunt er makkelijk uit. Dat kwam omdat de tweedegraadsvergelijking een al bekende factor had.

beter plan

Snijdt de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ met een lijn met r.c. = t die door het bekende punt (-1, 0) gaat. Het tweede snijpunt zal nu (mogelijk, nee zeker wel) te vinden zijn zonder wortel-berekeningen. Bij breuken t vinden we dan steeds wortelvrije snijpunten met de cirkel.

42 Uitvoering!

- **a.** Stel de vergelijking op voor de lijn met r.c. = t die door het punt (-1, 0) gaat, in de vorm y = ...
- **b.** Snijden met $x^2 + y^2 = 1$; dus invullen van $y = ...$ in deze cirkelvergelijking.
- **c.** Je hebt een vierkantsvergelijking in x, waarvan je weet dat $x = -1$ een oplossing is. Er moet dus de factor (x+1) uit te halen zijn. Doen!
- **d.** Je vindt nu $x = ...$, een uitdrukking in t. en daarbij snel y = ... , ook een uitdrukking in t.
- **e.** Vul maar eens t = 1/2 in om je punt op de cirkel te vinden.
- **f.** Maak van je oplossing een pythagoreïsch drietal en bouw een pythagoreïsch drietal met getallen van 6 cijfers.

Terugblik

Je hebt een probleem over vinden van bijzonder getalrelaties opgelost met behulp van de combinatie meetkunde+ algebra. Dat is bijzonder, maar het komt in de wiskunde heel vaak voor dat je methodes uit het ene gebied in heel andere gebieden gebruikt!

4: Het folium van Descartes

De volgende vergelijking in x en y is door Descartes bedacht.

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

Je zult wel geloven dat het geen cirkel, parabool, ellips of hyperbool voorstelt, want daarbij hoorden tweedegraadsvergelijkingen. Maar wat stelt het dan wel voor?

43 a. Er ligt zeker één makkelijk te vinden punt op de kromme, (0, 0). Vind nog een punt op de kromme met gehele coordinaten.

b. Waarom is de figuur die bij de vergelijking hoort symmetrisch in de lijn x = y ?

44 Omdat het punt (0, 0) wel heel simpel is, gaan we dat gebruiken op de manier als we (-1, 0) in het vorige probleem gebruikten. Kortom: we gaan op zoek naar de andere snijpunten van de kromme met de lijn $y = tx$ voor geven richting t.

a. Vul deze y in de vergelijking in en los x eruit op.
Je hebt nu een redelijk eenvoudige uitdrukking in t te pakken en je kunt ook een formule voor y vinden.

b. Het punt (270/152, 450/152) ligt ook op de kromme. Geef nog een punt met rationale coordinaten aan, gebruikmakend van je formules.

45 Je kunt nu gemakkelijk de kromme in beeld brengen op de GR.

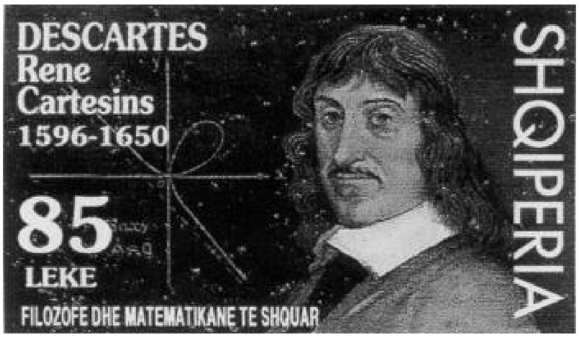
a. Kies bij MODE nu **Par**. (Van parametrisering).

b. Je kunt nu op het Y= scherm je formules invullen. X_{1T} en Y_{1T}.

c. In principe weet de GR nu genoeg om het commando **Graph** uit te voeren, maar je moet vast onder Window een en ander aanpassen. Laat T lopen van bijvoorbeeld -10 naar +10 en neem een stapje van 0.1

d. Schets je grafiek. Probeer uit te vinden in welke richtingen de kromme door de oorsprong gaat.

46 Bij het vinden van de uitdrukking in t voor x vielen er *twee* factoren x uit de vergelijking weg. (bij **44)** Hadden we misschien toch van de kromme al *twee* punten te pakken waar de lijn $y = tx$ doorheen ging?



De kromme met de fraaie lus heet het *Folium van Descartes*.
Zonder de hier gegeven parametrisering is het lastig de kromme te tekenen. De methode om getalsmatige oplossingen te vinden die aan dit soort vergelijkingen voldoen, werden al gebruikt door Diophantus van Alexandrie, dus in de derde eeuw na Christus. Franse wiskundigen van het kaliber Descartes en Fermat waren bekend met Diophantus en mogelijk tekende Descartes de kromme met deze methode.
In dit geval vond Descartes wel correct de lus in het 1e kwadrant, maar hij dacht dat in de andere kwadranten dezelfde lussen zouden liggen en kwam op een vierzijdig symmetrische bloemfiguur uit. Zijn postzegel (uit Albanië) doet het beter.

26: Gewogen afstanden, andere conflicten

Stel je voor twee provinciehoofdsteden A en B, die hemelsbreed een onderlinge afstand van 120 km hebben. Stad A heeft twee keer zoveel inwoners als B. Om een nieuwe grens tussen de provincies van A en B te bepalen, spreekt men het volgende af: plaatsen die in de provincie van A liggen, mogen een twee keer zo grote afstand tot de hoofdstad hebben als plaatsen in de provincie van B.
Anders gezegd:
het punt P is een '2-*conflictpunt*' van A en B, als (en alleen als) $\mathrm{d}(P, A) = 2 \times \mathrm{d}(P, B)$.

We nemen nu verder A = (0, 0) en B = (6n!, 0)

47 De vraag is natuurlijk hoe de grens eruit komt te zien en waar ze precies moet liggen.
- **a.** Op de rechte lijn tussen A en B kun je direct een 2-conflictpunt P_1 aanwijzen. Welk punt is dat?
- **b.** Iemand oppert dat de loodlijn door P_1 op AB dan wel de conflictlijn zal zijn. Waarom is dit niet waar?
- **c.** Voorbij B kun je ook een 2-conflictpunt op de lijn AB aanwijzen!
- **d.** Maak een schets van wat je ongeveer verwacht als 2-conflictlijn.

Terug naar het probleem van opgave **47.** Om de analytische vertaling te kunnen maken, moet er een assenstelsel worden gekozen. Dat kan op talrijke manieren. Het is echter belangrijk dat je dit niet lukraak doet, maar het assenstelsel zó kiest dat het rekenwerk redelijk 'loopt' en de resultaten een betrekkelijk eenvoudige vorm krijgen. Vaak kun je al veel bereiken (nog voordat je iets hebt uitgerekend!), door te letten op bijzondere punten en op *symmetrie* van de figuur.

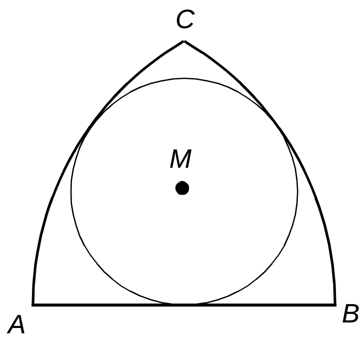
48 Nu gaan we verder met de analytische methode, door $\mathrm{d}(P, A) = 2 \times \mathrm{d}(P, B)$ in een vergelijking in x en y te vertalen.
- **a.** Noteer de vergelijking en breng die in een handzame vorm; je zult nu merken dat de kwadratische termen niet wegvallen.
- **b.** Wat stelt de vergelijking voor?

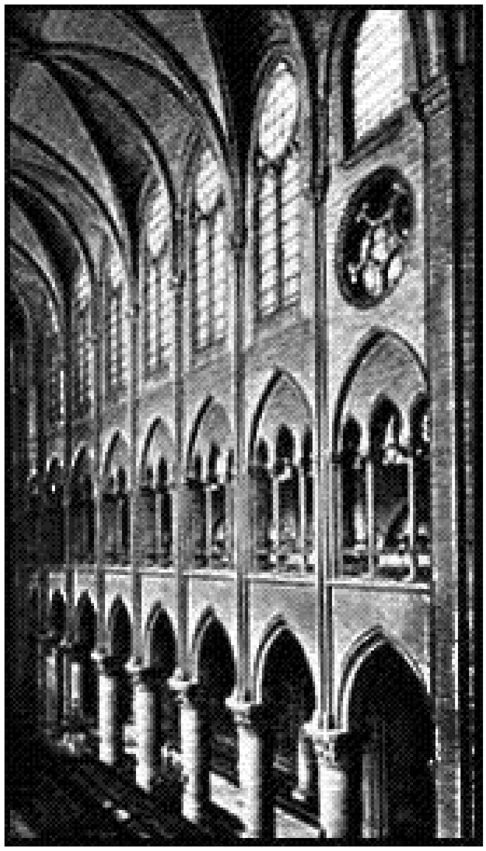
De conflictlijn die je nu gevonden hebt, staat bekend als de *cirkel van Apollonius*.
Apollonius was een Grieks wiskundige die je een echte specialist op het gebied van parabolen, ellipsen en hyperbolen zou kunnen noemen. Maar in de Griekse wiskunde maakte men geen gebruik van analytische methoden. Apollonius vond de naar hem genoemde cirkel dan ook langs 'zuiver' meetkundige weg.

49 Echt heel heftig was de algebraïsche exercitie toch eigenlijk niet en we vonden wel mooi een verassend resultaat. Bereid een antwoord voor op de volgende vraag en stellingname, want daar gaan we even over praten.
- **a.** Dat het een cirkel is, die 2-conflictlijn, dat weten we nu. Vraag: BEGRIJP je nu waarom het een cirkel is?
- **b.** *Stellingname 1*: gewone meetkunde leidt tot overloos zoeken bij zo'n vraagstuk als dit. De analytische manier is veel efficienter.
- **c.** *Stellingname 2:* de analytische meetkunde is meetkunde voor iedereen. Met hard werken los je alles op. Je hoeft niet zoveel hersens er voor te hebben.

27: Gotisch venster maken met aan parabool als hulp

Een van de standaardvormen van een Gotisch venster bestaat uit een symmetrische ‘driehoek’ *ABC* waarvan de opstaande zijden geen rechte lijnen, maar cirkelbogen zijn, met een ingeschreven cirkel. In de illustratie hiernaast zie je zulke vensters.
In de volgende opgaven ga je uitzoeken hoe je zo’n figuur kunt construeren.





Stel d(*A*,*B*) = *r*.
De cirkelboog *BC* is een deel van de cirkel met middelpunt *A* en straal *r*.
Je kunt nu wel raden hoe het zit met de cirkelboog *AC*.

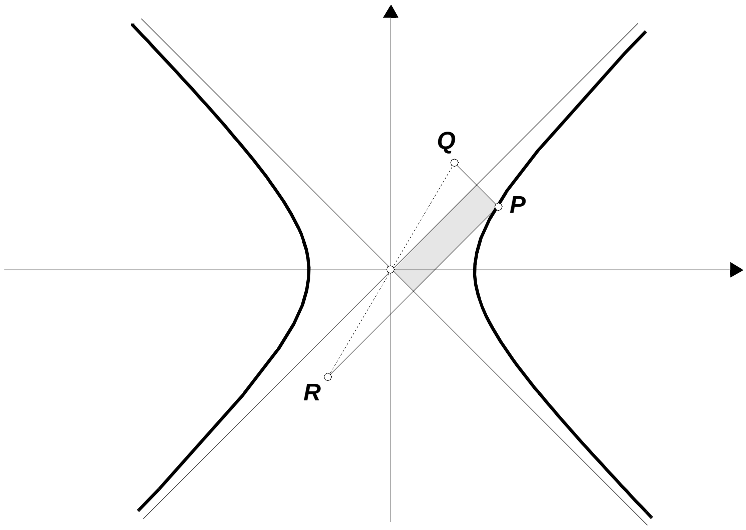
d. Construeer nu zelf zo’n Gotische driehoek met de passer.
e. Om nu de ingeschreven cirkel te kunnen construeren, moet je weten wat de hoogte van het middelpunt boven de basis *AB* is. Je kunt dit doen met de analytische methode. Dus moet je de figuur nu eerst in een assenstelsel plaatsen.
Maak zelf een keus voor het assenstelsel.
f. Wat zijn nu de coördinaten van *A* uitgedrukt in *r*? En van *B*?
g. Het middelpunt *M* van de ingeschreven cirkel ligt even ver van lijnstuk *AB* als van boog *BC*. Bereken de coördinaten van het punt *M*, uitgedrukt in *r*.

50 De figuur van opgave lijkt op een driehoek met een ingeschreven cirkel.
Zoals je weet is het middelpunt van een ingeschreven cirkel het snijpunt van de drie bissectrices.
De bissectrice uit een hoekpunt was (ook) de lijn van punten die gelijke afstanden hadden tot de in dat hoepunt samenkomende zijden.

a. Welke vorm hebben de ‘bissectrices’ van het Gotisch venster?
b. Geef van elk van die ‘bissectrices’ een vergelijking.
c. De ‘bissectrice’ uit *A* snijdt de lijn *AB* nogmaals. Waar?

28: Extra’s over de hyperbool

Zoals bij de ellips het geval $a = b$ bijzonder is (een cirkel), zo geeft $a = b$ bij de hyperbool ook een bijzonder exemplaar, namelijk de orthogonale hyperbool.
Door gebruik te maken van de ‘rechthoek-met-constante-oppervlakte’ (zie **37**) kunnen we deze laatste opmerking met heel weinig rekenwerk bewijzen.



51 In de figuur zie je de hyperbool die je krijgt als de hyperbool $xy = 1$ over een hoek van –45° wordt gedraaid. De oppervlakte van de grijze rechthoek = 1.

a. Welke vergelijkingen hebben de asymptoten?

b. Een willekeurig punt P: $(x\ ,y)$ wordt gespiegeld ten opzichte van de beide asymptoten. Dat geeft de punten Q en R. Wat zijn de coördinaten van Q en R?

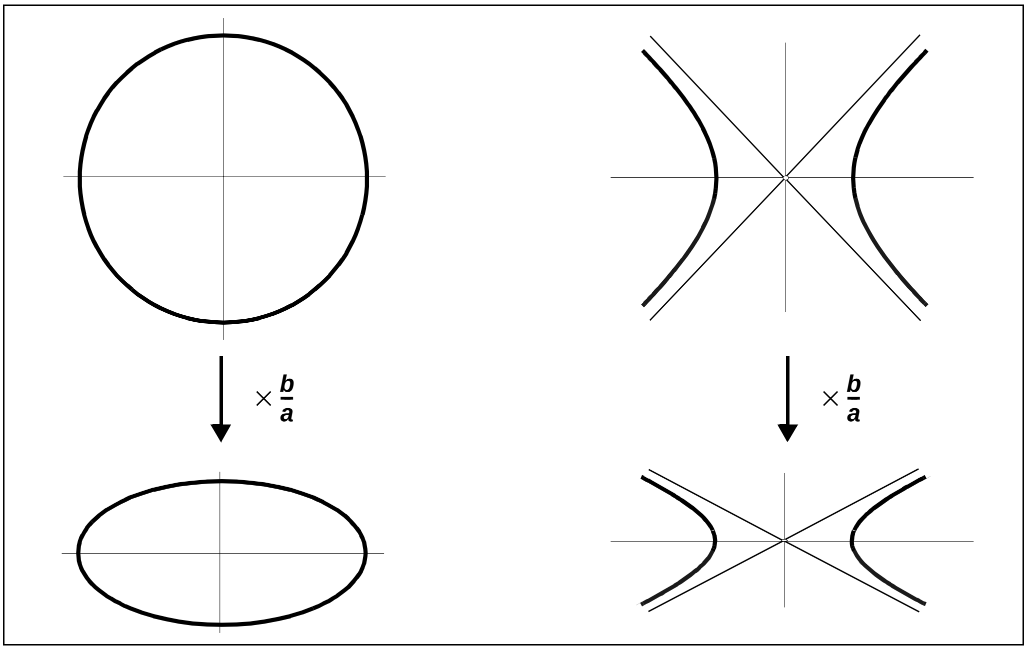
c. De oppervlakte van de grijze rechthoek is precies de helft van de oppervlakte van rechthoekige driehoek PQR. Verklaar dit.

d. Met de afstandsformule kun je de rechthoekszijden PQ en PR berekenen.
Controleer dat die gelijk zijn aan $|x - y|\sqrt{2}$ en $|x + y|\sqrt{2}$.

e. Verklaar hieruit dat de hyperbool de vergelijking $x^2 - y^2 = 2$ heeft.

scheve hyperbool

Zoals je een willekeurige ellips door rekken/krimpen uit de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ kunt laten ontstaan, zo kun je een willekeurige hyperbool krijgen door rekken/krimpen van de orthogonale hyperbool $x^2 - y^2 = a^2$. Kijk naar het plaatje op de volgende bladzijde.
De asymptoten maken dan niet langer een rechte hoek en men spreekt wel van een *scheve hyperbool*.



cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ ***orthogonale hyperbool*** $x^2 - y^2 = a^2$

↓   ↓

rekken / krimpen   *rekken / krimpen*

↓   ↓

ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ***scheve hyperbool*** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

52 a. Wat zijn de coördinaten van de toppen van de hyperbool: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

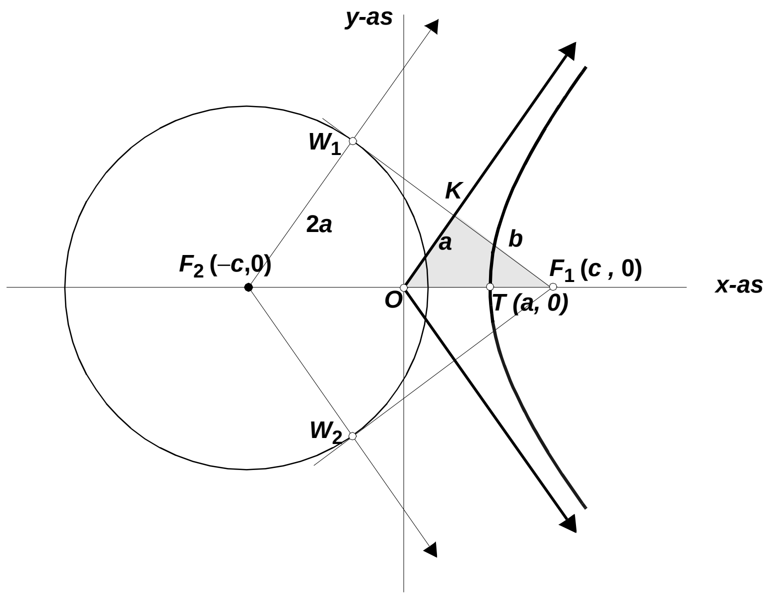
b. De lijnen met vergelijking $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ en $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ zijn de asymptoten van de hyperbool. Verklaar dit uit bovenstaande figuur.

asymptotisch gedrag

In hoofdstuk 2 (opgave 25, bladzijde 31) is met meetkundige middelen aangetoond dat de twee asymptoten van een hyperbool terecht die naam dragen. Dat wil zeggen dat de hyperbool die lijnen *willekeurig dicht* benadert. We kunnen dit nu ook analytisch laten zien.
Als je een punt met positieve coördinaten over de hyperbool $xy = 1$ laat wandelen, zó dat de x-coördinaat onbeperkt groter wordt, dan wordt de afstand tot de x-as onbeperkt klein. Als je bijvoorbeeld een punt op de hyperbool zoekt dat op 0.00 000 0001 van de x-as ligt, dan lukt dat. De x-coördinaat moet eenvoudig het omgekeerde van dit getalletje zijn, dus 1000 0000 00.

We zeggen nu: *y nadert tot 0 voor x nadert tot ∞.*
Ook geldt: *x nadert tot 0 voor y nadert tot ∞.*
Daarmee is aangetoond dat een orthogonale hyperbool twee asymptoten heeft.
Een scheve hyperbool ontstaat door rekken of krimpen uit een orthogonale hyperbool en erft als het ware de asymptotische eigenschap. Immers de rek- of krimpfactor is constant en de afstand van een punt van de hyperbool tot een asymptoot wordt dan met die constante vermenigvuldigd. Maar dat is niet van invloed op het ‘willekeurig klein’ worden van de afstand.

53



Dit plaatje heb je ook in hoofdstuk 2 kunnen bewonderen, afgezien van het assenstelsel dat is toegevoegd.
De brandpunten van de hyperbool hebben de coördinaten (c , 0) en ($-c$, 0).
De hyperbooltak is de conflictlijn van de cirkel met straal r om F_2 en het punt F_1.
De top T van de hyperbooltak heeft de coördinaten (a , 0).
De asymptoten hebben de vergelijking: $y = \pm\frac{b}{a}x$

a. Toon aan dat geldt: $r = 2a$ (aanwijzing: gebruik het conflictpunt T).
b. Een van de asymptoten is de middelloodlijn van F_1 en W_1. Daaruit volgt dat de afstand van O tot K (zie figuur) gelijk moet zijn aan a. Verklaar dit.
c. Let nu op het grijze rechthoekige driehoekje OKF_1.Van twee zijden van die driehoek weet je nu de lengte; zijde OF_1 heeft lengte c en zijde OK de lengte a. Waarom moet de derde zijde F_1K gelijk zijn aan b?