

Wiskunde D

Keuzeonderdeel Beslissen

Antwoorden
versie juli 2013



Ontwikkeld door:
Hans van Ballegooij, Maaslandcollege Oss

Op basis van:

"Beslissen Wiskunde D", door Jan Essers ism Kerngroep Wiskunde D Eindhoven, ©Fontys
en de bewerking hiervan door Ferdy van der Werf op 16 juli 2008

"Lineair programmeren, problemen met twee onbekenden", door Etienne Goemaere, Katholieke Universiteit Leuven

"Een inleiding in de besliskunde" door Herbert Hamers, Elleke Janssen, Marieke Quant, ©Tilburg University

- 1 a** € 11.250,=.
b Nee

- 2 b** $4x + 2y \leq 120$
c $z = 300x + 200y$

- 3 a**
c Richtingscoëfficiënt -1.
d Het gebied AEF met A=(0,0), E=(45,0) en F=(0,45).

x	0	10	20	30	40	45
y	45	35	25	15	5	0

- 4 b** Het gebied ABCD met (zie opgave 5)

- 5 a** C=(20, 20).
b A=(0, 0), B=(30, 0), D=(0, $33\frac{1}{3}$).

- 6 a** Het gebied ABCDEF met
b A=(-4, 7), B=(-2, 7), C=(7, $2\frac{1}{2}$), D=(7, 1), E=(4, $-\frac{1}{2}$) en F=(-4, $3\frac{1}{2}$)

- 7 a** Maximaliseer $z = 1980x + 1240y$

$$\text{onder de voorwaarden} \begin{cases} 4x + 5y \leq 70 \\ 6x + 2y \leq 72 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

- b** Het gebied OABC met
c O=(0, 0), A=(12, 0), B=(10, 6), C=(0, 14)

- 8 a** Maximaliseer $z = 5b + 7d$

$$\text{onder de voorwaarden} \begin{cases} b + 2d \leq 5 \\ 2b + d \leq 8 \\ b \geq 0, \quad d \geq 0 \end{cases}$$

- 9 b** In het hoekpunt C=(20,20).
c De maximale winst is € 1.000,=.
d Aan kunstmest wordt 120 verbruikt, er zijn 100 arbeidskrachten nodig en er wordt 40 ha land gebruikt.

- 10b** Hoekpunt C=(3, 3), met waarde 16.
c Hoekpunt A (-3,0), met waarde 7.

- 11a** Maximum 27240 in hoekpunt B(10,6).
b Maximum 23 in hoekpunt B=($3\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$).

- 12b** Alle punten op lijnstuk AC (deel van lijn $2x + y = 6\frac{1}{2}$), de maximale waarde is daar $6\frac{1}{2}$.

$$\textbf{13a} \begin{cases} x \leq 100 \\ y \leq 75 \\ 3x + 4y \leq 360 \end{cases}$$

- c** $z = x + 2y$
e De maximale winst is € 170 en wordt bereikt in hoekpunt C=(20, 75).

- 14** Het minimum wordt bereikt in hoekpunt A=(248,0) en is 17360.

15 Het minimum wordt bereikt in hoekpunt A=(0, 2) en is 2.

16a De productiecapaciteit, de opslagcapaciteit en het personeel.

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 5 \\ x + y \leq 7 \\ x + 2y \leq 11 \end{cases}$$

d $z = 200x + 300y$.

f De maximale winst wordt bereikt in hoekpunt C=(3, 4).

g De doelfunctie is nu $z = 300x + 300y$.

h Je kunt kiezen uit de productie van (3, 4) of (4, 3) of (5, 2) (moderne tafels, klassieke tafels).
De winst is € 2.100,=.

17a

$$\begin{cases} 15n + 20s \leq 900 \\ 20n + 30s \leq 1200 \\ 500n + 1000s \leq 34500 \\ n, s \geq 0 \end{cases}$$

	type N	type S	totaal beschikbaar
Afdeling A	15	20	900
Afdeling B	20	30	1200

c O=(0, 0), A=(60, 0), B=(33, 18), C=(0; 34,5).

d € 7.560,=.

e € 7.200,= , verschil € 360,=.

f Omdat de iso-winstlijn evenwijdig loopt met de lijn $20n + 30s = 1200$.

g Bij een prijs onder € 87,27.

18a € 1.296,=.

b Nee

19a G1, G2, G4 en G5.

b G1

c G4 en G5

d Vanaf drie knopen is dit niet mogelijk omdat er dan altijd cykels aanwezig zullen zijn.

20 Dit is niet mogelijk.

21a Respectievelijk 1, 3, 6, 10 en 15 lijnen.

c 1

d 3

e 16

22a CDFC, DEBAFD en CDEBAFC.

b Ja

d

23 Er zijn meerdere mogelijkheden, allen met als totale gewicht 43.

24 De totale lengte van het minimale netwerk is 109 km.

Er moeten bruggen gebouwd worden tussen eilanden 1 en 8, 2 en 8, 2 en 6, 3 en 5, 4 en 5, 5 en 8, en 6 en 7.

25 Het maximale gewicht bedraagt 155.

- 28** Regio's A en C gaan hier nooit mee akkoord omdat ze ieder afzonderlijk (6+8) in totaal evenveel kwijt zouden zijn. Als A en C samenwerken zijn ze samen zelfs maar 6+7=13 eenheden kwijt.

29

Coalitie en kosten	Overgebleven speler(s) en kosten
Geen	A: 6, B: 4 en C: 8
AB: 9	C: 8
AC: 13	B: 4
BC: 9	A: 6
ABC: 14	Geen

30 a $c \leq 8$: $14 - a - b \leq 8 \Leftrightarrow 6 - a - b \leq 0 \Leftrightarrow 6 \leq a + b \Leftrightarrow a + b \geq 6$

$a + c \leq 13$: $1 - b \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq b \Leftrightarrow b \geq 1$

$c \geq 0$: $14 \geq a + b \Leftrightarrow a + b \leq 14$

$a + (14 - a - b) \leq 13 \Leftrightarrow 14 - b \leq 13 \Leftrightarrow 14 - a - b \geq 0 \Leftrightarrow$

d

	Bijdrage speler	Absoluut voordeel (keer 100 miljoen)	Relatief voordeel
Punt P	Regio A, $a = 5$	1	16,7%
	Regio B, $b = 1$	3	75%
	Regio C, $c = 8$	0	0%
Punt Q	Regio A, $a = 6$	0	0%
	Regio B, $b = 1$	3	75%
	Regio C, $c = 7$	1	12,5%
Punt R	Regio A, $a = 6$	0	0%
	Regio B, $b = 3$	1	25%
	Regio C, $c = 5$	3	37,5%
Punt S	Regio A, $a = 5$	1	16,7%
	Regio B, $b = 4$	0	0%
	Regio C, $c = 5$	3	37,5%
Punt M	Regio A, $a = 5,5$	0,5	8,3%
	Regio B, $b = 2,75$	1,25	31,3%
	Regio C, $c = 5,75$	2,25	28,1%

- 31 a** Met 4 spelers: in totaal 12 coalities, als je de triviale (allen samen en ieder voor zich) meetelt.
Met 5 spelers: 27 coalities.
Met 6 spelers: 58 coalities.
- b** Met n spelers: $2^n - n$ coalities.

32a Zo'n oplossing is niet mogelijk.

b Dit leidt tot een groter toegelaten gebied ("aan de onderkant komt er een klein stukje bij").

c Als de aansluitkosten tussen A en C meer dan 8 eenheden bedragen verandert het toegestane gebied niet meer.

d Als het gewicht van lijn AC onder de 5 komt ontstaat er een andere minimale opspannende boom.

e Het stelsel van voorwaarden gaat over in:

$$\left[\begin{array}{l} a+b+c=13 \\ a \leq 6, \quad b \leq 4, \quad c \leq 8 \\ a+b \leq 9, \quad a+c \leq 10, \quad b+c \leq 9 \\ a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0 \end{array} \right. , \text{ en door substitutie van } c = 13 - a - b \text{ gaat dit stelsel over in:}$$

$$\left[\begin{array}{l} a+b \geq 5, \quad a+b \leq 13, \quad a+b \leq 9 \\ a \geq 4, \quad a \geq 0, \quad a \leq 6 \\ b \geq 0, \quad b \geq 3, \quad b \leq 4 \end{array} \right.$$

f In punt A=(4, 3, 6) is het voordeel (2, 1, 2) en procentueel (33,3%, 25%, 25%).

In punt B=(6, 3, 4) is het voordeel (0, 1, 4) en procentueel (0%, 25%, 50%).

In punt C=(5, 4, 4) is het voordeel (1, 0, 4) en procentueel (16,7%, 0%, 50%).

In punt D=(4, 4, 5) is het voordeel (2, 0, 3) en procentueel (33,3%, 0%, 37,5%).

33 Het stelsel van voorwaarden:

$$\left[\begin{array}{l} a+b+c=8 \\ a \leq 7, \quad b \leq 6, \quad c \leq 5 \\ a+b \leq 7, \quad a+c \leq 9, \quad b+c \leq 7 \\ a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0 \end{array} \right. , \text{ en door substitutie van } c = 8 - a - b \text{ gaat dit stelsel over in:}$$

$$\left[\begin{array}{l} a+b \geq 3, \quad a+b \leq 7, \quad a+b \leq 8 \\ a \geq 1, \quad a \geq 0, \quad a \leq 7 \\ b \geq 0, \quad b \geq -1, \quad b \leq 6 \end{array} \right.$$

In punt A=(3, 0, 5) is het voordeel (4, 6, 0) en procentueel (57,1%, 100%, 0%).

In punt B=(7, 0, 1) is het voordeel (0, 6, 4) en procentueel (0%, 100%, 80%).

In punt C=(1, 6, 1) is het voordeel (6, 0, 4) en procentueel (85,7%, 0%, 80%).

In punt D=(1, 2, 5) is het voordeel (6, 4, 0) en procentueel (85,7%, 66,7%, 0%).

34b VA: 19, VD: 17, VW: 16, AD: 29, AW: 32, DW: 21, VDW: 24, VDA: 27, VAW: 26, ADW: 41

c De totale kosten zijn dan 34.

d Het stelsel van voorwaarden wordt:

$$\left[\begin{array}{l} v+a+d+w=34 \\ v+a \leq 19, \quad v+d \leq 17, \quad v+w \leq 16 \\ a+d \leq 29, \quad a+w \leq 32, \quad d+w \leq 21 \\ v+d+w \leq 24, \quad v+d+a \leq 27 \\ v+a+w \leq 26, \quad a+d+w \leq 31 \\ 0 \leq v \leq 9, \quad 0 \leq a \leq 20, \quad 0 \leq d \leq 9, \quad 0 \leq w \leq 12 \end{array} \right.$$

e Een oplossing (v, a, d, w) is bijvoorbeeld (7, 12, 8, 7). Hierbij is de winst t.o.v. de directe aansluitkosten (2, 8, 1, 5).

f Zie onderdeel e.

35a $4! = 24$ manieren

b $6! = 720$ manieren

c $n!$ manieren

36 a De som van de gewichten van de vijf koppelingen is achtereenvolgens:

$$55 + 48 + 31 + 45 = 179$$

$$55 + 31 + 21 + 42 = 149$$

$$55 + 55 + 31 + 42 = 183$$

$$34 + 50 + 21 + 42 = 147$$

$$55 + 50 + 21 + 34 = 160$$

- b** De totale som van alle koppelingen wordt 9 kleiner.
- c** De totale som van alle koppelingen wordt 7 groter.
- d** Nee

37 b 144 kilometers.

39 De optimale toewijzing is (M1, O2), (M2, O4), (M3, O3) en (M4, O1).

40 b Alle toewijzingen zijn optimaal.

41 a De maximale dagopbrengst is 350.

b Er zijn 2 optimale toewijzingen mogelijk.

42 a Het totaal aantal kilometers dat wordt afgelegd is 93

b Locatie 1 wordt niet voorzien van een hijskraan.

43 De optimale toewijzing is (M3, K1), (M5, K2), (M2, K3), (M4, K4) en (M1, K5), (je kunt M3 en M4 ook omwisselen). De totale kosten zijn 51.

44 a De optimale toewijzing is (P2, O1), (P1, O2), (P5, O3), (P4, O4), (P3, O4).

b Persoon 3 heeft geluk.

45 a 6

b (H1, L1), (H2, L2), (H3, L3): 107.

(H1, L1), (H2, L3), (H3, L2): 141.

(H1, L2), (H2, L1), (H3, L3): 105. (*)

(H1, L2), (H2, L3), (H3, L1): 148.

(H1, L3), (H2, L1), (H3, L2): 106.

(H1, L3), (H2, L2), (H3, L1): 105. (*)

c De koppelingen (*) hierboven zijn het gunstigst wat betreft de afgelegde kilometers.

46 De optimale toewijzing is (Z2, Vlinderslag), (Z3, Schoolslag), (Z1, Rugslag) en (Z4, Vrije slag).

47 a Een optimale samenstelling is bv:

Het totale gewicht bedraagt 125. Er zijn meerdere oplossingen mogelijk, controleer bij jouw oplossing dus of het totale gewicht klopt.

Speler	Positie	Waarde
Jan	First Baseman	12
André	Shortstop	14
Ab	Outfielder 2	8
Hans	Catcher	15
Bert	Second Baseman	15
Camiel	Outfielder 3	4
Max	Pitcher	25
Piet	Third Baseman	20
Ernst	Outfielder 1	12

48 a Een optimale toewijzing is (M1, P4), (M2, P1), (M3, P2), (M4, P3) en (M5, P5). De kosten bedragen dan 16.

b Een optimale toewijzing van de andere producten is dan (M2, P3), (M3, P2), (M4, P4) en (M5, P5)
De totale kosten, als functie van x bedragen dan $K(x) = x + 12$

c x mag maximaal 4 mag zijn.

49 a Er zijn 4 spelers, de directeur met 1 stem, de docenten met 4 stemmen, de leerlingen met 3 stemmen en de ouders met 2 stemmen.

51 a Huis van afgevaardigden: [218; 242, 192]

52 a Medezeggenschapsraad: [6; 4, 3, 3]

b Iedere speler heeft evenveel macht, namelijk $\frac{1}{3} \approx 0,333$

53 a De winnende coalities staan in de tabel hiernaast.

b Spelers A, B en C : machtsindex $\frac{1}{3} \approx 0,333$

Speler D: machtsindex 0.

Winnende coalities	Aantal stemmen
A, B	52
A, C	52
B, C	52
A, B, C	78
A, B, D	74
A, C, D	74
B, C, D	74
A, B, C, D	100

54 Er zijn $2^{10} = 1024$ verschillende mogelijkheden

57 a De machtsindices van Banzhaf zijn $A=0,6$; $B=0,2$ en $C=0,2$.

b De machtsindices van Shapley-Shubik zijn $A=0,667$; $B=0,167$ en $C=0,167$.

58 Speler A, B, C: $\frac{8}{24} \approx 0,333$. Speler D: 0

60 a Zie de tabel rechts.

b Zie de tabel rechts.

c

Speler	Machtsindex van Banzhaf
A	$= \frac{15}{44} \approx 0,341$
B	$= \frac{15}{44} \approx 0,341$
C	$= \frac{14}{44} \approx 0,318$
D	0
E	0
F	0

d Hoewel 16% van de bevolking in de steden D, E en F woont hebben deze geen enkele invloed.

61 a

Speler	Banzhaf		
	1	2	3
A	1	$= \frac{5}{12} \approx 0,417$	$= \frac{4}{12} \approx 0,333$
B	0	$= \frac{3}{12} = 0,25$	$= \frac{4}{12} \approx 0,333$
C	0	$= \frac{3}{12} = 0,25$	$= \frac{4}{12} \approx 0,333$
D	0	$= \frac{1}{12} \approx 0,083$	0

b

Speler	Shapley-Shubik		
	1	2	3
A	1	$= \frac{10}{24} \approx 0,417$	$= \frac{8}{24} \approx 0,333$
B	0	$= \frac{6}{24} = 0,25$	$= \frac{8}{24} \approx 0,333$
C	0	$= \frac{6}{24} = 0,25$	$= \frac{8}{24} \approx 0,333$
D	0	$= \frac{2}{24} \approx 0,083$	0

c De resultaten bij elk systeem zijn identiek.

62 a

Speler	Machtsindex van Banzhaf
A	$= \frac{2}{6} \approx 0,333$
B	$= \frac{2}{6} \approx 0,333$
C	$= \frac{2}{6} \approx 0,333$

b het nieuwe minimale quorum wordt 149. De machtsverdeling tussen de spelers verandert niet.

c

Speler	Machtsindex van Banzhaf
A	0,5
B	0,5

d Nu is de machtsverdeling dus totaal anders. Speler C heeft helemaal geen macht meer.

Winnende coalities	Aantal stemmen
A, B	18
A, C	16
B, C	16
A, B, C	25
A, B, D	21
A, B, E	19
A, B, F	19
A, C, D	19
A, C, E	17
A, C, F	17
B, C, D	19
B, C, E	17
B, C, F	17
A, B, C, D	28
A, B, C, E	26
A, B, C, F	26
A, B, D, E	22
A, B, D, F	22
A, B, E, F	20
A, C, D, E	20
A, C, D, F	20
A, C, E, F	18
B, C, D, E	20
B, C, D, F	20
B, C, E, F	18
A, B, C, D, E	29
A, B, C, D, F	29
A, B, C, E, F	27
A, B, D, E, F	23
A, C, D, E, F	21
B, C, D, E, F	21
A, B, C, D, E, F	30

63 a
b

Speler	Machtsindex van Shapley-Shubik
A	$= \frac{4}{6} \approx 0,667$
B	$= \frac{1}{6} \approx 0,167$
C	$= \frac{1}{6} \approx 0,167$

Speler	Machtsindex van Shapley-Shubik
A	$= \frac{12}{24} = 0,5$
B	$= \frac{4}{24} \approx 0,167$
C	$= \frac{4}{24} \approx 0,167$
D	$= \frac{4}{24} \approx 0,167$

c Het quotum q is
$$\begin{cases} \frac{n+2}{2} & (n \text{ even}) \\ \frac{n+3}{2} & (n \text{ oneven}) \end{cases}$$

d De machtsindex van speler A is $\frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}$.

Voor de andere $(n-1)$ spelers is de machtsindex $\frac{1 - \frac{2}{n}}{n-1} = \frac{n-2}{n(n-1)}$.

64 Het quotum bedraagt 93.

Land	Machtsindex Banzhaf (a)	Machtsindex Shapley-Shubik (b)	Machtsindex Banzhaf (c)	Machtsindex Shapley-Shubik (c)
Duitsland	13,4%	13,49%	13,35%	13,45%
Frankrijk	10,11%	10,27%	10,1%	10,24%
Italië	10,11%	10,27%	10,1%	10,24%
UK	10,11%	10,27%	10,1%	10,24%
Spanje	6,81%	6,87%	6,82%	6,85%
Polen	6,81%	6,87%	6,82%	6,85%
Roemenië	4,36%	4,34%	4,35%	4,33%
Nederland	3,35%	3,32%	7,21%	7,26%
België	2,98%	2,94%		
Luxemburg	0,74%	0,72 %		
Griekenland	2,98%	2,94%	2,97%	2,93%
Portugal	2,98%	2,94%	2,97%	2,93%
Tsjechië	2,98%	2,94%	2,97%	2,93%
Hongarije	2,98%	2,94%	2,97%	2,93%
Zweden	2,35%	2,32%	2,35%	2,31%
Oostenrijk	2,23%	2,19%	2,22%	2,18%
Bulgarije	2,23%	2,19%	2,22%	2,18%
Denemarken	1,73%	1,69%	1,73%	1,69%
Finland	1,73%	1,69%	1,73%	1,69%
Slowakije	1,73%	1,69%	1,73%	1,69%
Ierland	1,61%	1,57%	1,61%	1,57%
Litouwen	1,61%	1,57%	1,61%	1,57%
Letland	1,12%	1,09%	1,12%	1,09%
Slovenië	0,86%	0,84%	0,86%	0,83%
Estland	0,74%	0,72%	0,74%	0,72%
Cyprus	0,74%	0,72%	0,74%	0,72%
Malta	0,62%	0,6%	0,61%	0,59%

65 a Het quotum bedraagt 161. De Nederlandse stem (die telt voor 13) is dus doorslaggevend bij 148 t/m 160 voorstemmen van de andere landen.

b $mi_A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

c

	A		B		C	
	(6;6,4,1)	(6;5,5,1)	(6;6,4,1)	(6;5,5,1)	(6;6,4,1)	(6;5,5,1)
I	(V,V,V)	(V,V,V)	(V,V,V)	(V,V,V)	(V,V,V)	(V,V,V)
II	(V,T,V)	(V,T,V)	(T,V,V)	(T,V,V)	(T,V,V)	(T,V,V)
III	(V,V,T)	(V,V,T)	(V,V,T)	(V,V,T)	(V,T,V)	(V,T,V)
IV	(V,T,T)	(V,T,T)	(T,V,T)	(T,V,T)	(T,T,V)	(T,T,V)
<i>mi</i>	1	0,5	0	0,5	0	0,5

d Partij A heeft alle macht (index 1) en partijen B en C helemaal niet (index 0).

e Alle partijen hebben evenveel macht (index $\frac{1}{3}$), zie tabel hiernaast.

f Je ziet dus een soortgelijke verschuiving van de macht als in onderdeel c.

g $mi_A = \frac{7}{8}$ en $mi_B = \frac{1}{8}$. De machtsindex van A is 7 maal zo groot.