Discrete dynamische systemen: wiskundige modellen met rijen, vectoren en matrices
Deel 1: rijen en recursievergelijkingen

Inhoud

1. Inleiding
2. Tabellen en grafieken
3. Een spinnenwebdiagram
4. Een economisch probleem
5. Analytisch oplossen van eenvoudige recursievergelijkingen
6. Stelsels van recursievergelijkingen en matrices
7. Een recursievergelijking van de tweede orde
8. Een niet-lineaire recursievergelijking
9. Een differentiaalvergelijking oplossen m.b.v. een recursief voorschrift

1. Inleiding

Eindtermen en leerplannen

Vanaf het schooljaar 2004-2005 zijn de eindtermen in het vijfde jaar van kracht en vanaf 2005-2006 worden ze van kracht in het zesde jaar. Eén van deze eindtermen (decretale specifieke eindterm nummer 18 om precies te zijn; alleen van toepassing voor studierichtingen met pool wiskunde) draagt als titel *discrete wiskunde* en luidt als volgt:

> *De leerlingen kunnen telproblemen of problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig modelleren en oplossen.*

Telproblemen worden van oudsher behandeld in ons onderwijs. Het andere onderwerp uit de eindterm, discrete veranderingsprocessen, is nieuw. Het is de bedoeling van deze tekst om leerkrachten te helpen bij het vormgeven van dit nieuwe onderwerp.

Op basis van de eindtermen zijn leerplannen geschreven. In de leerplannen voor het gemeenschapsonderwijs blijft de discrete wiskunde beperkt tot de telproblemen (wat perfect kan wegens de ‘of’ in de eindterm). In het vrij onderwijs heeft men er voor geopteerd om het nieuwe onderwerp discrete veranderingsprocessen op te nemen bij de verplichte leerstof voor de 6-urencursus. De doelstellingen in dat verband zijn:

- De leerlingen kunnen de convergentie of divergentie van een rij met voorbeelden illustreren. (DI1)
- De leerlingen kunnen limieten van eenvoudige rijen bepalen. (DI2)
- De leerlingen kunnen problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig modelleren en oplossen. (DI3)

Er is in de 6-urencursus in het vrij onderwijs daarnaast ook een keuzeonderwerp iteratie voorzien dat hier heel nauw bij aanleunt. Discrete veranderingsprocessen en/of iteratie komen ook voor als keuzeonderwerp in andere leerplannen voor het vrij onderwijs (4-uurscursus, sommige leerplannen uit TSO/KSO). Sommige delen van deze tekst zijn allicht ook bruikbaar voor vrije-ruimte-doeleinden of als facultatieve uitbreiding.

Leidraad bij een tekst met basis en uitbreiding

De kern van deze tekst bestaat uit de paragrafen 2, 3 en 5.

- In paragraaf 2 leggen we de basis. Voorbeelden van eenvoudige discrete dynamische processen worden uitgewerkt. Aan de hand van *grafieken en tabellen* onderzoeken we de evolutie van grootheden die door een recursief voorschrift beschreven worden. We putten hierbij uit diverse contexten (groeiprocessen, een toepassing uit de financiële wereld, opname van een medicijn, torens van Hanoi, …).
- Paragraaf 3 is gewijd aan een alternatieve grafische voorstelling die in de context van discrete veranderingsprocessen veel gebruikt wordt, namelijk het *spinnenwebdiagram*.
- In paragraaf 5 leer je hoe je (in eenvoudige gevallen) een *recursief voorschrift omzet in een expliciet voorschrift*. Hier krijg je ook een zicht op de verschillende mogelijkheden voor het verloop van de onderzochte grootheid.

De andere paragrafen zijn boeiende uitbreidingen van dit kernmateriaal.

- Paragraaf 4 is gewijd aan een mooie en uitgebreide *toepassing uit de economie*. Omdat we hier alleen gebruik maken van tabellen, grafieken en spinnenwebdiagrammen en nog geen omzetting maken naar een expliciet voorschrift, hebben we deze paragraaf nog vóór paragraaf 5 geplaatst. Geen enkele van de volgende paragrafen maakt gebruik van het materiaal in deze paragraaf.
- In paragraaf 6 laten we zien hoe discrete dynamische processen *een nieuw licht werpen op matrixmodellen*, een vertrouwd onderwerp. Deze paragraaf heb je nodig om de volgende paragraaf te begrijpen.
- In paragraaf 7 zoeken we een *expliciet voorschrift voor de rij van Fibonacci*. Deze rij wordt bepaald door een recursief voorschrift dat ingewikkelder is dan de recursieve voorschriften uit paragraaf 5. Om paragraaf 7 te kunnen begrijpen, moet je de voorgaande paragraaf gelezen hebben.
- Ook paragraaf 8 is gewijd aan een recursief voorschrift dat ingewikkelder is dan die uit de basisparagrafen. In deze paragraaf komen enkele minder triviale facetten van *iteratie* aan bod. Om deze paragraaf te kunnen begrijpen heb je als voorkennis enkel paragraaf 2 en 3 nodig.
- In paragraaf 9 laten we *een verband* zien *tussen differentiaalvergelijkingen en recursievergelijkingen*. Zowel differentiaalvergelijkingen als recursievergelijkingen beschrijven veranderingsprocessen, de ene continu en de andere discreet. De link naar differentiaalvergelijkingen mag in deze tekst dan ook niet ontbreken. In deze paragraaf lossen we een differentiaalvergelijking numeriek op m.b.v. een recursief voorschrift. De paragrafen 2 en 3 volstaan als voorkennis voor deze paragraaf.

Met computer en/of grafische rekenmachine!

In deze tekst is het gebruik van een grafische rekenmachine en/of computer geïntegreerd. We maken vooral kwistig gebruik van onze grafische rekenmachine. Een deel van het materiaal dat we uitgewerkt hebben, is bruikbaar zonder rekentoestellen, maar voor het grootste deel is elektronische reken- en tekenhulp zeer nuttig of zelfs onontbeerlijk.

De grafische rekenmachines die we kennen, zijn goed uitgerust voor het onderwerp dat we in deze tekst behandelen. We maken in de tekst gebruik van een TI83/84-Plus van Texas Instruments.

Rekenbladen (spreadsheets, bijvoorbeeld Excel) zijn bij uitstek geschikt voor het werken met recursieve (en andere) formules en voor het maken van bijbehorende grafische voorstellingen. Wat we in deze tekst met een grafische rekenmachine doen, kun je voor een groot deel ook met zo’n rekenblad doen. Eén keer maken we er zelf ook gebruik van in deze tekst. Wat (ons) met een rekenblad niet lukt, is het maken van een spinnenwebdiagram.

2. Tabellen en grafieken

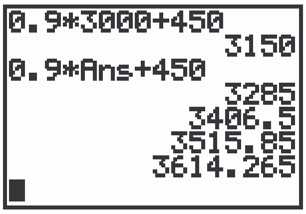
In deze paragraaf leggen we de basis van het leren redeneren met discrete dynamische processen. We starten met een voorbeeld waarbij de leerlingen een tabel en een grafiek maken van een discreet dynamisch proces.

Een bos beheren

Op een perceel staan 3000 kerstbomen. Een boomkweker moet beslissen hoeveel bomen er jaarlijks gekapt kunnen worden en hoeveel nieuwe aanplant er nodig is. Hij zal niet alle bomen in één keer kappen want dan heeft hij de eerstvolgende jaren geen opbrengst. Hij besluit elk jaar 10% van de bomen te kappen en er dan weer 450 aan te planten. Hij plant dus meer dan hij kapt om zijn opbrengst op termijn te verhogen. Op het perceel is namelijk plaats voor 5000 bomen.

1. Hoeveel bomen staan er één jaar later op het perceel? En twee jaar later?
2. Onderzoek hoe het aantal bomen op dit perceel de volgende twintig jaar evolueert. Schrijf je antwoorden in een tabel en maak daarbij een grafiek. Hiervoor kun je goed gebruik maken van de ANS-knop van je rekentoestel.

   (De bedoeling is dat de leerlingen zelf ontdekken dat steeds dezelfde berekening moet uitgevoerd worden.)



3. Kan de boomkweker zijn beleid blijven voortzetten of staat het perceel na een tijd vol?

   (Het aantal bomen neemt wel steeds toe maar het lijkt niet boven de 5000 te komen.)
4. Op een gegeven moment lijkt er een evenwicht te ontstaan. Hoeveel bomen staan er dan op het perceel?

   (ongeveer 4500)
5. Het is niet eenvoudig om een direct verband te vinden tussen het aantal bomen B en de tijd t (in jaren). Maar je kunt $B(t)$ wel schrijven in functie van $B(t-1)$. Geef deze formule.

   ($B(t) = 0{,}9 \cdot B(t-1) + 450$)

Samen met de beginwaarde ($B(0) = 3000$) geeft deze formule een model voor het verloop van het aantal kerstbomen op dit perceel. Het complete model voor het aantal bomen op dit perceel is dus:

$$\begin{cases} B(0) = 3000 \\ B(t) = 0{,}9 \cdot B(t-1) + 450 \end{cases}$$

De tijd wordt hierin in vaste stappen van 1 jaar doorlopen. Men noemt zo'n model een *discreet dynamisch model*. Het woord 'dynamisch' slaat daarbij op de verandering. Het woord 'discreet' slaat op het feit dat het aantal bomen niet voortdurend verandert, maar met vaste tussenstappen. (Het model houdt enkel rekening met jaarlijkse momentopnames; wanneer de bomen in de loop van het jaar precies gekapt of bijgeplant worden, vertelt dit model niet. Zoals dit steeds het geval is bij een wiskundig model, wordt de werkelijkheid vereenvoudigd om er beter vat op te krijgen.)

De formule waarmee je de nieuwe waarde uitdrukt in functie van zijn voorganger, wordt een *recurrente betrekking* of *recursief voorschrift* genoemd.

In de bovenstaande werktekst maken de leerlingen een tabel en een grafiek van een discreet dynamisch proces zonder gebruik te maken van een voorschrift. Op basis van de tabel en de grafiek gaan de leerlingen al wel op zoek naar een recursief voorschrift. De gebruikte aanpak sluit nauw aan bij het herkennen van patronen en het opstellen van formules bij die patronen uit de eerste graad. De leerlingen die in de tweede graad leerweg 5 (VVKSO) volgden, hebben bij het onderdeel rijen ook kennis gemaakt met zulke processen. Het dynamische karakter (de evolutie in de tijd, verandering) staat in de tweede graad niet op het programma.

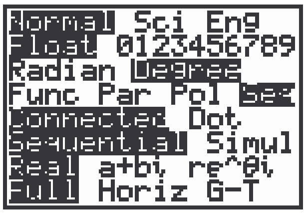
In een eerste fase laten we de leerlingen termen van discrete dynamische processen berekenen en grafische voorstellingen maken. In verschillende voorbeelden vertrekken zij van de beginwaarde en passen ze hierop herhaaldelijk de recursievergelijking toe (via gewone berekeningen, grafische rekenmachine en/of spreadsheet).

In de volgende werktekst geven we aan hoe je de grafische rekenmachine kunt gebruiken om recurrente betrekkingen te bestuderen.

Recurrente betrekkingen en een grafische rekenmachine

Je kunt recurrente betrekkingen ook in je *rekentoestel* invoeren. Hiervoor moet je eerst de juiste `MODE` instellen.

1. Druk op de `MODE`-toets en kies op de vierde regel `SEQ` (van ‘sequence’, het Engels voor rij).



Als je nu de `Y=` toets indrukt, verschijnt in het venster o.a. ‘$u(n)$ =’ in plaats van het bekende ‘Y1=’.

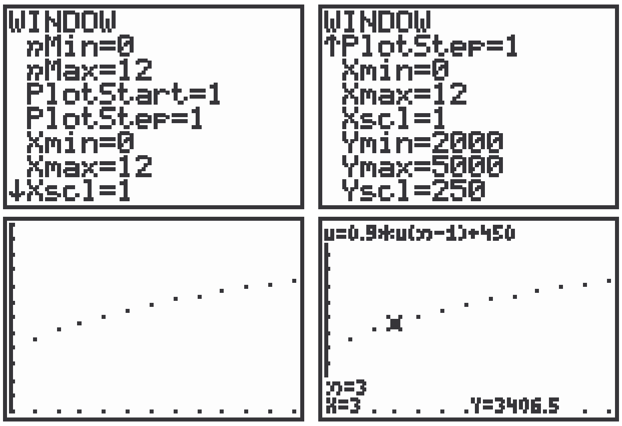
2. Vul op de plaats van ‘$u(n)$ =’ de recurrente betrekking van de kerstbomen in. u vind je bij `[2nd][7]` en de veranderlijke n verschijnt bij de `[X,T,θ,n]`-toets.

Vervolgens moet je nog de beginwaarde van n instellen (nMin) en de waarde van u bij die beginwaarde (u(nMin)).

3. Welke getallen zijn dat voor het probleem van de kerstbomen? Voer ze ook in.

   (In het volgende schermpje is dit gebeurd.)

Vervolgens kun je een tabel en een grafiek van de recurrente betrekking laten maken. Voor de grafiek moet je nog een goed tekenvenster kiezen. Hieronder zie je hoe dit gebeurt. Met `GRAPH` wordt de grafiek van de recurrente betrekking gemaakt. Met `TRACE` kun je zoals bij functies ‘over de grafiek lopen’.



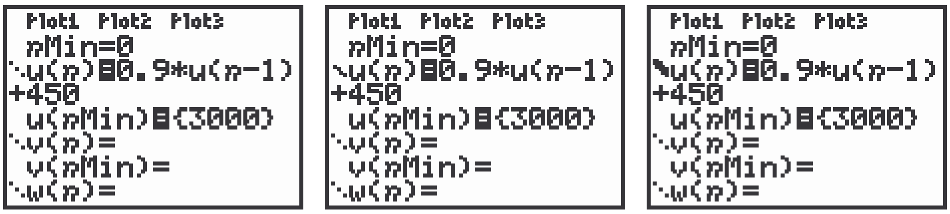
Met ‘PlotStart’ stel je in vanaf welk element van de rij het tekenen moet starten. Omdat we $u(0)$, het *eerste* element van de rij ook willen laten tekenen, staat PlotStart op 1.

4. Onderzoek zelf de betekenis van de andere waarden.

   (Op de X-as staan de waarden van n en Xmin en Xmax neem je daarom gelijk aan nMin en nMax. Op de Y-as de waarden van u(n). PLOTSTEP *geeft aan met welke stappen van n de rij u(n) getekend moet worden.)*

Opmerkingen:

- Hierboven werden enkel de punten van de rij getekend, ze werden niet verbonden. Als er bij jou (of een van je leerlingen) wel lijnstukjes tussen de punten worden getekend, moet je een instelling aanpassen. Ga daarvoor met de cursor voor u(n) in het onderstaande scherm staan en druk op enter. Je zult zien dat je zo de stijl van de grafiek zoals bij functies kunt aanpassen.



- In de werktekst over de kerstbomen schreven we $B(t)$ in functie van $B(t-1)$. Soms beschrijft men een dynamisch proces ook met een formule voor $u(n+1)$ in functie van $u(n)$. Voor het gebruik van de TI-83 moet die formule dan aangepast worden.

Vervolgens kunnen de leerlingen een aantal andere modellen doorrekenen en kan er verwezen worden naar de studie van rijen in het vierde jaar. We werken nog een voorbeeld uit in de vorm van een werktekst.

Sparen

Op een dag besluit Hans om te sparen voor een auto. Vanaf dat moment zet hij op het einde van elke maand €50 op een rekening. Op die rekening krijgt hij 0,4% rente per maand en wordt de rente per maand bijgeschreven.

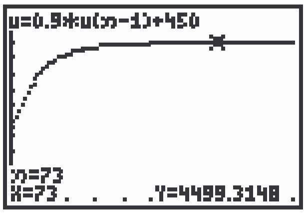
1. Bereken de evolutie van het geld op deze rekening in de eerste drie maanden.
2. Stel een formule (recurrente betrekking) op voor deze situatie. Laat de eerste storting plaats vinden op $t = 1$ en neem t in maanden.
3. Hoeveel heeft Hans na 1 jaar bij elkaar gespaard, inclusief rente?
4. Hoe evolueert de hoeveelheid geld op de rekening als Hans wel blijft sparen maar geen auto koopt?

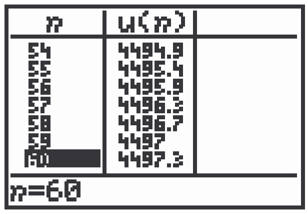
De leerlingen ontdekken op basis van deze voorbeelden dat sommige discrete dynamische modellen naar een evenwicht evolueren en andere niet. Op het vinden van evenwichten van discrete dynamische processen zullen we later terugkomen, maar aansluitend bij het probleem van de kerstbomen kan de volgende vraag al wel gesteld worden.

Evenwicht bij de kerstbomen

Recurrente betrekkingen kun je gebruiken om iets over een evenwicht te weten te komen. Door voldoende door te rekenen vond je dat het aantal kerstbomen op het perceel evolueerde naar een evenwicht: ongeveer 4500 bomen.

1. Uiteraard kun je dit ook vinden via de grafiek en de tabel die je rekentoestel van de recurrente betrekking maakt. Doe dit even. (Voor de grafiek bv. via TRACE. Je zult opmerken dat je dit niet lukt als je niet eerst *n*Max verhoogt.)





2. Betekent het bereiken van een evenwicht dat er niets meer verandert?

   (Neen! Het aantal *bomen verandert niet, maar het gaat voor een deel wel over andere bomen: sommige zijn verdwenen en andere zijn in hun plaats gekomen.)*

3. Een evenwicht betekent dat het aantal bomen niet meer verandert. Gebruik dit om het evenwicht op een andere manier te berekenen.

   ($B(t) = B(t-1) \Leftrightarrow B(t) = 0{,}9 \cdot B(t) + 450 \Leftrightarrow 0{,}1 \cdot B(t) = 450 \Leftrightarrow B(t) = 4500$ *)*

4. Op het moment dat de kleinzoon de zaak overneemt, staan er 4500 bomen op het perceel. Hij houdt dezelfde politiek aan als zijn vader en grootvader: jaarlijks 10% van de bomen kappen en 450 nieuwe bomen planten. Hoe evolueert het aantal bomen op zijn perceel?

   (Het aantal bomen op het perceel blijft constant gelijk aan 4500. *Je kunt dit gemakkelijk inzien zonder formeel rekenwerk: er worden evenveel bomen gekapt als er bijgeplant worden. Of je kunt gebruik maken van de recurrente betrekking, maar nu met* $B(0) = 4500$ *.)*

5. Door een ongeval kan de kleinzoon in een bepaald jaar slechts 400 nieuwe bomen aanplanten. Daardoor raakt het systeem tijdelijk uit evenwicht. De kleinzoon blijft echter bij zijn werkwijze. Hoe evolueert het aantal bomen?

   (Het evenwicht wordt stilaan hersteld. Werk met de recurrente betrekking met $B(0) = 4450$ *.)*

6. De achterkleinzoon neemt de zaak over. Hij heeft bedenkingen bij de handelswijze van zijn voorvaderen. Niet het hele perceel wordt benut. Er is immers plaats voor 5000 bomen. Kun je er voor zorgen dat het evenwicht op 5000 komt te liggen door

   a. een verandering aan te brengen in het aantal nieuwe bomen dat aangeplant wordt (en verder alles ongewijzigd te laten)

   b. een verandering aan te brengen in het percentage dat gekapt wordt (en verder alles ongewijzigd te laten).

   (Plant jaarlijks 500 *nieuwe bomen i.p.v.* 450 *of kap* 9% *i.p.v.* 10% *van de bomen.)*

Omdat het dynamisch proces na een verstoring van het evenwicht terugkeert naar de evenwichtspositie spreken we in dit verband over een *stabiel evenwicht*. Een andere naam is: een *aantrekkend* evenwicht.

In de volgende werktekst oefenen de leerlingen verder in het recurrent denken.

De torens van Hanoi

Het volgende spel ken je misschien wel. Het bestaat uit drie pennen. Op één van de pennen staat een toren van schijven, onderaan de grootste en daarop steeds kleiner wordende schijven. De bedoeling van het spel is nu alle schijven op een andere pen te plaatsen maar wel volgens de volgende regel: je mag per zet maar één schijf verplaatsen en je mag geen grotere schijf op een kleinere leggen.

We willen onderzoeken hoeveel zetten minstens nodig zijn. Uiteraard hangt dit af van het aantal schijven.

1. Speel het spel met een toren van twee schijven. Hoeveel zetten heb je minstens nodig?

   (3 zetten)

2. En bij drie schijven? En bij vier schijven?

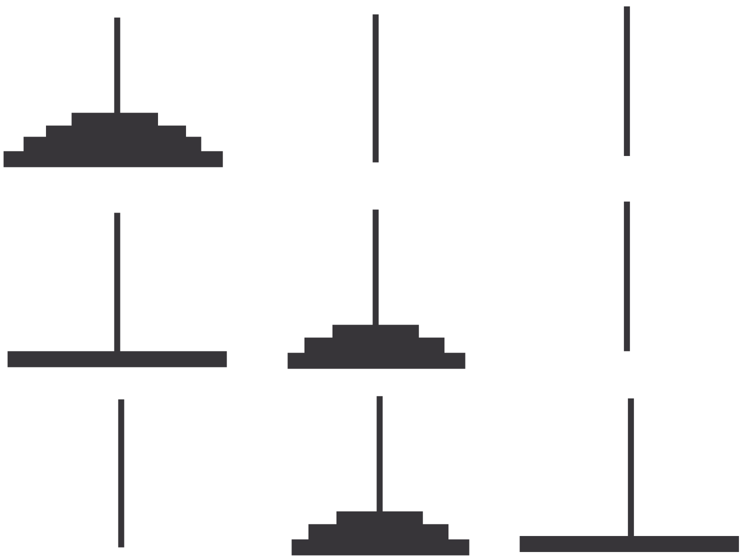
   (Bij 3 schijven minstens 7 zetten en bij 4 schijven minstens 15 zetten)

Door te redeneren over het verplaatsen van de schijven willen we nu proberen ook voor meer schijven het minimaal aantal zetten te bepalen.

3. Probeer op basis van het verplaatsen van de schijven een verband te zoeken tussen het aantal zetten bij vier schijven en bij drie schijven.

   (Eventueel kun je hier als tip de volgende tekening tonen.

   Om vier schijven te verplaatsen, moet je eerst de bovenste drie schijven (in juiste volgorde) op een andere pin zetten, vervolgens de grootste schijf verplaatsen en tenslotte de drie kleinere schijven terug op de grootste schijf zetten. Dus $z(4) = 2 \cdot z(3) + 1$.*)*



4. Verklaar dat hetzelfde verband geldt voor het aantal zetten bij vijf en bij vier schijven.

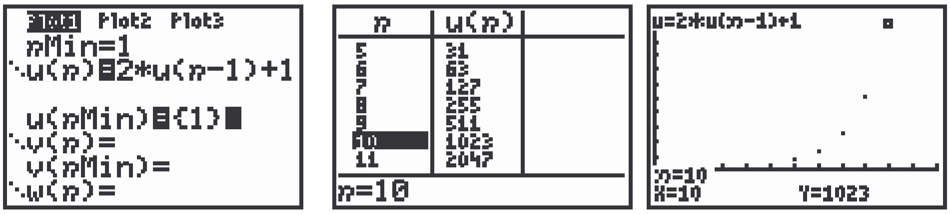
   (Zelfde redenering)

5. Met dezelfde redenering moet je nu de recurrente betrekking voor het aantal zetten bij n schijven kunnen opstellen.

(z(n) =2 z(n − 1) + 1)

6. Maak met je rekentoestel een tabel en een grafiek van het aantal zetten tot 10 schijven.

   (Hieronder zie je het resultaat.)



Volgens een legende bevindt zich in een tempel van Hanoi een toren met 64 schijven. Dag en nacht zijn monniken bezig met het verplaatsen van de schijven. Volgens de legende zal de wereld vergaan zodra alle schijven verplaatst zijn.

7. Bepaal met je rekentoestel het aantal zetten voor deze toren. Wat denk je dan over het vergaan van de wereld?

   (ongeveer $1{,}8\cdot10^{19}$ zetten. Als de monniken bv. gemiddeld een minuut nodig hebben om een schijf te verplaatsen, duurt het verplaatsen van de hele toren ongeveer $3{,}5\cdot10^{13}$ jaren. Dus …)

De Franse wiskundige Edouard Lucas heeft deze legende in 1883 als spel verzonnen en gepubliceerd. (Je hoeft dus niet naar Hanoi te gaan om deze toren en de monniken te gaan bezichtigen.) Er bestaan ook veel varianten op het probleem van ‘de torens van Hanoi’. Op het internet vind je ook veel verwijzingen naar dit probleem en varianten erop.

8. Zoek op het internet naar één of meer varianten van dit spel. Bepaal en verklaar daarbij een recurrente betrekking voor het aantal zetten. Beschrijf in een kort verslag het spel en het aantal zetten dat nodig is.

Opmerking: Indien meetkundige rijen in de tweede graad (leerweg 5) of in de derde graad (uitbreiding) uitvoeriger zijn bestudeerd, kunnen de leerlingen hier al op zoek gaan naar een expliciete formule voor het aantal zetten. Op basis van de tabel van de rij (vraag 6) zullen sommigen de formule $z(n) = 2^n - 1$ al vermoeden. Anderen zullen de formule proberen op te bouwen vanuit de recursieve formule. Dan vind je via veralgemening dat

$$z(n) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1\,.$$

Met behulp van de formule voor de som van een meetkundige rij vinden we ook de expliciete formule. Als verdieping kan ze bewezen worden met een bewijs per volledige inductie.

Nog een voorbeeld van een convergent proces.

Een medicijn innemen

Stel dat je ziek bent en dat je gedurende een lange periode elke morgen een bepaald medicijn moet innemen. In de loop van de dag zal de hoeveelheid actieve bestanddelen van dat medicijn in je lichaam afnemen. Stel dat onderzoek heeft uitgewezen dat gemiddeld na 24 uur nog 50% van de actieve bestanddelen van dat medicijn in je lichaam overblijft. De hoeveelheid medicijn die jij elke morgen moet innemen, bevat 5 mg actieve bestanddelen. Onderzoek voor de eerste 20 dagen de hoeveelheid medicijn in je lichaam ’s morgens onmiddellijk na de inname.

1. Geef de recurrente betrekking bij dit proces.
2. Voer deze betrekking in je rekentoestel in en maak een tabel en een grafiek van deze betrekking.
3. Wat merk je op?

Bij dit voorbeeld gaat de recurrente betrekking naar een evenwicht.

4. Kun je de evenwichtssituatie ook afleiden uit de omschrijving of de recurrente betrekking van dit proces?

3. Een spinnenwebdiagram

In deze paragraaf introduceren we een nieuwe grafische voorstelling. Hierboven stond bij de grafieken van recurrente betrekkingen zoals gebruikelijk op de horizontale as de (discrete) variabele n of t en stonden op de verticale as de rijelementen *u(n)* of *u(t)*. Een andere veel voorkomende voorstellingswijze voor recurrente betrekkingen is een *spinnenwebdiagram*.

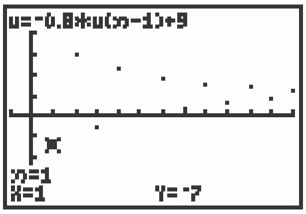
Een spinnenweb

Beschouw de volgende recurrente betrekking

$$\begin{cases} A(t) = -0{,}8 \cdot A(t-1) + 9 \\ A(0) = 20 \end{cases}$$

1. Voer deze betrekking in je rekentoestel in en onderzoek het verloop. Evolueert $A(t)$ naar een evenwichtswaarde?

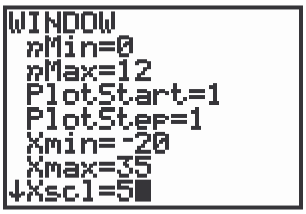
   (De waarden van A(t) schommelen rond en evolueren naar een evenwichtswaarde, namelijk 5.)

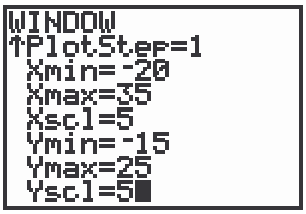


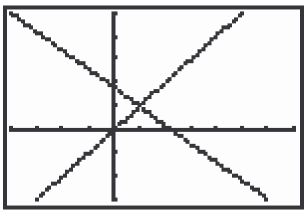
De grafische rekenmachine kan van een recurrente betrekking ook een andere grafiek maken.

- Verander hiervoor bij `FORMAT` in de eerste lijn `Time` in `Web`.

- Kies vervolgens de onderstaande scherminstellingen en maak de grafiek.







De rekenmachine tekent twee rechten.

2. Druk nu op `TRACE` en vervolgens op het pijltje naar rechts. Druk vervolgens nog een aantal maal op dezelfde pijltjestoets en kijk goed naar wat de rekenmachine tekent en naar wat er bijgeschreven wordt.

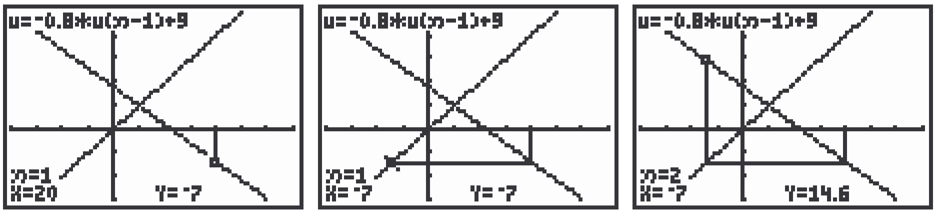
Je zult nu wel begrijpen waarom deze instelling '`Web`' heet en de grafiek een webdiagram. We willen nu onderzoeken hoe deze grafiek het verloop van de recurrente betrekking weergeeft.

3. De cursor springt blijkbaar steeds van de ene rechte op de andere. Probeer op basis van de coördinaten van de geconstrueerde punten de voorschriften van beide functies (rechten) te bepalen. Vul daartoe eerst de onderstaande tabel in.

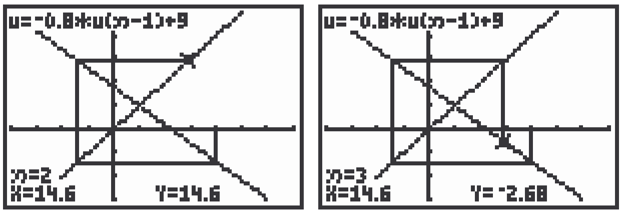
n	punt op dalende rechte	punt op stijgende rechte
1	(20, −7)	(−7, −7)
2		

($y = x$ en $y = -0{,}8x + 9$)

4. Beschrijf nu de eerste drie stappen en verklaar waarom op die manier $u(1)$ en $u(2)$ worden geconstrueerd. Voeg eventueel in de bovenstaande tabel nog een kolom toe voor $u(n)$.



5. Met de volgende twee stappen wordt $u(3)$ geconstrueerd. Verklaar.



(Na twee stappen wordt de oude y-waarde de nieuwe x-waarde. Van die x-waarde wordt opnieuw de opvolger berekend.)

6. Waarom zit de evenwichtswaarde bij het snijpunt van de twee grafieken?

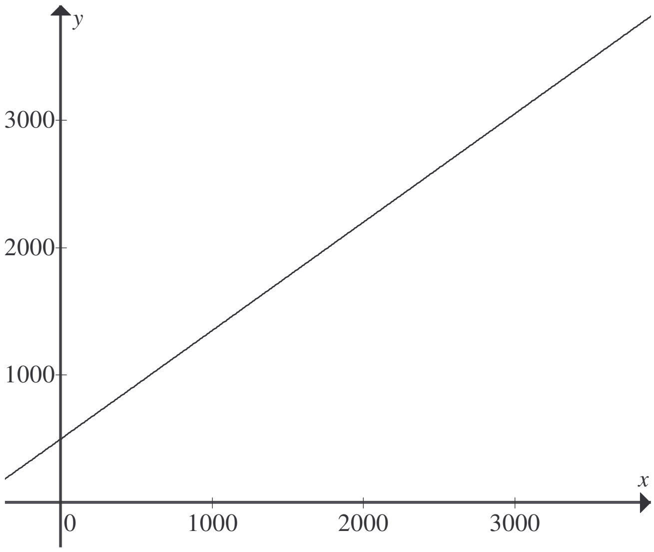
Een spinnenwebdiagram is dus eigenlijk niets anders dan de grafische vertaling van het stap voor stap berekenen van de termen van de rij op basis van de recursievergelijking. We geven nog een voorbeeld. Zoals je zult merken geeft een spinnenwebdiagram niet altijd een ‘spinnenweb’.

Een spin op de trap

1. Schrijf een recurrente betrekking bij het volgende proces: op een terrein staan 1000 bomen, de kweker beslist om elk jaar 15% te kappen en 500 nieuwe bomen aan te planten.
   ($B(t) = 0{,}85B(t-1) + 500$ en $B(0) = 1000$)

We willen bij deze betrekking ook een spinnenwebdiagram maken.

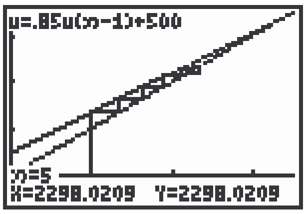
Hiervoor werd hieronder reeds de grafiek van $y = 0{,}85 \cdot x + 500$ getekend.



2. Teken nu ook de rechte $y = x$ en de eerste 3 stappen van het spinnenwebdiagram dat bij deze betrekking hoort.
3. Denk je dat je hier ook een 'spinnenweb' zult krijgen als je meerdere stappen van het diagram tekent?

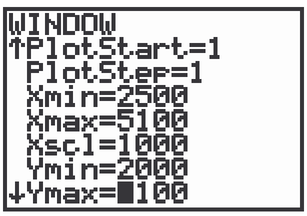
   (Nee, de grafiek wordt eerder een trap. We hebben hier te doen met een stijgende rij.)
4. Maak het diagram ook met je rekentoestel en onderzoek de evolutie op lange termijn. Wat merk je op?

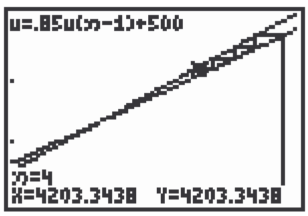
   (Ook hier geeft het snijpunt van de grafiek van $y = 0{,}85x + 500$ *en* $y = x$ *de evenwichtstoestand.)*



5. Verander $B(0)$ in 5000 en maak opnieuw een spinnenwebdiagram met je rekentoestel. Pas eventueel de scherminstellingen aan! Geef commentaar bij wat je ziet.

   (De rij 'daalt' nu naar de evenwichtswaarde, die we opnieuw bij het snijpunt van de twee grafieken vinden.)





Op basis van voorbeelden kunnen de leerlingen vervolgens onderzoeken wat het effect is van de beginwaarde op het webdiagram (en dus op de evolutie van de recurrente betrekking).

Op basis van een webdiagram kunnen we verantwoord redeneren over de evolutie van een dynamisch proces. In zekere zin verklaart het de evolutie. Bij het eerste voorbeeld hierboven (het echte web) geeft het webdiagram aan dat het proces zal blijven schommelen rond de evenwichtswaarde en er meer en meer naar toe moet evolueren. Bij het tweede voorbeeld (de trap) kunnen we op basis van het webdiagram met zekerheid besluiten dat het proces vertraagd stijgt en naar een evenwicht evolueert. Een tabel of (n, $u(n)$)-grafiek geeft de evolutie ook aan maar verantwoordt ze niet.

4. Een economisch probleem

Het volgende voorbeeld is gebaseerd op [3] en [4].

Vraag- en aanbodmodellen

Op de varkensmarkt gelden volgens economen de volgende regels:

- Als de prijs van varkensvlees laag is, wordt het aantal varkenshouders dat vlees aanbiedt op de markt kleiner.
- Als de prijs van varkensvlees hoog is, wordt het aantal aanbieders van vlees groter.
- Als het aanbod van varkensvlees laag is, stijgen de prijzen (als de vraag gelijk blijft).
- Als het aanbod van varkensvlees groter is dan de vraag, dalen de prijzen.
- Het vetmesten van een varken duurt ongeveer een half jaar.
- Al het varkensvlees dat aangeboden wordt, wordt ook effectief verkocht. Bewaren kan immers niet.

We kunnen dit in een eenvoudig wiskundig model gieten.

Een statisch vraag- en aanbodmodel.

In dit eenvoudige model houden we geen rekening met de tijd, vandaar de naam 'statisch'. We gaan alleen op zoek naar een evenwichtssituatie, dus in dit geval naar een situatie waarbij het aanbod gelijk is aan de vraag. In dit model kunnen we dus stellen dat:

- alles wat wordt aangeboden, wordt meteen verkocht.
- als de prijs toeneemt, neemt de vraag af;
- als de prijs toeneemt, neemt het aanbod toe;
- zowel vragers als aanbieders reageren onmiddellijk op elke prijsverandering;

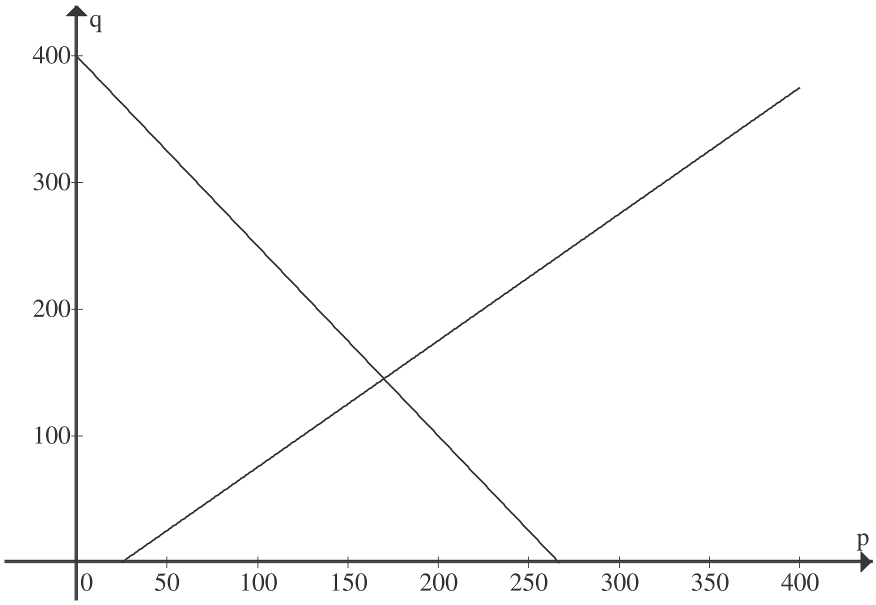
Hierbij zoekt men dan gepaste formules die het verband tussen de prijs (p) en de vraag (de gevraagde hoeveelheid) (q_v) en tussen de prijs en het aanbod (q_a) uitdrukken. Bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} q_a = p - 25 \\ q_v = 400 - 1{,}5\,p \end{cases}$$

1. Bepaal de prijs p zo dat vraag en aanbod elkaar in dit model in evenwicht houden.
   ($p - 25 = 400 - 1{,}5\,p \Leftrightarrow p = 170$)

De economen noemen deze prijs de *evenwichtsprijs*.

Zoals je in de onderstaande grafiek kunt zien, is deze prijs ook heel eenvoudig grafisch te bepalen door het snijpunt van twee rechten te berekenen.



Een dynamisch vraag- en aanbodmodel

Omdat het vetmesten van varkens tijd kost, kunnen de aanbieders niet onmiddellijk reageren op een prijsverandering. We moeten ons model dus wat bijsturen:

- het aanbod op een bepaald tijdstip wordt bepaald door de prijs van een periode van zes maand eerder; als we werken met tijdseenheden van zes maand geeft dit: het aanbod op tijdstip t wordt bepaald door de prijs op het tijdstip $t - 1$;
- de vraag wordt wel onmiddellijk aangepast aan de prijs.

Dat geeft de volgende formules (voor het model van hierboven):

$$\begin{cases} q_a(t) = p(t-1) - 25 \\ q_v(t) = 400 - 1{,}5\,p(t) \end{cases}$$

Het feit dat alle aangeboden varkensvlees effectief verkocht wordt, geeft de formule $q_a(t) = q_v(t)$.

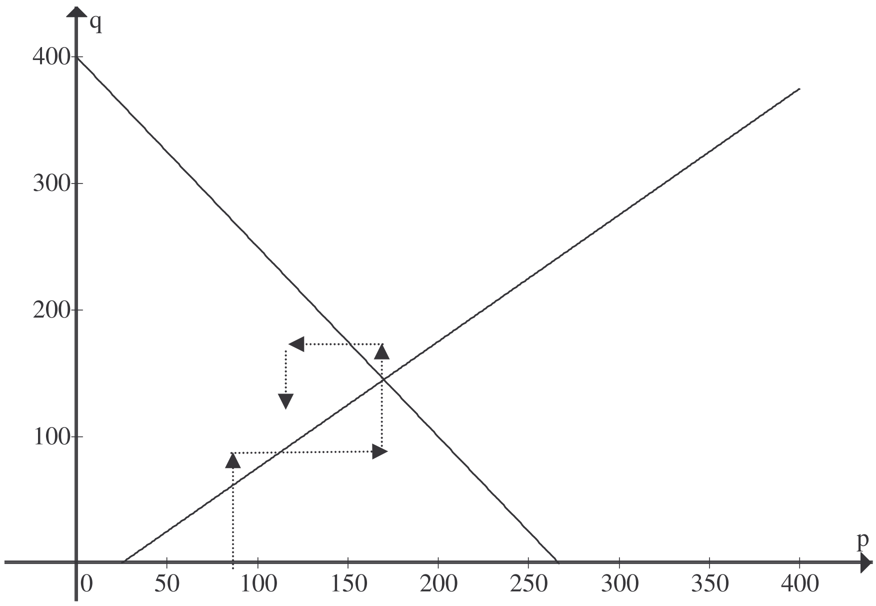
Stel dat $p(0) = 120$.

2. Bereken hieruit achtereenvolgens $q_a(1)$, $q_v(1)$ en $p(1)$. Geef bij elke stap een verklaring.
   (De vergelijking voor het aanbod, met $t=1$*, geeft* $q_a(1)=95$*. De evenwichts-vergelijking geeft dat* $q_v(1)=95$*. De prijs op tijdstip 1 kun je nu berekenen m.b.v. de vraagvergelijking:* $p(1)$ = 203,33.... *De varkenskwekers hebben op tijdstip* 0*, op basis van de lage prijs op dat ogenblik beslist om niet al te veel varkens te kweken. Deze varkens zijn slachtrijp op tijdstip* 1*. Op dat tijdstip is het aanbod aan varkensvlees dus laag. Om de vraag in evenwicht te brengen met dit lage aanbod laat men de prijs stijgen tot* 203,33 *eenheden.)*
3. Vul op dezelfde manier de volgende tabel in:

t	q_a	q_v	p
0			120
1	95	95	203,33
2			
3			

4. Geef een verklaring bij de getallen die je op de tweede rij invulde.

   (De hoge prijs voor varkensvlees op tijdstip 1 *zet de varkensboeren ertoe aan om veel varkens te kweken. Daardoor is het aanbod aan varkensvlees op tijdstip* 2 *groot. Om al dat varkensvlees verkocht te krijgen (men kan het immers niet bewaren!), moet men de prijs laten zakken.)*
5. Verklaar dat het onderstaande webdiagram dit proces grafisch weergeeft. Zoek de vergelijkingen van de twee rechten.



6. Wat is het verschil met de webdiagrammen die we vroeger reeds gemaakt hebben?
7. Op basis van deze voorstelling kun je al zien naar welke evenwichtsprijs dit model zal evolueren. Vergelijk dit met de evenwichtsprijs in het statische model en probeer te verklaren wat je ziet.

   (We vinden dezelfde evenwichtsprijs en dat is logisch want convergentie betekent dat $p(t-1) = p(t)$.)

Economen noemen dit het *spinnenwebtheorema*: "De evenwichtsprijs in een dynamisch vraag- en aanbodmodel is dezelfde als de evenwichtsprijs in het ermee overeenkomende statische vraag- en aanbodmodel."

We kunnen de evolutie natuurlijk beter door een rekentoestel of computer laten berekenen:

t	$q_a(t) = q_v(t)$	$p(t)$
0		120,00
1	95,00	203,33
2	178,33	147,78
3	122,78	184,81
4	159,81	160,12
5	135,12	176,58
6	151,58	165,61
7	140,61	172,93
8	147,93	168,05
9	143,05	171,30
10	146,30	169,13
11	144,13	170,58

12	145,58	169,61
13	144,61	170,26
14	145,26	169,83
15	144,83	170,11
16	145,11	169,92
17	144,92	170,05
18	145,05	169,97

8. Omdat $q_a(t) = q_v(t)$ kunnen we hier ook een rechtstreekse recurrente betrekking voor $p(t)$ opstellen. Doe dit.

   $$\left(\begin{cases} p(0) = 120 \\ p(t) = \dfrac{850}{3} - \dfrac{2}{3}\, p(t-1) \end{cases} \right)$$

9. Maak het 'gewone' spinnenwebdiagram bij deze recurrente betrekking. Geef verschillen en overeenkomsten aan met het spinnenwebdiagram dat hierboven gemaakt werd.

5. Analytisch oplossen van eenvoudige recursievergelijkingen

In de vorige paragrafen werkten we met recurrente betrekkingen van recursievergelijkingen en lieten we de rekenmachine tabellen en grafieken van deze betrekkingen maken.

In deze paragraaf maken we kennis met het oplossen van recursievergelijkingen, dit is het bepalen van het expliciete voorschrift uit het recursieve voorschrift. We beperken ons daarbij tot de meest eenvoudige recursievergelijkingen: recursievergelijkingen van de vorm $t(n) = a \cdot t(n-1) + b$. Die vergelijkingen zijn eenvoudig analytisch op te lossen.

We zullen in deze paragraaf overstappen naar de notatie t_n voor $t(n)$. We denken dat dit iets eenvoudiger leest bij ingewikkeldere afleidingen.

Meetkundige rijen

Sommige groepen leerlingen hebben in het vierde jaar reeds rijen bestudeerd. Ook daar wordt het opstellen van een expliciete formule behandeld: o.a. bij de formule voor de som van de eerste n termen van een meetkundige rij.

Beschouw de meetkundige rij met recursief voorschrift:

$$t_n = t_{n-1} \cdot q$$

en dus expliciet voorschrift:

$$t_n = t_1 \cdot q^{n-1}.$$

Dan is

$$\begin{aligned} s_n &= t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1} + t_n \\ &= \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1} \end{aligned}$$

Bij het oplossen van de recursievergelijkingen van de vorm $t_n = a \cdot t_{n-1} + b$ hebben we deze formule nodig. Als ze in het vierde jaar nog niet aan bod is gekomen, wordt ze hier best eerst afgeleid. We verwijzen hiervoor naar de handboeken van het vierde jaar. Ook voor de andere leerlingen is het nuttig om dit op te frissen, bv. aan de hand van oefeningen.

Lineaire recursievergelijkingen van de vorm $t_n = a \cdot t_{n-1} + b$

Van meetkundige rijen en dus ook van recursievergelijkingen van de vorm

$$t_n = a \cdot t_{n-1} \text{ met beginwaarde } t_0$$

kennen we dus ook de expliciete formule:

$$t_n = a^n t_0 .$$

In deze paragraaf gaan we op zoek naar een algemene formule voor recursieve betrekkingen van de vorm

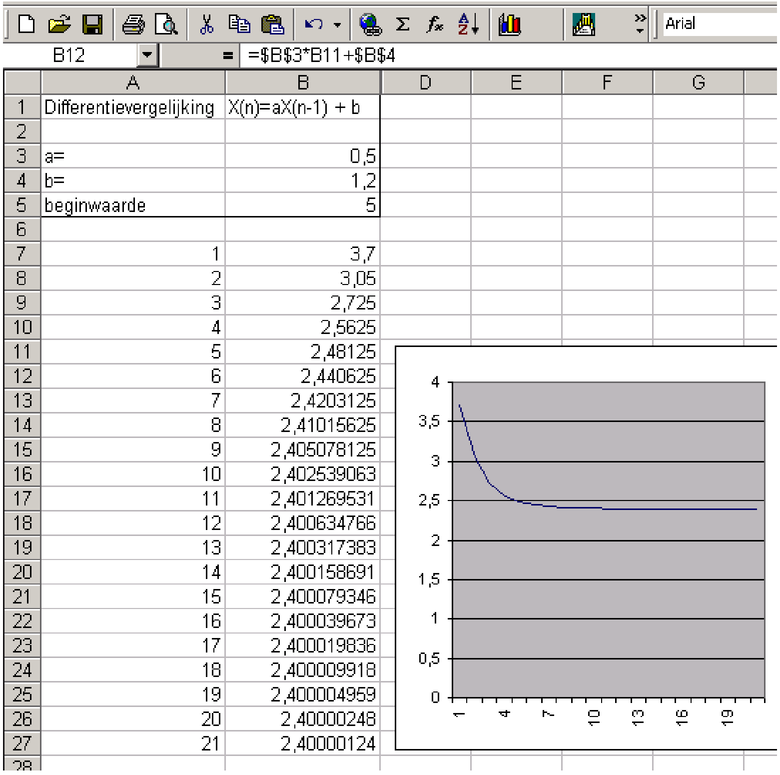
$$t_n = a \cdot t_{n-1} + b \text{ met beginwaarde } t_0 .$$

Zulke recursievergelijkingen zijn we in de voorgaande paragrafen al een aantal keer tegengekomen. De bedoeling is dat we ze nu wat algemener bestuderen en op basis van de algemene formule ook het effect van de waarde van de parameters a en b op het verloop en de evenwichtswaarde onderzoeken.

Als voorbereiding hierop kunnen we deze vergelijkingen eerst met een spreadsheet bestuderen. Als de leerlingen vlot met een rekenblad kunnen werken, kan dit een onderzoeksopdracht zijn waaraan ze individueel of in kleine groepjes werken. Dit kan gedeeltelijk in de klas en gedeeltelijk thuis gebeuren.

Onderzoeksopdracht

1. Ontwerp een spreadsheet waarmee je op een eenvoudige wijze recursie-vergelijkingen van de vorm $t_n = a \cdot t_{n-1} + b$ kunt doorrekenen en voorzie ook een grafiek.
2. Gebruik de spreadsheet om experimenteel te bepalen welke verschillende gevallen er te onderscheiden zijn en verwerk je bevindingen in een verslag. Besteed hierbij minstens aandacht aan de volgende aspecten van het verloop:
   - Is de rij stijgend, dalend, …?
   - Worden de verschillen tussen opeenvolgende termen steeds groter of steeds kleiner?
   - Evolueert de rij naar een evenwichtswaarde? Is er sprake van een stabiel evenwicht?



	A	B
1	Differentievergelijking	X(n)=aX(n-1) + b
2		
3	a=	0,5
4	b=	1,2
5	beginwaarde	5
6		
7	1	3,7
8	2	3,05
9	3	2,725
10	4	2,5625
11	5	2,48125
12	6	2,440625
13	7	2,4203125
14	8	2,41015625
15	9	2,405078125
16	10	2,402539063
17	11	2,401269531
18	12	2,400634766
19	13	2,400317383
20	14	2,400158691
21	15	2,400079346
22	16	2,400039673
23	17	2,400019836
24	18	2,400009918
25	19	2,400004959
26	20	2,40000248
27	21	2,40000124

In de algemene formule zal de evenwichtwaarde een belangrijke rol spelen. Daarom zoeken we die eerst. Die vinden we door de vergelijking $t = a \cdot t + b$ op te lossen. De evenwichtswaarde van de recursieve vergelijking $t_n = a \cdot t_{n-1} + b$ is dus $\dfrac{b}{1-a}$ $(a \neq 1)$.

Met behulp van de formule voor de som van de eerste n termen van een meetkundige rij kunnen we nu eenvoudig de expliciete formule bepalen:

$$\begin{aligned}
t_1 &= a \cdot t_0 + b \\
t_2 &= a \cdot t_1 + b = a \cdot (a \cdot t_0 + b) + b = a^2 \cdot t_0 + a \cdot b + b \\
t_3 &= a \cdot t_2 + b = a \cdot (a^2 t_0 + ab + b) + b = a^3 t_0 + a^2 b + ab + b \\
t_4 &= a \cdot t_3 + b = a \cdot (a^3 t_0 + a^2 b + ab + b) + b = a^4 t_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b
\end{aligned}$$

Veralgemening geeft:

$$\begin{aligned}
t_n &= a^n t_0 + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \ldots + a^2 b + ab + b \\
&= a^n t_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1) \cdot b
\end{aligned}$$

De som van alle termen behalve de eerste is de som van de eerste n termen van de meetkundige rij met beginwaarde b en reden a. Dus:

$$t_n = a^n t_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Men noemt deze formule de oplossingsformule van de recursievergelijking.

Het is niet moeilijk in te zien dat deze formule ook als volgt te schrijven is:

$$t_n = \frac{b}{1-a} + a^n \left(t_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

of in woorden:

$$t_n = \text{evenwichtwaarde} + a^n\ (\text{beginwaarde} - \text{evenwichtswaarde}).$$

Nadat de leerlingen deze formules in verschillende situaties hebben toegepast, kunnen ze het verband tussen de waarde van a en b en de evolutie van de lineaire recursievergelijkingen nu ook onderzoeken op basis van de formule. De vaststellingen uit het onderzoek met het rekenblad kunnen daarmee nu verklaard worden. Webdiagrammen kunnen deze redeneringen ook grafisch illustreren. Eventueel kan hier ook op de analogie met exponentiële functies gewezen worden.

6. Stelsels van recursievergelijkingen en matrices

In deze paragraaf willen we laten zien dat het nieuwe onderwerp dat we in de voorgaande paragrafen uitgewerkt hebben, raakpunten heeft met een thema dat in veel klassen ondertussen een vaste stek verworven heeft: matrixmodellen voor migratie, groei van een populatie met leeftijdsklassen, … We gaan er in de onderstaande werktekst van uit dat de leerlingen (en de lezers dus ook) reeds vroeger met overgangsmatrices hebben leren werken.

Recursief migreren

In een zeker gebied wonen 3 000 000 mensen. Het gebied bestaat uit een centraal gelegen grote stad met daaromheen een uitgestrekt platteland. Op dit ogenblik wonen er 1 000 000 mensen in de stad en 2 000 000 op het platteland. We geven deze beginsituatie weer m.b.v. de kolommatrix

$$X(0) = \begin{bmatrix} s(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,000\,000 \\ 2\,000\,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{s} \\ \leftarrow \text{p} \end{array}$$

Mensen verhuizen van de stad naar het platteland en omgekeerd. De verhuisbewegingen, gemeten over periodes van 10 jaar, worden weergegeven door de onderstaande migratiematrix P:

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cc} \text{s} & \text{p} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{s} \\ \text{p} \end{array} \ \text{naar}$$

De bevolking in stad en platteland na n periodes van 10 jaar geven we weer door

$$X(n) = \begin{bmatrix} s(n) \\ p(n) \end{bmatrix}.$$

1. Laat aan de hand van een matrixberekening zien dat

$$\begin{cases} s(n) = 0{,}9 \cdot s(n-1) + 0{,}2 \cdot p(n-1) \\ p(n) = 0{,}1 \cdot s(n-1) + 0{,}8 \cdot p(n-1) \end{cases}$$

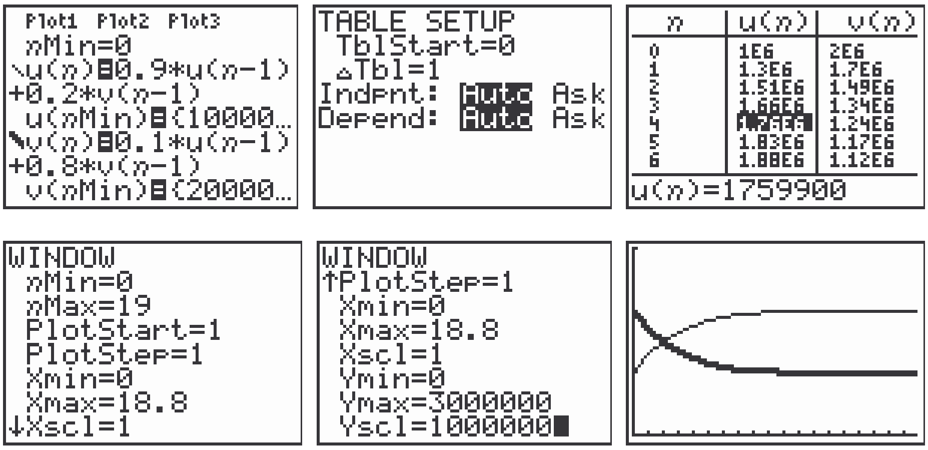
(Schrijf $X(n) = P \cdot X(n-1)$ voluit.)

De uitdrukking hierboven is een *stelsel van twee (gekoppelde) recursievergelijkingen:* de waarde van s en p na een aantal perioden wordt uitgedrukt in functie van de waarden van s en p één periode eerder. Om de waarde van s na n periodes te kennen heb je zowel de waarde van s als die van p na $n-1$ periodes nodig.

2. Voer de twee recursieve voorschriften uit de vorige vraag in je rekenmachine in. Laat een tabel en een grafiek maken die de evolutie van de bevolking van de stad en het platteland weergeven. Beschrijf de evolutie van de bevolking in stad en platteland in woorden.

   (De onderstaande schermafdrukken tonen hoe het met de rekenmachine in zijn werk gaat. Vergeet niet te controleren of de grafiekoptie TIME ingesteld is. We zien dat de bevolking in

de stad vertraagd toeneemt van 1 000 000 *in het begin naar* 2 000 000 *op lange termijn. De bevolking op het platteland daalt vertraagd van* 2 000 000 *in het begin naar* 1 000 000 *op lange termijn.)*



3. Waag, op basis van het antwoord op de vorige vraag, een 'gefundeerde gok' voor een expliciet voorschrift voor $s(n)$. In je voorstel mogen nog parameters voorkomen.

   (Op basis van de limietwaarde (2 000 000)*, de beginwaarde* (1 000 000) *en het vertraagd stijgende verloop (en de ervaring die opgedaan is in paragraaf 5), lijkt* $s(n) = -1\,000\,000 \cdot g^n + 2\,000\,000$, *met g een getal tussen* 0 *en* 1*, een verantwoorde gok.)*

4. Geef, gebruik makend van je antwoord op de vorige vraag, een expliciet voorschrift voor $p(n)$.

   (Maak gebruik van het feit dat de totale bevolking steeds uit 3 000 000 *personen bestaat. Je vindt* $p(n) = 1\,000\,000 \cdot g^n + 1\,000\,000$ *.)*

5. Bepaal de waarde van de onbekende parameter(s) in de uitdrukkingen uit vraag 3 en 4 door je 'gefundeerde gok' in te vullen in het stelsel recursievergelijkingen.

   (Als je de uitdrukkingen invult in het eerste recursieve voorschrift, vind je

$$-1\,000\,000 g^n + 2\,000\,000 =$$
$$= 0{,}9 \cdot (-1\,000\,000 g^{n-1} + 2\,000\,000) + 0{,}2 \cdot (1\,000\,000 g^{n-1} + 1\,000\,000)\,.$$

   Na vereenvoudiging geeft dit $g^n = 0{,}7 g^{n-1}$, *waaruit we afleiden dat* $g = 0{,}7$ *Het tweede recursieve voorschrift klopt daarmee meteen ook.)*

6. Bepaal op dezelfde manier een expliciete formule voor evolutie van de bevolking in stad en platteland voor een gebied waarvan de beginpopulatie en de overgangsmatrix gegeven worden door

$$X(0) = \begin{bmatrix} 2\,500\,000 \\ 1\,500\,000 \end{bmatrix} \text{ en } P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

   ($s(n) = 100\,000 \cdot 0{,}5^n + 2\,400\,000$ *en* $p(n) = -100\,000 \cdot 0{,}5^n + 1\,600\,000$ *)*

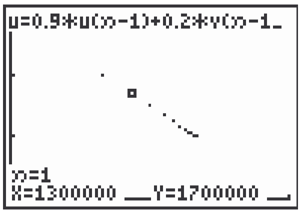
In de werktekst hebben we voor het bepalen van de expliciete voorschriften sterk gesteund op de grafiek die door de rekenmachine getekend werd. Voor 2×2-migratiematrices volstaat dat. In dat speciale geval krijg je namelijk altijd expliciete voorschriften waarvan het rechterlid de vorm $c \cdot g^n + b$ aanneemt. De waarde van de parameters kun je eenvoudig bepalen.

Voor andere 2×2-matrixmodellen en voor grotere matrixmodellen is het in het algemeen niet meer mogelijk op basis van de grafiek de vorm van het expliciete voorschrift te raden. Men kan aantonen dat bij 2×2-Lesliematrices en bij de matrix uit de volgende paragraaf het rechterlid van het expliciete voorschrift van de vorm $c_1 \cdot {g_1}^n + c_2 \cdot {g_2}^n$ is. De 'grondtallen' g_1 en g_2 zijn dan de eigenwaarden van de matrix. Bij

2×2-migratiematrices is g een van de eigenwaarden en is de andere eigenwaarde steeds gelijk aan 1. Wie hier meer over wil weten, verwijzen we naar Uitwiskeling 19/1. Maar je hebt in de werktekst gemerkt dat je g ook kunt bepalen zonder dat te weten.

Je kunt de band met recursieve voorschriften nog op een andere manier leggen dan in de werktekst. De gekende formule $X(n) = P \cdot X(n-1)$ drukt de bevolking in stad en platteland op een zeker tijdstip uit in functie van de bevolking in stad en platteland één periode eerder. We hebben dus te maken met een recursief voorschrift. Het verschil met de recursieve voorschriften die we vroeger bekeken, is dat het recursieve voorschrift nu niet een rij van *getallen* beschrijft, maar een rij van *kolomvectoren*.

Voor een stelsel van twee gekoppelde recursievergelijkingen biedt de rekenmachine nog een ander type grafiek. Kies via FORMAT de instelling uv. Voor elke waarde van n tekent de machine dan het punt $(s(n), p(n))$ (in 'machinetaal': $(u(n), v(n))$; vandaar de naam). Met TRACE kun je de evolutie van de bevolking volgen. Het hoeft niet te verwonderen dat de punten op een rechte liggen: de totale bevolking blijft immers constant.

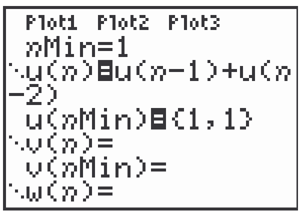


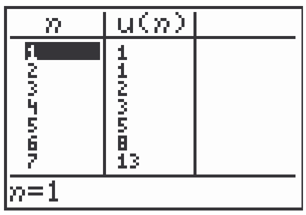
7. Een recursievergelijking van de tweede orde

In deze paragraaf bekijken we de rij van Fibonacci als een oplossing van een recursievergelijking. We concentreren ons hierbij niet op de didactische aanbreng van deze rij (konijnenvoortplanting...); hiervoor verwijzen we naar Uitwiskeling 12/1 en 12/2.

In de rij van Fibonacci is elke term gelijk aan de som van de voorgaande twee. Als we dit in symbolen vertalen, krijgen we $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, een recursief voorschrift *van de tweede orde* (omdat een term uitgedrukt wordt in functie van de voorgaande *twee* termen). De recursieve voorschriften die we in de vorige paragrafen ontmoetten, waren van de eerste orde.

Ook een recursief voorschrift van de tweede orde kun je in de grafische rekenmachine invoeren. Denk er wel aan dat er twee beginvoorwaarden nodig zijn: $x_1 = 1$ en $x_2 = 1$. De accolades en de komma moet je nu zelf ingeven.





We zoeken nu een expliciet voorschrift voor de rij van Fibonacci. Met behulp van de hulprij $y_n = x_{n-1}$ kunnen we de recursievergelijking van de tweede orde omzetten in een stelsel van twee recursievergelijkingen:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} \end{cases},$$

of in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}.$$

De eigenwaarden van de 2×2-matrix zijn $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zoals we in de voorgaande paragraaf aangaven, is het expliciete voorschrift voor x_n dan van de vorm

$$x_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

M.b.v. de beginvoorwaarden $x_1 = 1$ en $x_2 = 1$ bepalen we de waarden van c_1 en c_2. Zo vinden we de volgende uitdrukking voor de *n*-de term van de rij van Fibonacci:

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Met behulp van dit expliciete voorschrift kun je bijvoorbeeld heel eenvoudig de bekende 'limieteigenschap'

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

aantonen. En als je met andere beginwaarden dan $x_1 = 1$ en $x_2 = 1$ start, krijg je alleen maar andere waarden voor c_1 en c_2 en blijft de limieteigenschap behouden (behalve als $c_1 = 0$).

8. Een niet-lineaire recursievergelijking

De recursievergelijkingen uit de basisparagrafen waren allemaal van de vorm $t_n = a\,t_{n-1} + b$, die we kunnen omwerken tot $1 \cdot t_n - a \cdot t_{n-1} = b$. In deze nieuwe vorm is het linkerlid een lineaire combinatie van t_n en t_{n-1}. Daarom spreken we in dit verband van *lineaire* recursie-vergelijkingen. In deze paragraaf onderzoeken we een recursievergelijking die niet lineair is en laten we zien dat de wereld van de niet-lineaire recursieve voorschriften veel gevarieerder is dan die van de lineaire. Wat we hier bespreken, vind je voor een deel terug in het keuzeonderwerp iteratie in het leerplan voor de 6-urencursus uit het vrij onderwijs.

De wondere wereld van de recursievergelijking $t_n = a\ t_{n-1}\,(1 - t_{n-1})$

We onderzoeken recursieve voorschriften van de vorm

$$t_n = a\ t_{n-1}\,(1 - t_{n-1}),$$

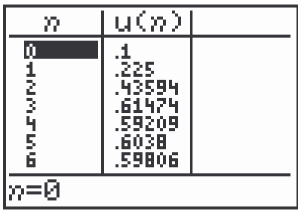
waarbij a een getal voorstelt. Nieuw bij deze recursievergelijking is dat in het rechterlid een product staat van twee factoren die t_{n-1} bevatten.

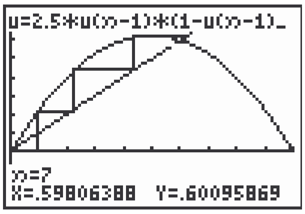
1. Welke lijnen zul je te zien krijgen op een spinnenwebdiagram?
   (De rechte $y = x$ (zoals steeds) en de parabool $y = ax(1-x)$.)

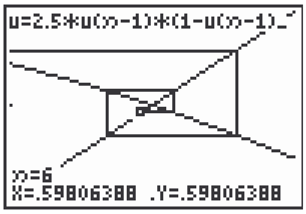
Neem $a = 2{,}5$.

2. Maak een spinnenwebdiagram van de rij met beginwaarde 0,1 en beschrijf het verloop ervan in woorden. Verklaar wat je vaststelt zoveel mogelijk op basis van het recursieve voorschrift.

(Helemaal in het begin stijgt de rij, daarna schommelt de rij. De schommelingen worden steeds kleiner en de limietwaarde is 0,6*. Om dit vast te stellen; kun je gebruik maken van een tabel en/of een spinnenwebdiagram (inzoomen om het verloop te zien voor termen met een groter rangnummer!).*







De limietwaarde kun je vinden door het snijpunt te bepalen van de parabool met de eerste bissectrice. Het feit dat de rij (na een aanloopperiode) gedempt schommelend verloopt, houdt verband met het feit dat de raaklijn in het snijpunt richtingscoëfficiënt $-0{,}5$ *heeft. Als de termen zeer dicht bij de limietwaarde genaderd zijn, kunnen we de parabool vervangen door de raaklijn. En een rechte met richtingscoëfficiënt tussen* -1 *en* 0 *zorgt voor een gedempt schommelend verloop.)*

3. Onderzoek de stabiliteit van de twee (!) evenwichtsposities.

   (De parabool en de eerste bissectrice hebben twee snijpunten, die dus twee evenwichtswaarden opleveren: 0 *en* 0,6*. Als we een beginwaarde nemen in de onmiddellijke omgeving van* 0,6*, dan convergeert de rij(gedempt schommelend) naar* 0,6 *(verklaring: denk aan de redenering met de raaklijn bij de vorige vraag!). Dit evenwicht is stabiel (of: aantrekkend). Als de beginwaarde exact gelijk is aan* 0*, dan zijn alle termen van de rij gelijk aan* 0*. Nemen we echter een beginwaarde in de onmiddellijke omgeving van* 0 *maar niet exact gelijk aan 0, dan convergeert de rij niet naar* 0*. Als het systeem uit evenwicht gebracht wordt, keert het dus niet terug naar zijn evenwicht. Dit evenwichtspunt is niet stabiel (of: afstotend).)*

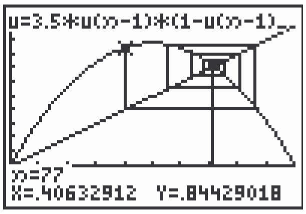
We nemen nu $a = 3{,}5$.

4. Bereken met de hand het verloop van de rij met beginwaarde $\frac{5}{7}$.

   (De rij is constant.)

5. De onderstaande schermafdruk toont het spinnenwebdiagram van de rij met beginwaarde $\frac{5}{7}$.

   Geef een verklaring voor wat er misloopt.



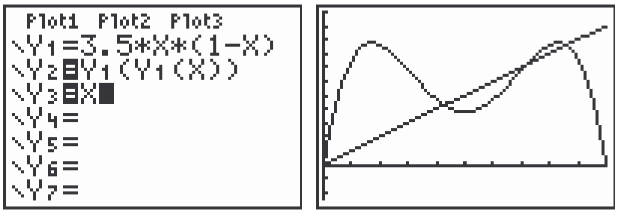
   (De machine werkt met een decimale benadering van de breuk en start bijgevolg met een beginwaarde die niet exact gelijk is aan $\frac{5}{7}$*. Omdat het evenwicht niet stabiel is, raken de termen die de machine berekent steeds verder van de echte (evenwichts)waarde verwijderd. Het webdiagram spiraliseert naar buiten. Na een groot aantal stappen levert dit zichtbare verschillen op.)*

6. Onderzoek met de hand en met de rekenmachine het verloop van de rij met beginwaarde $\frac{3}{7}$.

   (De termen van de rij nemen afwisselend de waarde $\frac{3}{7}$ *en* $\frac{6}{7}$ *aan. We zeggen dat zo'n rij* periode 2 *heeft. Nu doen er zich geen problemen voor bij de berekening met de rekenmachine.)*

Noem $f(x) = 3{,}5x(1-x)$ en $f_2(x) = f(f(x))$.

7. De onderstaande figuur toont de grafiek van f_2 en de eerste bissectrice. Je kunt narekenen dat de snijpunten optreden bij de x-waarden $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ en $\frac{6}{7}$. Het is geen toeval dat dit de getallen zijn uit de vragen 5 en 6. Geef een goede verklaring!



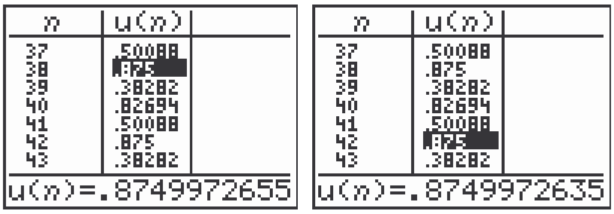
(De recursievergelijking die we bestuderen, kunnen we schrijven als $t_n = f(t_{n-1})$ *. De x-waarden waarvoor* $f(x) = x$ *geven aan welke beginwaarden een constante rij opleveren. Dat hebben we hierboven geregeld gebruikt om evenwichtspunten te bepalen. De functie* f_2 *komt tevoorschijn wanneer we* t_n *uitdrukken in functie van de term die twee plaatsen voordien staat:*

$$t_n = f(t_{n-1}) = f(f(t_{n-2})) = f_2(t_{n-2}) .$$

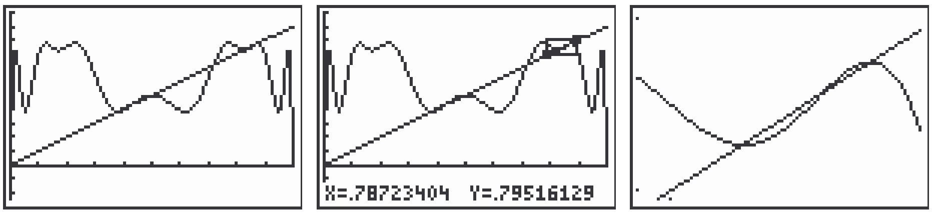
De x-waarden waarvoor $f_2(x) = x$ *geven ons dus de beginwaarden van de rijen waarvoor* $t_0 = t_2 = t_4 = t_6 = \ldots$ *Vanzelfsprekend geldt dan ook* $t_1 = t_3 = t_5 = t_7 = \ldots$ *We krijgen dan m.a.w. een rij met periode* 2. *Dat verklaart waarom* $\frac{3}{7}$ *en* $\frac{6}{7}$ *van de partij zijn. Als de beginwaarde* $\frac{5}{7}$ *is, zijn alle termen van de rij aan elkaar gelijk. Dan klopt de voorwaarde hierboven natuurlijk ook.)*

8. Onderzoek en verklaar het verloop van de rij met beginwaarde 0,1. Je moet ver genoeg in de rij gaan (ongeveer tot rangnummer 40) om te zien wat er te zien is.

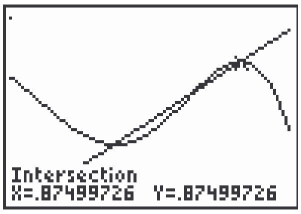
(Na een aanloopperiode komen dezelfde vier getallen steeds terug: (afgerond) 0,87500, 0,38282, 0,82694 *en* 0,50088. *Het klopt niet helemaal, want een aantal decimalen veranderen nog. Maar naarmate je verder gaat in de rij blijven meer en meer decimalen gelijk.*



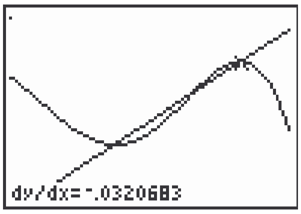
De rij 'convergeert' als het ware naar een 'stel limietgetallen met periode 4*'. We kunnen dit stel terugvinden op de manier van vraag* 7. *Noem* $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$ *(een veeltermfunctie van graad* 16*!). De snijpunten van de eerste bissectrice met de grafiek van* f_4 *bepalen de rijen met periode (hoogstens)* 4. *De onderstaande figuur (links) toont de grafiek. Als we de gepaste delen uitvergroten (zie bijvoorbeeld de middelste en de rechtse figuur), zien we dat er in het totaal* 7 *snijpunten zijn.*

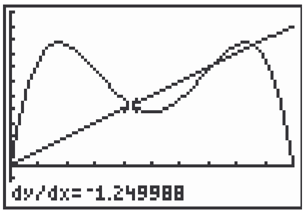


We kennen reeds drie van deze snijpunten, namelijk deze met x-coördinaat $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ *en* $\frac{6}{7}$. *En voor de overige vier verwachten we de periodiek terugkerende waarden uit de rij hierboven te zien. Dat klopt effectief. De onderstaande figuur toont dat voor één van deze vier.*



Wat experimenteren leert dat er geen rijen zijn die op de lange duur steeds meer lijken op de rij met periode 2 *uit vraag* 6*, terwijl heel veel rijen op de lange duur steeds meer lijken op de rij met periode* 4*. De verklaring daarvoor is dezelfde als die voor het al dan niet stabiel zijn van een evenwicht. De raaklijnen aan de grafiek van* f_4 *in de bewuste vier snijpunten met de eerste bissectrice hebben allemaal dezelfde richtingscoëfficiënt, namelijk (afgerond)* $-0{,}03$*, in absolute waarde kleiner dan* 1*. Daarom is dit stel van* 4 *aantrekkend. De raaklijnen aan de grafiek van* f_2 *in de punten met eerste coördinaat* $\frac{3}{7}$ *en* $\frac{6}{7}$ *hebben (beide) richtingscoëfficiënt* $-1{,}25$*, in absolute waarde groter dan* 1*. Het stel van* 2 *is daarom afstotend. Het is overigens niet moeilijk om analytisch aan te tonen dat de vier (resp. twee) raaklijnen dezelfde richtingscoëfficiënt hebben en om de richtingscoëfficiënt van de twee raaklijnen analytisch uit te rekenen.)*





9. Een differentiaalvergelijking oplossen m.b.v. een recursief voorschrift

In de voorgaande paragrafen hebben we recursieve voorschriften voornamelijk leren gebruiken om veranderingsprocessen te beschrijven. Typisch hierbij was dat we *uit gegevens over het veranderen van een grootheid* (en over de beginwaarde ervan) *afgeleid hebben hoe de grootheid zelf evolueert*. In het voorbeeld van de kerstbomen was gegeven dat elk jaar 10% van de bomen gekapt worden en dat er elk jaar 450 nieuwe bomen geplant worden. Op basis hiervan (en op basis van de beginwaarde) werd berekend hoe het aantal bomen evolueert, werd een grafiek gemaakt en werd tot slot een formule opgesteld voor het aantal bomen in functie van de tijd.

Er is in de wiskunde nog een ander instrument dat heel veel gebruikt wordt om veranderingsprocessen te beschrijven, namelijk een *differentiaalvergelijking*. Ook bij een differentiaalvergelijking gebruik je gegevens over het veranderen van een grootheid om te achterhalen hoe de grootheid zelf evolueert. Het grote verschil is dat je de tijd bij een recursief voorschrift opvat als een discrete veranderlijke (de tijd neemt alleen gehele waarden aan) terwijl je de tijd bij een differentiaalvergelijking als een continue veranderlijke opvat (de tijd neemt ook niet-gehele waarden aan). De snelheid waarmee de grootheid verandert, wordt in het continue geval weergegeven door de afgeleide van die grootheid naar de tijd.

Deze paragraaf handelt niet over differentiaalvergelijkingen als dusdanig. We willen laten zien dat je een differentiaalvergelijking (benaderend) kunt oplossen m.b.v. een recursief voorschrift.

De verspreiding van een virus

In deze werktekst onderzoeken we de verspreiding van een virus in een gebied met 100 000 mensen. Het virus veroorzaakt een ziekte die niet ernstig is, maar wel zeer besmettelijk. Wie besmet wordt, wordt eerst ziek maar bouwt algauw een afweer tegen de ziekte op. Iedereen die ooit besmet werd, blijft drager van het virus en blijft anderen besmetten, maar heeft daar verder geen last meer van.

Noteer met $y(t)$ het aantal mensen dat drager is van het virus op tijdstip t. Op dit ogenblik zijn 5000 mensen drager van het virus, d.w.z.

$$y(0) = 5000\,.$$

De snelheid waarmee het virus zich op tijdstip t uitbreidt binnen de bevolking van dit gebied wordt gegeven door $y'(t)$. We gaan er van uit dat deze snelheid evenredig is met het product van twee factoren:

- $y(t)$, d.w.z. het aantal mensen dat drager is van het virus (logisch: als meer mensen drager van het virus zijn, zijn er ook meer ‘besmetters’);
- $100000 - y(t)$, d.w.z. het aantal mensen dat nog geen drager is van het virus (ook logisch: als de meeste mensen reeds besmet zijn, zijn er wel veel ‘besmetters’ maar slechts weinig potentiële slachtoffers).

Meer bepaald zullen we veronderstellen dat voor elk tijdstip t

$$y'(t) = 5\cdot 10^{-7}\cdot y(t)\cdot(100000 - y(t))\,.$$

Om te weten hoe het aantal dragers van het virus evolueert, moet je de functie $y(t)$ kennen. De uitdrukking hierboven kun je opvatten als een vergelijking met de functie $y(t)$ als onbekende. In deze vergelijking komt de onbekende functie zelf voor tezamen met haar afgeleide. Een dergelijke vergelijking wordt een *differentiaalvergelijking* genoemd.

We zullen deze differentiaalvergelijking in deze werktekst niet oplossen (in de betekenis dat we geen formule zullen vinden voor y in functie van t), maar we zullen er wel in slagen om benaderende waarden voor y te berekenen.

1. Verklaar de volgende benaderende gelijkheid:

$$y'(0) \approx \frac{y(0{,}1) - y(0)}{0{,}1}\,.$$

(Omdat $y'(0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{y(0+h) - y(0)}{h}$, *is* $y'(0) \approx \dfrac{y(0+h) - y(0)}{h}$ *als h voldoende klein is. Neem* $h = 0{,}1$.*)*

2. Gebruik de differentiaalvergelijking voor $t = 0$ en de benaderende formule uit de vorige opgave om een benaderende waarde voor $y(0{,}1)$ te berekenen.

(Uit $y'(0) = 5\cdot 10^{-7}\cdot y(0)\cdot(100000 - y(0))$ *volgt de benaderende formule*

$$\frac{y(0{,}1) - y(0)}{0{,}1} \approx 5\cdot 10^{-7}\cdot y(0)\cdot(100000 - y(0))\,.$$

Hieruit vind je dat $y(0{,}1) \approx -5\cdot 10^{-8}\,y(0)^2 + 1{,}005\,y(0) = 5023{,}75\,.$*)*

3. Zoek op een gelijkaardige manier een benaderende waarde voor $y(0{,}2)$.

(Je vindt $y(0{,}2) \approx -5\cdot 10^{-8}\,y(0{,}1)^2 + 1{,}005\,y(0{,}1) = 5047{,}60\ldots$ *Een subtiliteit: in de vorige vraag kon je je baseren op de* exacte *waarde van* $y(0)$, *terwijl je nu slechts kunt steunen op een* benaderende *waarde van* $y(0{,}1)$.*)*

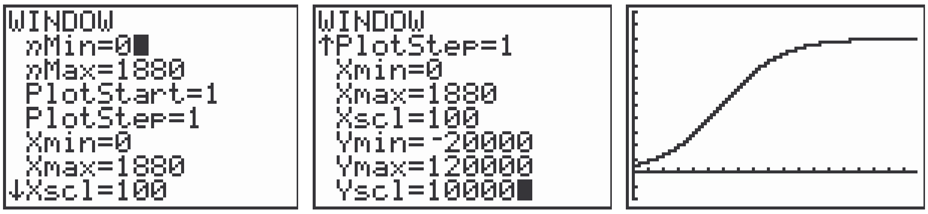
De benaderende waarden die je berekend hebt voor $y(0{,}1)$ en $y(0{,}2)$ noemen we y_1 en y_2. De exacte waarde van $y(0)$ noemen we y_0. Op dezelfde manier als in de vorige vragen kun je benaderende waarden vinden voor $y(0{,}3)$, $y(0{,}4)$, $y(0{,}5)$, $y(0{,}6)$, ... Deze benaderende waarden noemen we y_3, y_4, y_5, y_6, …

4. Geef een recursief voorschrift voor deze rij van benaderende waarden.

   (Voorheen vond je $y_1 = -5 \cdot 10^{-8} y_0{}^2 + 1{,}005 y_0$ *en* $y_2 = -5 \cdot 10^{-8} y_1{}^2 + 1{,}005 y_1$. *Op dezelfde manier vind je het recursieve voorschrift:* $y_n = -5 \cdot 10^{-8} y_{n-1}{}^2 + 1{,}005 y_{n-1}$*.)*

5. Maak een grafiek bij dit recursieve voorschrift en beschrijf in woorden hoe het virus zich verspreidt onder de bevolking.

   (De onderstaande schermafdrukken geven een goed tekenvenster en een goede grafiek. Het duurt wel even vóór de grafiek er staat: ongeveer twee minuten met een gewone TI83. Bemerk dat de grafiek getekend wordt voor tijdstippen van 0 *tot* 188 *(nMax verwijst naar de maximale waarde van n, niet van de tijd!). In het begin stijgt het aantal dragers versneld. Op het tijdstip dat de helft van de bevolking drager geworden is, vertoont de grafiek een buigpunt. Na dit tijdstip stijgt het aantal dragers vertraagd om te stabiliseren rond* 100 000*.)*



Het groeimodel in de werktekst is een voorbeeld van *logistische groei*. De benaderende methode die we gebruikt hebben om de differentiaalvergelijking op te lossen, kan voor heel veel differentiaalvergelijkingen toegepast worden. Voor meer informatie over logistische groei (analytische oplossing van de differentiaalvergelijking, historische achtergrond, …) verwijzen we naar [1] en [2].

bibliografie

[1] C. Biront, J. Deprez, *Wiskundige begrippen en methoden. Deel 3*, Deurne (Wolters-Plantyn), 1998.

[2] P. De Groen, *Modellen voor bevolkingsgroei: 1. discrete modellen*, Wiskunde en Onderwijs 58, 97-108 (1989).

[3] H. Staal e.a., *Pascal, Wiskunde voor de tweede fase, VWO-informatieboek, CM&EM,* Thieme (Zutphen), 1999, ISBN 900344272X

[4] H. Staal e.a., *Pascal, Wiskunde voor de tweede fase, VWO-verwerkingsboek, CM&EM,* Thieme (Zutphen), 1999, ISBN 9003442762

[5] H. Verhage, M. Doorman en W. Reuter, *Discrete dynamische modellen, Wiskunde voor de tweede fase (C&M en E&M),* Freudenthalinstituut (Utrecht), 1998

Deze tekst is gebaseerd op (beter: bijna identiek met) een tekst van Johan Deprez en Jan Roels die eerder verschenen is in het tijdschrift Uitwiskeling nummer 20/3 (mei 2004). De werkteksten die in deze tekst gebruikt worden, kun je voor gebruik in de klas downloaden van de website van Uitwiskeling: www.uitwiskeling.be.