

Module HAVO Wiskunde D

# Lenen of sparen?



|          |                                |
|----------|--------------------------------|
| Versie:  | 23 juni 2009                   |
| Auteurs: | C. Horlings<br>P.G.M. Zenhorst |

## Inhoud

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| 1. Inleiding .....                                   | 3  |
| 2. Geld en rente .....                               | 4  |
| 3. Sparen.....                                       | 4  |
| 3. Sparen.....                                       | 5  |
| 3.1 Enkelvoudige en samengestelde intrest.....       | 5  |
| 3.2 Schijnbare en effectieve intrest .....           | 8  |
| 3.3 Sparen in vaste termijnen .....                  | 10 |
| 4. Lenen .....                                       | 15 |
| 4.1 Persoonlijke lening en doorlopend krediet.....   | 15 |
| 4.2 Contante waarde .....                            | 16 |
| 4.3 Een lening terugbetalen in vaste termijnen ..... | 19 |
| 5. Sparen of lenen? .....                            | 22 |
| 6. Toepassing Excel.....                             | 25 |
| 6.1 Contante waarde .....                            | 25 |
| 6.2 Een lening terugbetalen in vaste termijnen ..... | 27 |
| 7. Diagnostische toets.....                          | 30 |
| Bijlage 1 .....                                      | 31 |

## 1. Inleiding

Deze module gaat over lenen en sparen en alles wat daarbij komt kijken. Eén vraag loopt er als een rode draad doorheen: is het verstandig om geld te lenen of kun je beter sparen? Om die vraag te beantwoorden, gaan we verschillende manieren van sparen bekijken. Bijvoorbeeld: kun je beter één keer een groot bedrag op een spaarrekening storten of regelmatig kleine bedragen? En we kijken naar verschillende manieren van lenen, bijvoorbeeld naar doorlopende kredieten en persoonlijke leningen.

In hoofdstuk 2 vertellen we iets over de geschiedenis van het lenen van geld. Daar leer je bijvoorbeeld waar het woord 'intrest' vandaan komt. In hoofdstuk 3, 4 en 5 gaan we zelf berekeningen uitvoeren. Omdat we willen controleren of de reclame die je in kranten of op televisie of het internet ziet voor leningen of voor spaarrekeningen, wel eerlijk is. Om die berekeningen te kunnen maken, leren we een paar belangrijke financiële begrippen kennen: 'enkelvoudige intrest', 'samengestelde intrest', 'eindwaarde' en 'contante waarde'.

In hoofdstuk 6 laten we zien dat Excel ook enkele berekeningen voor je kan doen.

In de module zit ook een diagnostische toets om verschillende onderdelen nog eens te herhalen.

In kaders laten we drie mensen aan het woord die van sparen en lenen hun werk gemaakt hebben. Ze werken voor een bank, voor een verzekeringsmaatschappij of het Nibud en hebben daarom dagelijks met geld te maken. Zij vertellen over hun werk, wat daar leuk aan is of minder leuk. En wat je moet doen als je, net als zij, zelf van geld je werk wilt maken. Ook is er een kader waarin staat wat het Nibud adviseert sparen of lenen...

Mijn naam is Johan Paarlberg. Ik ben coördinator bij het Ahold pensioenfonds. Bij dat pensioenfonds werken zo'n 50 mensen. We administreren de pensioenrechten van werknemers van Albert Heijn, Etos en Gall & Gall. Dat wil zeggen dat we voor die werknemers berekenen hoeveel pensioen zij later gaan krijgen, afhankelijk van hoeveel jaren zij voor Ahold gewerkt hebben en hoe hoog hun salaris was. Je kunt dus zeggen dat ik verstand heb van sparen: ik informeer werknemers van Ahold hoeveel zij al gespaard hebben voor hun pensioen. Mijn vooropleiding is Meao (administratieve richting), daarna heb ik gewerkt bij twee verzekeringsmaatschappijen en allerlei cursussen gevolgd over verzekeringen. Op dit moment ben ik bezig met een opleiding tot Actuarieel Analist.

Als het gaat om sparen of lenen, dan zou ik zeker kiezen voor sparen. Lenen lijkt wel gemakkelijk, maar je moet het geleende geld toch een keer terugbetalen. En je betaalt dan vaak een hoge rente. Voordat je het weet nestel je jezelf in de schulden.

Bovendien geeft het mezelf een beter gevoel om iets te kopen waar ik zelf voor gespaard heb.



## 2. Geld en rente

Lenen is al zo oud als de mensheid. Uit Soemerische geschriften van zo'n 3000 jaar voor Christus blijkt dat mensen toen al spullen van elkaar leenden en dat daar een vergoeding tegenover stond. Men leende bijvoorbeeld een bepaalde hoeveelheid tarwe en na de oogst moest er een grotere hoeveelheid worden teruggegeven ter compensatie. De vergoeding (dat wat er extra teruggegeven wordt) noemen we tegenwoordig 'rente' of 'intrest'. Het woord 'rente' stamt af van het Latijnse woord 'rendita' dat 'opbrengst' betekent. 'Intrest' is een verbastering van de Latijnse uitdrukking 'de inter est'. Dat betekent letterlijk: 'dat wat er tussen ligt' (tussen wat er geleend is en wat er teruggegeven wordt).

De eerste bewijzen van het lenen van geld vinden we bij de Babyloniërs, zo'n 1800 jaar voor Christus. Ook hier werd er een vergoeding gevraagd. Al in het Romeinse Rijk voor Christus stond de wetgever huiverig tegenover vergoedingen voor het lenen van geld. Het was namelijk zo dat degene die geld leenden dit uit noodzaak deden en er financieel niet zo goed voor stonden. De vraag was of hun situatie nog slechter gemaakt moest worden door het betalen van vergoedingen.

De vergoeding in geld werd uitgedrukt in een percentage per tijdseenheid. Als iemand bijvoorbeeld 5000 geldeenheden leende daarvoor jaarlijks 750 geldeenheden vergoeding moest betalen, dan was die vergoeding

$$\frac{750}{5000} \times 100 = 15 \text{ procent per jaar.}$$

Vergoedingspercentages konden hoog oplopen en in woeker ontaarden en dat mocht natuurlijk niet. Wetgevers stelden daarom een bovengrens in voor wat er aan vergoeding gevraagd mocht worden. Tot in het begin van de 14<sup>de</sup> eeuw proberen zij zelfs het berekenen van rente helemaal te verbieden. Maar de wetten van de economie bleken sterker dan die van de kerk en de staat. Geldschietters vroegen toch rente, maar dan in de vorm van een vergoeding voor kosten, schade en gederfde winsten. Zo ontstond er toch weer een verschil tussen wat er geleend werd en wat er teruggegeven moest worden. Tegenwoordig gelden er nog steeds verbodsbepalingen tegen rente bij islamitische bankstellingen.

Ik ben Patricia Peemen. Na de middelbare school heb ik bedrijfswiskunde gestudeerd. Daarna ben ik gaan werken voor Watson Wyatt, een bedrijf in Eindhoven en Amstelveen dat andere bedrijven adviseert op het gebied van pensioenen, verzekeringen, salarissen en investeringen. We adviseren die bedrijven (onder andere Philips, ABP, Ikea en Achmea) over hoeveel pensioen zij moeten reserveren voor hun werknemers en hoe zij hun geld kunnen investeren of beleggen. In mijn werk gebruik ik tamelijk veel wiskunde: somformules en kansberekening en verzekeringswiskunde.

Als ik je een advies mag geven over sparen of lenen dan zeg ik: sparen. Als je geld leent, dan moet je dat geld terugbetalen en bovendien ook nog rente. Je betaalt dus meer terug dan je eigenlijk geleend hebt. Als je spaart, dan *krijg* je rente van de bank omdat de bank als het ware geld van *jou* leent. Het duurt misschien wat langer voordat je iets kunt kopen, maar toch vind ik sparen slimmer dan lenen.

### 3. Sparen

#### 3.1 Enkelvoudige en samengestelde intrest

Als je geld op een spaarrekening zet, dan leen je als het ware dat geld tijdelijk aan de bank. De bank kan dat geld gebruiken om er zelf geld mee te gaan verdienen. Daarom is een bank graag bereid om je intrest te betalen.

Intrest wordt vaak uitgedrukt in procenten. Als je een jaar lang 100 euro op een spaarrekening laat staan dan geeft de bank je daarvoor (bijvoorbeeld) een vergoeding van 4 euro. We zeggen dan dat je een jaarlijkse intrest ontvangt van 4%. Een jaarlijkse intrest van 4% betekent dus letterlijk: een vergoeding van 4 euro voor iedere 100 euro's die je een jaar uitleent.

Soms wordt intrest uitgedrukt in een 'perunage'. Als iemand 4 euro vergoeding betaalt om 100 euro te mogen lenen, dan vergoedt hij 0,04 euro voor iedere geleende euro. We zeggen dan dat het intrestperunage gelijk is aan 0,04. 'Per un' betekent letterlijk: per één. Een intrestperunage is dus een vergoeding die je betaalt als je één euro mag lenen.

Intrestperunages geven we vaak aan met het symbool  $i$ . In dit geval is  $i = 0,04$ .

Als je geld op een bankrekening zet tegen een jaarlijks intrestperunage  $i = 0,04$ , dan betekent dat dat je voor iedere euro die je op die bankrekening zet na een jaar 1,04 euro terug kunt krijgen. Iedere euro is als het ware gegroeid tot 1,04 euro. Een bedrag van 50 euro zal groeien tot  $50 \times 1,04 = 52$  euro, een bedrag van 370 euro zal groeien tot  $370 \times 1,04 = 384,80$  euro enzovoorts. In het algemeen geldt: als je een bedrag van  $B$  euro op een bankrekening zet tegen een jaarlijks intrestperunage  $i$ , dan zal dat bedrag na een jaar gegroeid zijn tot  $B \times (1 + i)$ .

Stel dat je 200 euro op een bankrekening zet tegen een jaarlijks intrestperunage  $i = 0,04$ . Na een jaar is dat bedrag gegroeid tot  $200 \times 1,04 = 208$  euro. Nu kun je twee dingen doen.

Je kunt de 8 euro intrest die je erbij gekregen hebt van je bankrekening halen en er iets leuks voor gaan kopen. Dan blijft er 200 euro op je bankrekening staan en als je nog een jaar zou wachten dan zou dat bedrag weer aangroeien tot  $200 \times 1,04 = 208$  euro. Maar je kunt er ook voor kiezen om de 8 euro intrestvergoeding op je bankrekening laten staan. Er staat dan 208 euro op je bankrekening en als je nu een jaar wacht, dan groeit dat bedrag tot  $208 \times 1,04 = 216,32$  euro. Over het tweede jaar zou je dus een intrestvergoeding ontvangen van  $0,04 \times 208 = 8,32$  euro. Dat bedrag van 8,32 euro bestaat uit twee delen, namelijk:

1.  $0,04 \times 200 = 8$  euro intrest over je kapitaal van 200 euro en
2.  $0,04 \times 8 = 0,32$  euro intrest over de intrest van 8 euro

We spreken daarom van 'samengestelde intrest'. Als je samengestelde intrest ontvangt dan betekent dat dat je niet alleen intrest krijgt over een bedrag dat je aan iemand uitgeleend hebt, maar ook over intrest die die persoon jou schuldig is. Samengestelde intrest kan na verloop van tijd flink groeien.

#### Voorbeeld 1

Je zet 200 euro op een bankrekening tegen een intrest van 5% per jaar. Je laat je geld 10 jaar lang op die bankrekening staan. De intrest die je ontvangt laat je bijschrijven op dezelfde bankrekening, zodat je in de volgende jaren over die intrest ook weer intrest ontvangt.

Hoeveel staat er na 10 jaar op je bankrekening? Hoeveel ontvang je in het 10<sup>e</sup> jaar aan intrest?

*Oplossing:*

Na een jaar is het bedrag van 200 euro gegroeid tot  $200 \times 1,05 = 210$  euro, na twee jaar tot  $200 \times 1,05^2 = 220,50$  euro, na drie jaar tot  $200 \times 1,05^3 = 231,53$  euro enzovoorts. Na 9 jaar

## Lenen of sparen?

heb je  $200 \times 1,05^9 \approx 310,27$  euro en na 10 jaar heb je  $200 \times 1,05^{10} \approx 325,78$  euro.

In totaal heb je in 10 jaar  $325,78 - 200 = 125,78$  euro aan intrest ontvangen. Alleen al in het tiende jaar heb je een intrestvergoeding ontvangen van  $325,78 - 310,27 = 15,51$  euro.

### Voorbeeld 2

Je zet 200 euro op een bank tegen een jaarlijkse intrest van 5%. Na hoeveel jaar is dat bedrag gegroeid tot 400 euro?

*Oplossing:*

We gaan weer van uit van samengestelde intrest. Na 1 jaar heb je dan  $200 \times 1,05 = 210$  euro, na 2 jaar heb je  $200 \times 1,05^2 = 220,5$  euro en na  $n$  jaar heb je  $200 \times 1,05^n$  euro. Als we willen weten hoeveel jaar het duurt voordat je 400 euro hebt, dan moeten we de vergelijking  $200 \times 1,05^n = 400$

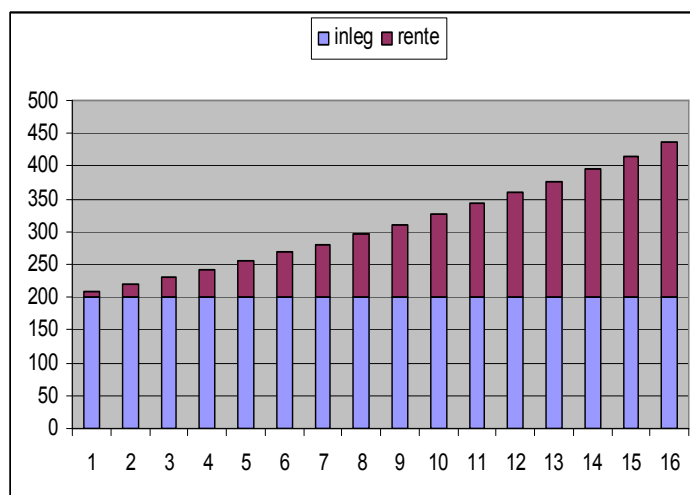
oplossen. Uit  $200 \times 1,05^n = 400$  volgt dat  $1,05^n = 2$ . Uit deze vergelijking kun je  $n$  oplossen door links en rechts een logaritme te nemen:

$${}^{10}\log(1,05^n) = {}^{10}\log(2)$$

$$n \times {}^{10}\log(1,05) = {}^{10}\log(2)$$

Dus 
$$n = \frac{{}^{10}\log(2)}{{}^{10}\log(1,05)} \approx 14,21$$

Het duurt dus 14,21 jaar (dat is 14 jaar en ongeveer 11 weken) voordat je 400 euro hebt. Om precies te zijn: na 14 jaar heb je  $200 \times 1,05^{14} \approx 395,99$  euro en na 15 jaar heb je  $200 \times 1,05^{15} \approx 415,79$  euro.



In de figuur hierboven kun je zien hoe je spaartegoed groeit als je éénmaal (op het tijdstip 0) 200 euro inlegt en vervolgens een aantal jaren lang 5% rente per jaar ontvangt. Na één jaar heb je in totaal 210 euro (namelijk de 200 euro die je ingelegd hebt plus 10 euro rente). Na 12 jaar heb je in totaal ongeveer 360 euro (namelijk de 200 euro die je ingelegd hebt plus 160 euro aan rente die je in 12 jaar hebt ontvangen). Na 15 jaar heb je voor het eerst meer dan 400 euro.

In de volgende opgaven en in de volgende hoofdstukken zul je het begrip ‘intrest’ vaak tegenkomen. Je mag er dan telkens vanuit gaan dat het gaat om ‘samengestelde intrest’.

**Opgave 3.1.1**

Je zet 500 euro op een bankrekening en je laat dat bedrag 8 jaar daar staan tegen een intrest van 3% per jaar.

- a. Hoeveel heb je na 8 jaar?
- b. Hoeveel intrest ontvang je in het 4<sup>e</sup> jaar?

**Opgave 3.1.2**

Je zet 500 euro op een bankrekening tegen een intrest van 3% per jaar. Na hoeveel jaar is dat bedrag gegroeid tot 1000 euro?

**Opgave 3.1.3 (computeropdracht)**

De ene bank vergoedt meer intrest als je er geld op een spaarrekening zet dan de andere. Daarom is het verstandig om banken met elkaar te vergelijken voordat je een spaarrekening opent. Op de site [www.independer.nl](http://www.independer.nl) vindt je informatie over allerlei zaken die met geld te maken hebben, ook over sparen.

- a. Er bestaan verschillende manieren van sparen. Je kunt je geld bijvoorbeeld op een 'spaarrekening' zetten, maar ook op een 'deposito'. Wat is het verschil tussen een spaarrekening en een deposito? (Als je op de site van independer doorklikt naar 'spaarrekening en deposito' en dan naar 'alles over sparen', dan vind je hierover uitleg.)
- b. Waarom zal een bank in het algemeen meer intrest geven op een deposito dan op een spaarrekening?
- c. We gaan op zoek naar de bank die de hoogste rente geeft op een spaarrekening. Ga op de site van independer naar 'spaarrekening en deposito' en dan naar 'vergelijk alle spaarrekeningen en deposito's'. Je krijgt dan een vragenlijst te zien waarop je aan kunt geven welke wensen je hebt over spaarrekeningen en deposito's, bijvoorbeeld 'wil je je geld voor langere tijd vastzetten?' of 'wil je naast een spaarrekening ook een betaalrekening openen?'
- d. Op al deze vragen kun je 'weet ik nog niet' antwoorden' en dan onderaan de pagina op 'verder' klikken. Dan verschijnt er een overzicht van spaarrekeningen en deposito's bij allerlei banken. Welke bank geeft op dit moment de hoogste rente op een spaarrekening? Hoe lang duurt het bij deze bank als je een bedrag van 300 euro wilt laten groeien tot 500 euro?

### 3.2 Schijnbare en effectieve intrest

Veronderstel dat je geld op een spaarrekening zet bij een bank en neem aan dat die bank iedere maand 2% intrest geeft. Als je nu 1 euro op je rekening zet, dan is die euro na 1 maand gegroeid tot 1,02 euro, na 2 maanden tot  $1,02^2 \approx 1,04$  euro, na drie maanden tot  $1,02^3 \approx 1,06$  euro enzovoorts. Na een jaar (dus na 12 maanden) staat er  $1,02^{12} \approx 1,27$  euro op je rekening. Je kunt dus zeggen dat de bank per jaar een rente vergoedt van 27%. Zij laat immers iedere euro die je haar toevertrouwt in een jaar groeien tot 1,27 euro.

Misschien zou je verwachten dat een rente van 2% per maand overeen komt met een rente van  $2 \times 12 = 24\%$  per jaar. Dat is dus in werkelijkheid niet waar. Deze vergissing ligt wel voor de hand en daarom zegt men dat de ‘schijnbare intrest’ per jaar gelijk is aan  $12 \times 2 = 24\%$  en dat ‘de effectieve intrest’ per jaar gelijk is aan 27%.

#### Opgave 3.2.1

Veronderstel dat een bank maandelijks een rente vergoedt van 1,5%.

- Wat is dan de schijnbare intrest per jaar?
- Wat is dan de effectieve intrest per jaar?
- Als je bij deze bank 1000 euro op een spaarrekening zet, hoeveel heb je dan na een jaar?

#### Opgave 3.2.2

Veronderstel dat een bank iedere week een rente vergoed van 0,5%.

- Wat is dan de schijnbare interest per jaar?
- Wat is dan de effectieve interest per jaar?
- Als je bij deze bank 1000 euro op een rekening zet, hoeveel heb je dan na een jaar?

Neem aan dat je 1000 euro op een bankrekening zet. De bank belooft je dat je per jaar een effectieve rente van 6% zult krijgen, maar jij wilt liever aan het eind van iedere *maand* rente ontvangen in plaats van pas aan het eind van het jaar. Hoeveel procent rente kun je per maand krijgen in plaats van die 6% per jaar? Op het eerste gezicht denk je misschien dat dat  $6/12 = 0,5\%$  per maand is, maar dat is niet waar. De bank redeneert als volgt:

“We zullen jouw 1000 euro iedere maand met een bepaalde factor  $1 + i$  vermenigvuldigen. Na 1 maand heb je dan  $1000 \times (1 + i)$  euro, na 2 maanden  $1000 (1 + i)^2$  euro, na 3 maanden  $1000 \times (1 + i)^3$  euro enzovoorts. Na 12 maanden heb je  $1000 \times (1 + i)^{12}$  euro.

Dat bedrag  $1000 \times (1 + i)^{12}$  moet gelijk zijn aan  $1000 \times 1,06$ , want we willen je *per jaar* 6% rente geven.

$$\text{Dus} \quad 1000 \times (1 + i)^{12} = 1000 \times 1,06$$

$$\text{Hieruit volgt dat} \quad (1 + i)^{12} = 1,06$$

$$\text{Dus} \quad 1 + i = 1,06^{1/12} = 1,004868$$

$$\text{Dus} \quad i = 1,004868 - 1 = 0,004868$$

We moeten het bedrag dat op jouw bankrekening staat dus iedere maand met 1,004868 vermenigvuldigen. Dat betekent dat je per maand een rente krijgt van 0,4868%”.



Lenen of sparen?

**Opgave 3.2.3**

Veronderstel dat een bank per jaar een effectieve rente van 7% vergoedt.

- a. Welke rente vergoedt deze bank per maand?
- b. Als je bij deze bank 1000 euro op een bankrekening zet, hoeveel heb je dan na vier maanden?

**Opgave 3.2.4**

Veronderstel dat een bank per jaar een rente vergoedt van 10%.

- a. Welke rente vergoedt deze bank per week?
- b. Als je bij deze bank 1000 euro op een rekening zet, hoeveel heb je dan na een dertig weken?

### 3.3 Sparen in vaste termijnen

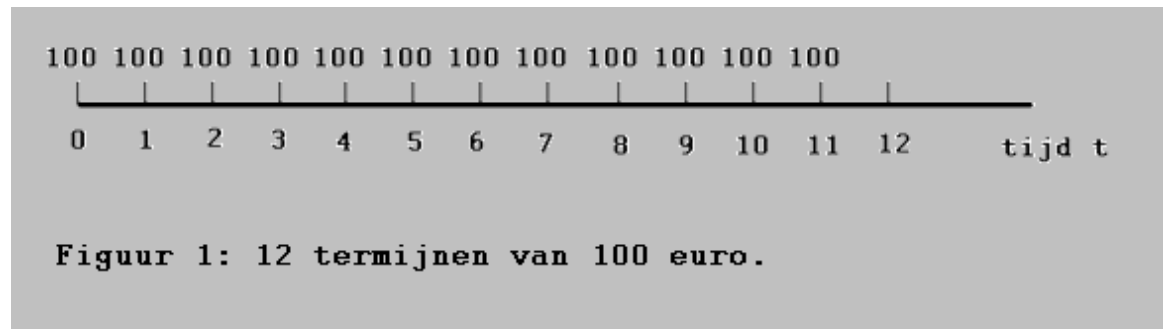
Als je geld wilt sparen om er iets leuks voor te kopen, dan kun je één keer een bedrag op een spaarrekening zetten en dan wachten tot dat bedrag, door vergoeding van intrest, gegroeid is tot het bedrag dat je nodig hebt. Maar dan moet je vaak erg lang wachten. Daarom zorgen veel mensen ervoor dat ze regelmatig, bijvoorbeeld iedere maand, een bepaald bedrag op een spaarrekening zetten.

#### Voorbeeld 1

Veronderstel dat je 12 maanden lang aan het begin van iedere maand 100 euro op een spaarrekening zet en veronderstel dat de bank iedere maand 2% intrest vergoedt. Hoeveel heb je dan na een jaar bij elkaar gespaard?

*Oplossing:*

Het bedrag van 100 euro dat je nu (op het tijdstip  $t = 0$ ) op je spaarrekening zet is na 12 maanden (op het tijdstip  $t = 12$ ) gegroeid tot  $100 \times 1,02^{12} \approx 126,82$  euro. Het bedrag van 100 euro dat je na een maand (op het tijdstip  $t = 1$ ) op je spaarrekening zet is 11 maanden later (dus op het tijdstip  $t = 12$ ) gegroeid tot  $100 \times 1,02^{11} \approx 124,34$  euro. Het bedrag van 100 euro dat je na twee maanden (op het tijdstip  $t = 2$ ) op je spaarrekening zet is 10 maanden later (dus op het tijdstip  $t = 12$ ) gegroeid tot  $100 \times 1,02^{10} \approx 121,90$  euro. Zo kun je doorgaan tot het bedrag van 100 euro dat je na 11 maanden (op het tijdstip  $t = 11$ ) op je bankrekening zet. Dat bedrag is een maand later (op het tijdstip  $t = 12$ ) gegroeid tot  $100 \times 1,02 = 102$  euro.



In totaal heb je na een jaar (op het tijdstip  $t = 12$ )

$$100 \times 1,02 + 100 \times 1,02^2 + 100 \times 1,02^3 + \dots + 100 \times 1,02^{12} =$$

$$100 \times 1,02 \times (1 + 1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + \dots + 1,02^{11}) \text{ euro.}$$

Het is vervelend klusje om  $1 + 1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + \dots + 1,02^{11}$  uit te moeten rekenen.

Daarom zullen we gebruik maken van de formule

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

die in bijlage 1 toegelicht wordt. Als je in deze formule  $r = 1,02$  en  $n = 11$  invult, dan vind je dat

$$1 + 1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + \dots + 1,02^{11} = \frac{1,02^{12} - 1}{1,02 - 1}$$

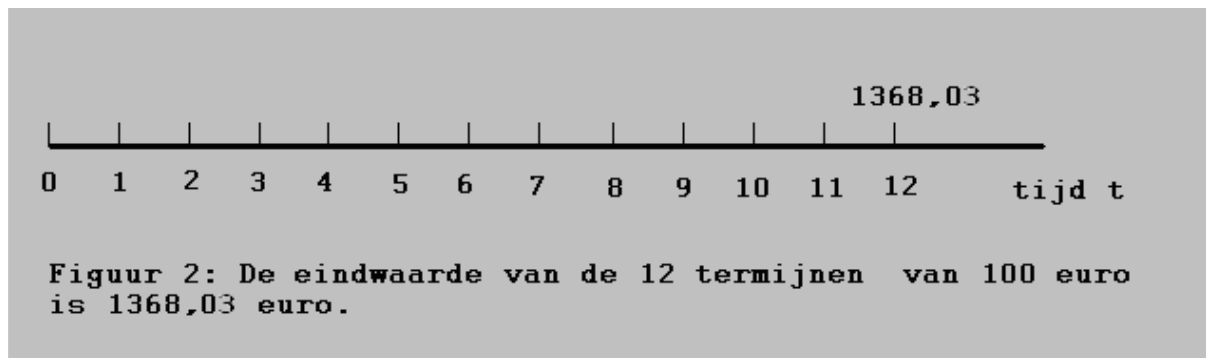
## Lenen of sparen?

Het bedrag dat je na een jaar bij elkaar gespaard hebt is dus

$$100 \times 1,02 \times (1 + 1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + \dots + 1,02^{11}) =$$

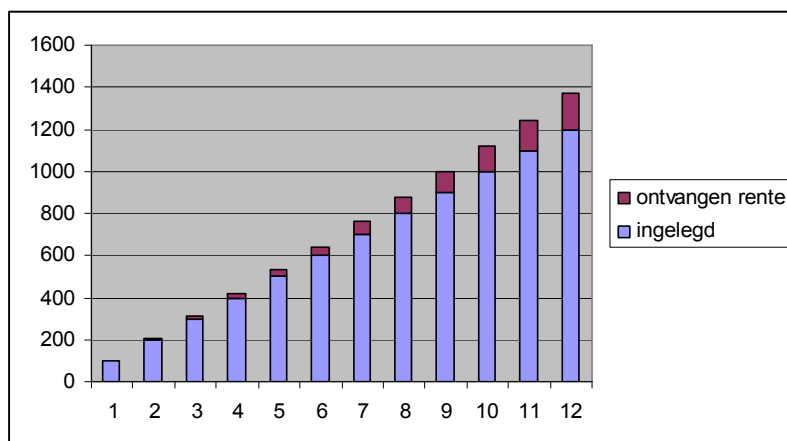
$$100 \times 1,02 \times \frac{1,02^{12} - 1}{1,02 - 1} \approx 1368,03 \text{ euro.}$$

Hiervoor heb je zelf  $12 \times 100 = 1200$  euro op je bankrekening moeten zetten. De rest, dus  $1368,03 - 1200 = 168,03$  euro, is intrest die je van de bank hebt gekregen.



Als je regelmatig een constant bedrag aan iemand anders geeft (zoals in dit voorbeeld, waarin je iedere maand 100 euro aan de bank toevertrouwt), dan noemen we dat 'een geldstroom in vaste termijnen'. Het bedrag van 1368,03 euro noemen we 'de eindwaarde' van deze geldstroom.

In de figuur hieronder kun je zien hoe je spaartegoed groeit als je een aantal maanden lang iedere maand 100 euro op een spaarrekening zet en als je per maand 2% rente ontvangt. Na 12 maanden heb je in totaal  $12 \times 100 = 1200$  euro ingelegd en ongeveer 168 euro aan rente ontvangen.



(Einde van voorbeeld 1.)

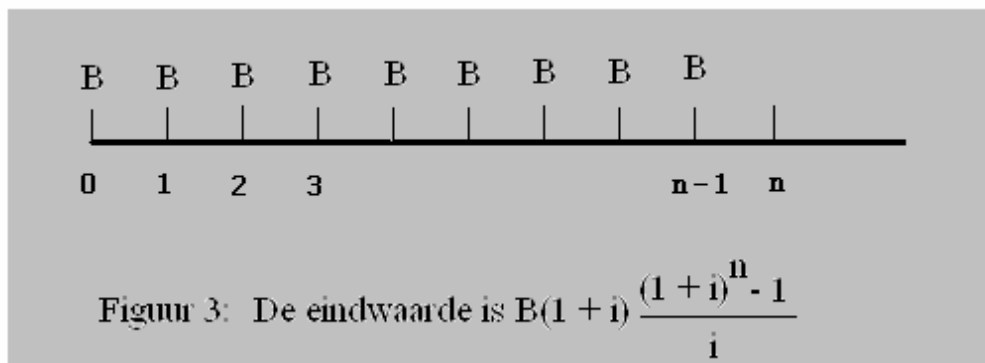
## Lenen of sparen?

In voorbeeld 1 heb je gezien dat je, als je 12 maanden lang aan het begin van iedere maand 100 euro op een bankrekening zet tegen een rente van 2% per maand, aan het eind van die 12 maanden kunt beschikken over  $100 \times 1,02 \times \frac{1,02^{12} - 1}{1,02 - 1} \approx 1368,03$  euro.

Die formule kun je algemener maken. Als je  $n$  maanden lang aan het begin van iedere maand een bedrag  $B$  op een bankrekening zet tegen een intrestpercentage  $i$ , dan kun je aan het eind van die  $n$  maanden beschikken over

$$EW = B \cdot (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (1)$$

We noemen dat bedrag ‘de eindwaarde’.



### Voorbeeld 2

Veronderstel dat je een aantal maanden lang aan het begin van iedere maand 200 euro op een spaarrekening zet bij een bank en veronderstel dat die bank per maand 1% intrest vergoedt. Hoeveel maanden duurt het dan totdat je 10.000 euro bij elkaar gespaard hebt?

*Oplossing:*

Ga ervan uit dat je  $n$  maanden lang aan het begin van iedere maand 200 euro op de spaarrekening zet. Volgens formule (1) heb je na  $n$  maanden een bedrag van

$$B \cdot (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 200 \cdot 1,01 \frac{1,01^n - 1}{0,01} =$$
$$\frac{202}{0,01} (1,01^n - 1) = 20200 (1,01^n - 1)$$

euro bij elkaar gespaard. Als we willen weten hoe lang het duurt totdat je 10.000 euro hebt, dan moeten we de vergelijking  $20.200 (1,01^n - 1) = 10.000$  oplossen.

Uit deze vergelijking volgt dat (zie volgende bladzijde)

## Lenen of sparen?

$$20.200 \times 1,01^n - 20.200 = 10.000$$

$$20.200 \times 1,01^n = 30.200$$

$$1,01^n = \frac{30200}{20200}$$

$$n \cdot {}^{10}\log(1,01) = {}^{10}\log(30200) - {}^{10}\log(20200)$$

$$n = \frac{{}^{10}\log(30200) - {}^{10}\log(20200)}{{}^{10}\log(1,01)} \approx 40,42$$

Het duurt dus ruim 40 maanden totdat je 10.000 euro bij elkaar gespaard hebt. Je hebt op dat moment zelf  $40 \times 200 = 8000$  euro op je spaarrekening gezet. De rest van de 10.000 euro, dus  $10.000 - 8000 = 2000$  euro, is intrestvergoeding die je van de bank gekregen hebt.

### **Opgave 3.3.1**

Je zet 20 maanden lang aan het begin van iedere maand 50 euro op een bankrekening. De bank vergoedt 1,5 % intrest per maand. Hoeveel heb je na 20 maanden bij elkaar gespaard?

### **Opgave 3.3.2**

Je zet 20 maanden lang aan het begin van iedere maand 50 euro op een bankrekening. De bank vergoedt 6% intrest per jaar. Hoeveel heb je na 20 maanden bij elkaar gespaard?

### **Opgave 3.3.3**

Je wilt iets kopen dat 1000 euro kost. Je besluit dat bedrag bij elkaar te sparen door een aantal maanden lang aan het begin van iedere maand 50 euro op een spaarrekening te zetten bij een bank. Die bank vergoedt 2% intrest per maand. Hoeveel maanden duurt het voordat je 1000 euro bij elkaar hebt gespaard? Hoeveel van die 1000 euro heb je dan zelf op je spaarrekening gezet en hoeveel van die 1000 euro bestaat uit intrest die je van de bank hebt ontvangen?

### **Voorbeeld 3**

Veronderstel dat je 20 maanden lang aan het begin van iedere maand 100 euro op een spaarrekening zet bij een bank die per maand 2% intrest vergoedt. Aan het eind van de 15<sup>e</sup> maand neem je een derde deel op van het bedrag dat op dat moment op je rekening staat. Hoeveel staat er dan aan het eind van de 20<sup>e</sup> maand op je rekening?

*Oplossing:*

Aan het eind van de 15<sup>e</sup> maand staat er

$$100 \cdot 1,02 \cdot \frac{1,02^{15} - 1}{0,02} \approx 1763,93$$

euro op je rekening. Als je daarvan een derde deel opneemt, dan blijft er nog 1175,95 euro staan. Dat bedrag groeit in de volgende 5 maanden tot

$$1175,95 \cdot 1,02^5 \approx 1298,35 \text{ euro.}$$

In de maanden 16 t/m 20 zet je nog vijf keer 100 euro op je bankrekening. Die twintig

Lenen of sparen?

bedragen zijn aan het eind van de 20<sup>e</sup> maand gegroeid tot

$$100 \cdot 1,02 \cdot \frac{1,02^5 - 1}{0,02} \approx 530,81 \text{ euro}$$

In totaal staat er aan het eind van de 20<sup>e</sup> maand dus  $1298,35 + 530,81 = 1829,16$  euro op je rekening.

#### **Opgave 3.3.4**

Meneer Zenhorst zet 30 maanden lang aan het begin van iedere maand 500 euro op een spaarrekening zet bij een bank die per maand 1% intrest vergoedt. Aan het eind van de 10<sup>e</sup> maand neemt zijn vrouw, zonder dat hij dat in de gaten heeft, de helft op van het bedrag dat op dat moment op zijn rekening staat.

- a) Welk bedrag verwacht meneer Zenhorst dat er na 30 maanden op zijn rekening zal staan?
- b) Welk bedrag staat er in werkelijkheid op?

Mijn naam is Jan-Maarten Visser. Ik werk voor FTE, een bedrijf dat financiële specialisten en pensioenadviseurs detacheert naar andere bedrijven. Op dit moment heeft FTE mij uitgeleend aan de Grafische Bedrijfsfondsen. Ik houd me daar bezig met pensioenen: ik moet onder andere berekenen hoeveel pensioen de partners van werknemers van grafische bedrijven gaan ontvangen.

Als je dit werk doet dan moet je redelijk goed zijn in wiskunde, vooral in kansberekening en in intrestrekening. Ik vind het werk leuk en afwisselend, FTE kan mij uitlenen aan allerlei verschillende bedrijven waarvoor ik allerlei verschillende klussen uit moet voeren.

Als je een grote aankoop wilt doen, dan zou ik daarvoor sparen. Je moet oppassen met het lenen van grote sommen geld. Een lening moet altijd terugbetaald worden, mét rente. Als je geld wilt lenen, dan moet je er van tevoren goed over nadenken of je wel in staat bent om die lening ook weer terug te betalen naast je gewone maandelijkse uitgaven.



## 4. Lenen

### 4.1 Persoonlijke lening en doorlopend krediet

Als je geld wilt lenen bij een bank, dan kan dat op verschillende manieren. De twee manieren die het meest voorkomen zijn de ‘persoonlijke lening’ en ‘het doorlopende krediet’.

Bij een persoonlijke lening ga je een lening aan zonder een onderpand. Je bespreekt vooraf met de bank hoe hoog het bedrag is dat je gaat lenen, hoe lang je dat bedrag gaat lenen en welke rente je gaat betalen. Het bedrag, de rente en de aflossingstijd staan dus vast, je kunt ze tussentijds niet meer wijzigen. Het voordeel hiervan is dat beide partijen precies weten er van hen verlangd wordt en jij weet precies hoeveel de lening je gaat kosten. Een ander voordeel is dat het relatief goedkoper is dan andere leenvormen.

Om je lening af te lossen betaal je maandelijks een vast bedrag dat voor een deel uit rente bestaat en voor een ander deel uit de aflossing van de lening. Al de bedragen bij elkaar zorgen ervoor dat je de lening geheel aflost en dat de bank een rentevergoeding ontvangt voor de lening.

Het maximum wat je kunt lenen hangt af van je inkomsten en of je al andere leningen hebt lopen. Hoe hoger de vaste inkomsten zijn, des te meer je kunt lenen. Vaak bestaat er wel een mogelijkheid om vervroegd af te lossen als je eerder van je lening af wilt zijn, maar de bank brengt daar meestal wel een boete voor in rekening.

Bij een doorlopend krediet heb je niet de zekerheid van een persoonlijke lening. Je spreekt wel een theoretische looptijd af en een maximaal bedrag wat je leent, maar je mag tussentijds weer opnieuw geld opnemen of eerder kosteloos aflossen. Je spreekt hierbij dus af dat je maximaal een bepaald bedrag leent, maar je mag ook minder lenen van de rekening dan je afgesproken maximum.

Er zijn twee verschillende vormen van een doorlopend krediet, namelijk uitgaande van een vast of variabel termijn bedrag. Als er wordt uitgegaan van een vast termijnbedrag, dan betaal je iedere maand een vaste vergoeding voor het feit dat je geld mag lenen. De hoogte van die vaste vergoeding hangt alleen af van het maximale bedrag dat je mag lenen, maar niet van het bedrag dat je daadwerkelijk leent. Het voordeel van deze kredietvorm is dat je kosten elke maand gelijk blijven. Let er wel op dat je aan het eind van de laatste termijn niet meer rood staat. Anders moet je voor de volgende termijn weer een vaste vergoeding betalen!

Er kan ook worden gekozen voor een variabel maandbedrag. Je betaalt dan per maand rente over het uitstaande saldo: het totale bedrag dat je van je rekening hebt opgenomen.

Bij beide vormen van doorlopend krediet hangt de rente die je tijdens een bepaalde termijn betaalt af van de rentestand op dat moment. Die rentestand kan variëren, je weet dus niet van tevoren waar je aan toe bent.

## 4.2 Contante waarde

Als je geld van iemand leent, dan is het gebruikelijk dat je daarvoor rente betaalt.

Veronderstel dat persoon P een bepaald bedrag wil lenen van persoon Q. P belooft aan Q dat hij over een jaar 50 euro terug zal betalen aan Q. Q wil hem wel een jaar lang een bedrag lenen, maar hij wenst daarvoor een rente te ontvangen van 5%. Hoeveel zal Q aan P willen lenen?

Om dat uit te rekenen redeneert Q als volgt: veronderstel dat ik nu een bepaald bedrag CW aan P leen. Als ik 5% rente wil ontvangen, dan moet P me na een jaar  $1,05 \times CW$  euro terugbetalen. Dus  $1,05 \times CW = 50$ . Dus  $CW = 50/1,05 \approx 47,62$ .

Q besluit dus om 47,62 euro te lenen aan P. We zeggen dat de 50 euro die P na een jaar aan Q terug zal betalen nu, op het moment dat hij de lening aangaat, een 'contante waarde' hebben van 47,62 euro. In het algemeen geldt: Als je geld kunt lenen tegen een rente van 5 % per jaar is, dan is de contante waarde van B euro's die je pas over een jaar terug gaat betalen, gelijk aan

$$CW = \frac{B}{1,05}$$

Wat gebeurt er als P aan Q belooft dat hij pas over twee jaar 50 euro terug gaat betalen?

Hoeveel zal Q dan nu aan P willen geven? Q redeneert op een vergelijkbare manier als hierboven: veronderstel dat ik nu een bepaald bedrag CW aan P leen. Als ik per jaar 5% rente wil ontvangen, dan moet P me over twee jaar een bedrag terugbetalen van  $1,05^2 \times CW$  euro. Dus  $1,05^2 \times CW = 50$ . Dus  $CW = 50/1,05^2 \approx 45,35$  euro.

Q is dus bereid om nu 45,35 euro aan P te geven. Je kunt dus zeggen dat de 50 euro's die P pas over twee jaar terug gaat betalen nu een contante waarde hebben van 45,35 euro. En in het algemeen geldt dat een bedrag van B euro dat pas over twee jaar betaald gaat worden, nu een contante waarde heeft die gelijk is aan

$$CW = \frac{B}{1,05^2}$$

Hoe later een bedrag betaald gaat worden, des te lager is de contante waarde van dat bedrag. Als P aan Q belooft dat hij pas over 3 jaar (dus op het tijdstip  $t=3$ ) B euro terug zal betalen, dan zal Q hem daar nu maar  $B/1,05^3$  euro voor willen lenen. In het algemeen geldt: Als de rente 5% per jaar is, dan is de contante waarde van B euro's die pas over n jaar betaald gaan worden, gelijk aan

$$CW = \frac{B}{1,05^n}$$

### Voorbeeld 1

Je wilt bij de bank een bedrag lenen tegen een rente van 5%. Je belooft de bank dat je over 6 jaar 800 euro terug zult betalen. Welk bedrag zal de bank je daarvoor willen lenen?

*Oplossing:*

De contante waarde van de 800 euro die je over 6 jaar terug gaat betalen is

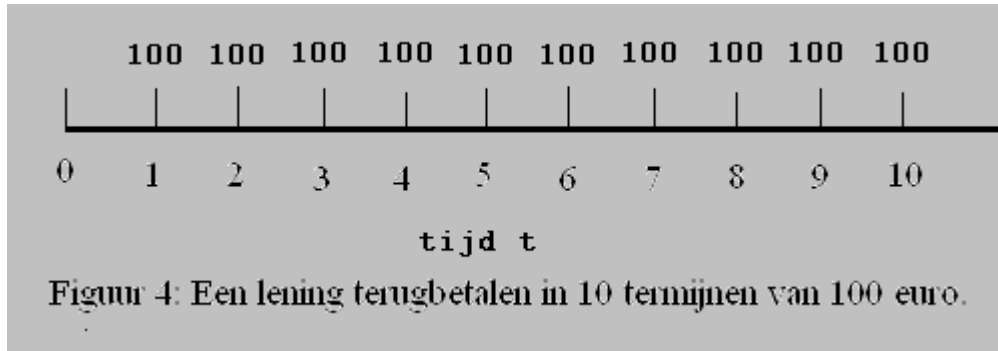
$$CW = \frac{800}{1,05^6} \approx 596,97 \text{ euro.}$$

Dat is het bedrag dat de bank je nu zal willen lenen.



### Voorbeeld 2

Je gaat naar de bank om een bepaald bedrag te lenen tegen 5% rente per jaar. Je belooft de bank dat je in de komende jaren *tien keer achter elkaar* 100 euro terug zult betalen, dus 100 euro op het tijdstip  $t = 1$ , weer 100 euro op het tijdstip  $t = 2$ , weer 100 euro op het tijdstip  $t = 3$  enzovoorts tot en met 100 euro op het tijdstip  $t = 10$ . Hoeveel zal de bank je dan nu willen lenen?



#### Oplossing:

De bank berekent dan de contante waarde van alle bedragen die je in de komende jaren terug gaat betalen. De 100 euro die je na 1 jaar terug gaat betalen, hebben nu een contante waarde van  $100/1,05$  euro. De 100 euro die je na 2 jaar terug gaat betalen, hebben nu een contante waarde van  $100/1,05^2$  euro. De bedragen van 100 euro die je op de tijdstippen 3 t/m 10 terug gaat betalen hebben contante waarden van  $100/1,05^3$  t/m  $100/1,05^{10}$  euro. De totale contante waarde van alle bedragen die je terug gaat betalen is

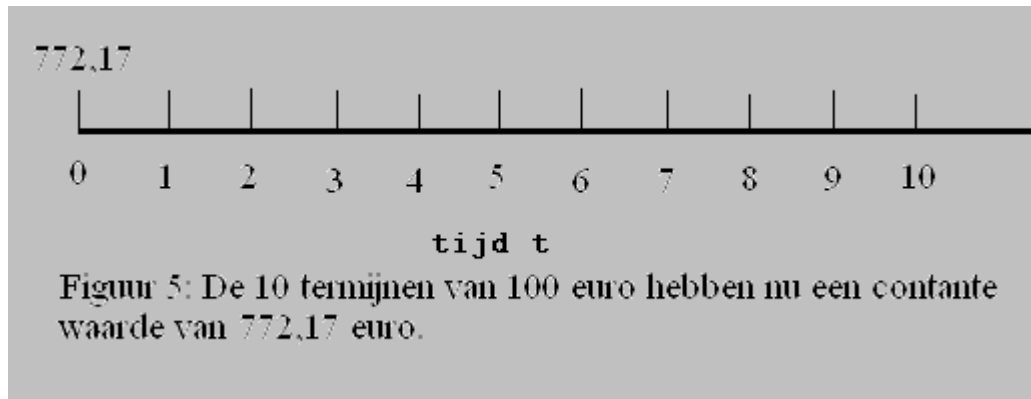
$$\begin{aligned}
 CW &= 100 \left( \frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,05^2} + \frac{1}{1,05^3} + \dots + \frac{1}{1,05^{10}} \right) = \\
 &= \frac{100}{1,05} \left( 1 + \frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,05^2} + \dots + \frac{1}{1,05^9} \right) = \\
 &= \frac{100}{1,05} \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,05^{10}}}{1 - \frac{1}{1,05}} = 100 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,05^{10}}}{1,05 - 1} = 100 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,05^{10}}}{0,05} \approx 772,17 \text{ euro.}
 \end{aligned}$$

In deze berekening is weer gebruik gemaakt van de formule (nu anders uitgeschreven)

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

die in bijlage 1 toegelicht wordt. In die formule is  $r = 1/1,05$  en  $n = 9$  ingevuld.

## Lenen of sparen?



(Einde van voorbeeld 1).

In voorbeeld 1 gingen we ervan uit dat je een bedrag wilt lenen tegen een rente van 5% per jaar. Als je belooft dat je 10 jaar lang aan het eind van ieder jaar 100 euro terugbetaalt, dan is de grootte van het bedrag dat je nu kunt lenen

$$CW = 100 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,05^{10}}}{0,05} \approx 772,17 \text{ euro.}$$

Dit bedrag is de contante waarde van de 10 termijnen van 100 euro die je terug gaat betalen. Je kunt deze formule algemener maken. Veronderstel dat je een bedrag wilt lenen tegen een jaarlijks intrestpercentage  $i$ . Als je belooft dat je in de komende  $n$  jaren aan het eind van ieder jaar een bedrag  $B$  terug gaat betalen dan is de grootte van het bedrag dat je nu kunt lenen gelijk aan

$$CW = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \quad (2)$$

### Opgave 4.2.1

Veronderstel dat de marktrente 6 % is. Iemand belooft je dat hij over een jaar 200 euro aan je zal betalen. Hoeveel wil je hem daar nu voor lenen?

### Opgave 4.2.2

Veronderstel dat de marktrente 6 % is. Je wilt een bepaald bedrag lenen bij de bank. Je belooft de bank dat je over drie jaar 500 euro terug zult betalen. Welk bedrag zal de bank je daar nu voor willen lenen?

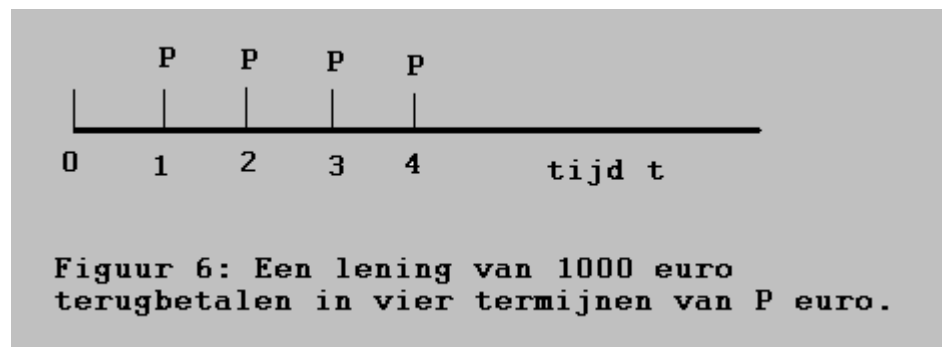
### Opgave 4.2.3

Veronderstel dat de marktrente 6% is. Je wilt een bepaald bedrag lenen bij de bank. Je belooft de bank dat je acht jaar lang aan het eind van ieder jaar 500 euro terug zult betalen. Welk bedrag zal de bank je daar nu voor willen lenen?

### 4.3 Een lening terugbetalen in vaste termijnen

#### Voorbeeld 1

Veronderstel dat de marktrente 5% is. Je gaat nu naar de bank toe om een bedrag van 1000 euro te lenen en je bent bereid om die lening in de komende vier jaar terug te betalen. Je wilt dat terugbetalen graag in vaste termijnen doen, dat wil zeggen je wilt graag op het tijdstip  $t = 1$  een bepaald bedrag  $B$  terugbetalen en op de tijdstippen  $t = 2$ ,  $t = 3$  en  $t = 4$  wil je het zelfde bedrag  $B$  terugbetalen. Dat terugbetalen in vaste termijnen is voor jou plezierig, je weet dan precies waar je in de komende jaren aan toe bent. Hoe groot zou dat bedrag  $B$  zijn?



#### Oplossing:

De bank bepaalt, als ze wil berekenen hoeveel geld ze jou wil lenen, de contante waarde van de bedragen die je in de komende jaren terug gaat betalen. Daarvoor gebruikt men de formule die we in de vorige paragraaf al gezien hebben:

$$CW = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

In jouw geval is het bedrag dat je wilt lenen gelijk aan  $CW = 1000$ . Het jaarlijkse intrestpercentage is  $i = 0,05$ , het aantal jaren is  $n = 4$  en de bedragen die je terug gaat betalen hebben een nog onbekende grootte  $B$ . Als je deze gegevens allemaal invult, dan vind je dat

$$1000 = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1,05)^4}}{0,05}$$

Er geldt dus dat

$$B = \frac{1000 \cdot 0,05}{1 - \frac{1}{1,05^4}} \approx 282,01 \text{ euro.}$$

Je zult dus vier jaar lang ieder jaar 282,01 euro moeten terugbetalen voor de 1000 euro die je nu leent. In totaal ga je dus  $4 \times 282,01 = 1128,04$  euro terugbetalen! Dat is 128,04 euro meer dan de 1000 euro die je nu leent. De bank beschouwt die 128 euro als een rentevergoeding, een vergoeding voor het feit dat jij die 1000 euro hebt mogen lenen.

Lenen of sparen?

### Voorbeeld 2

Veronderstel dat de marktrente 7% is. Je wilt een bedrag lenen van 6000 euro en je wilt die komende lening in de komende jaren in vaste termijnen terug gaan betalen, namelijk 800 euro na 1 jaar, 800 euro na 2 jaar, 800 euro na 3 jaar enzovoorts.

Na hoeveel jaar ben je klaar met terugbetalen? Hoeveel heb je dan in totaal terugbetaald?

*Oplossing:*

Veronderstel dat je  $n$  jaren achter elkaar een bedrag van 800 euro terugbetaalt aan degene van wie je 6000 euro geleend hebt. De contante waarde van al die bedragen van 800 euro is gelijk aan 6000 euro, dus

$$6000 = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 800 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,07^n}}{0,07}$$

Hieruit volgt dat

$$1 - \frac{1}{1,07^n} = 6000 \cdot \frac{0,07}{800} = 0,525$$

$$\frac{1}{1,07^n} = 1 - 0,525 = 0,475$$

$$1,07^n = \frac{1}{0,475}$$

$$n \cdot {}^{10}\log(1,07) = -{}^{10}\log(0,475)$$

$$n = \frac{-{}^{10}\log(0,475)}{{}^{10}\log(1,07)} \approx 11,00$$

Je bent dus na (iets meer dan) 11 jaar klaar met terugbetalen. Je hebt dan in totaal  $11 \times 800 = 8800$  euro terugbetaald, namelijk 6000 euro om de lening terug te betalen en 2800 euro rente.

### Opgave 4.3.1

De marktrente is 6%. Je leent bij een bank een bedrag van 1000 euro en je wilt die lening in de komende drie jaar terug gaan betalen in vaste termijnen. Hoe groot is het bedrag  $B$  dat je jaarlijks gaat terugbetalen?

### Opgave 4.3.2

De marktrente is 7%. Je wilt een bedrag lenen van 5000 euro en je wilt die lening in de komende 6 jaar gaan afbetalen in vaste termijnen. Hoe groot is het bedrag  $B$  dat je jaarlijks terug gaat betalen? Hoeveel ga je in totaal terugbetalen?

### Opgave 4.3.3

Je leent een bedrag van 6000 euro tegen een jaarlijkse rente van 7%. Je belooft dat je een aantal jaren lang aan het eind van ieder jaar 500 euro terug zult betalen. Hoeveel jaren ben je bezig met terugbetalen?

### Voorbeeld 3

Een bank maakt reclame voor persoonlijke leningen. In hun advertentie staat dat je 2000 euro kunt lenen tegen een effectieve jaarlijkse rente van 10%. Je moet dan 24 maanden lang iedere maand 92 euro terugbetalen. Kloppen de berekeningen die deze bank gedaan heeft? Heb je dan inderdaad jaarlijks een effectieve rente van 10% betaald?

*Oplossing:*

Als de jaarlijkse effectieve rente 10% is, dan betekent dat dat een bedrag van 1 euro iedere jaar vermenigvuldigd wordt met 1,10. Voor het maandelijkse intrestpercentage  $i$  geldt dus dat  $1 + i = 1,10^{1/12}$ .

Je belooft de bank dat je 24 maanden lang een bedrag  $B$  terug zult betalen. De contante waarde van alle bedragen die je terug gaat betalen is 2000 euro, dus

$$2000 = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1,10^{1/12})^{24}}}{1,10^{1/12} - 1}$$

Hieruit volgt dat

$$B = \frac{2000 \cdot (1,10^{1/12} - 1)}{1 - \frac{1}{(1,10^{1/12})^{24}}} \approx 91,89 \text{ euro.}$$

Dat klopt bijna met het bedrag van 92 euro dat de bank je per maand wil laten terugbetalen. De bank heeft de maandelijkse terugbetaling een beetje in haar eigen voordeel afgerond.

### Opgave 4.3.4

In een advertentie van een bank staat dat je 5000 euro kunt lenen tegen een jaarlijkse intrest van 7,9%. Je moet dan 96 maanden lang 70 euro per maand terugbetalen. Is dat eerlijke informatie? Dat wil zeggen: als je 96 maanden lang iedere maand 70 euro terugbetaalt, heb je dan inderdaad een jaarlijkse intrest betaald van 7,9%?

Mijn naam is Tamara Madern. Ik ben een onderzoeker bij het Nibud, een stichting die voorlichting geven over de huishoudfinanciën. Mensen kunnen op onze website terecht voor allerlei informatie, bijvoorbeeld wat een maaltijd kost, hoe je een begroting kunt maken, waar je op moet letten bij een lening, maar ook zakgeld bedragen en de kosten van gadgets. Mensen kunnen bij ons ook brochures bestellen en we werken samen met intermediairs die bij ons opleidingen volgen, materialen bestellen of advies vragen. We hebben veel gemeenten, schuldhulpverleners, woningbouwcorporaties en P&O'ers als klanten.

Maar we doen ook veel voor particulieren.

De meeste onderzoekers bij het Nibud hebben een economische achtergrond. Voor de analyses van de onderzoeken wordt veel gebruik gemaakt van statistiek.

Als je iets duurs wilt kopen bedenk dan eerst goed of je het echt wilt hebben en probeer het dan bij elkaar te sparen.

Van het geld dat je bespaart doordat je geen rente hoeft te betalen, kun je iets anders leuks kopen!



## 5. Sparen of lenen?

Wat is slimmer, sparen of lenen? Met een **rekenvoorbeeld** kunnen we daar nu wel iets over zeggen.

Veronderstel dat twee personen, P en Q, allebei een flatscreentelevisie willen kopen die 1000 euro kost. Ze kunnen allebei 50 euro per maand uitgeven. P leent 1000 euro bij een bank en koopt de flatscreen daarvoor onmiddellijk. Hij zal de lening terugbetalen in maandelijkse termijnen van 50 euro. De bank vraagt 3% intrest per maand voor de lening. Q besluit nog even te wachten. Hij zet een aantal maanden lang aan het begin van iedere maand 50 euro op een spaarrekening bij een bank die 3% intrest per maand geeft. Hij gaat hiermee door totdat hij voldoende gespaard heeft om de televisie te kopen. Hoeveel geeft P dan uiteindelijk uit? En Q?

*Oplissing:*

Voor P is de situatie als volgt. We weten niet bij voorbaat hoeveel hij nodig heeft om de lening terug te betalen. We nemen aan dat hij  $n$  maanden lang aan het eind van iedere maand 50 euro terug zal betalen aan de bank. De  $n$  bedragen van 50 euro die P terug gaat betalen hebben samen een contante waarde die gelijk is aan 1000 euro. Dus

$$1000 = B \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 50 \frac{1 - \frac{1}{1,03^n}}{0,03}$$

Hieruit volgt dat

$$1 - \frac{1}{1,03^n} = 1000 \frac{0,03}{50} = 0,6$$

$$\frac{1}{1,03^n} = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$1,03^n = \frac{1}{0,4} = 2,5$$

$$n^{10} \log(1,03) = {}^{10}\log(2,5)$$

$$n = \frac{{}^{10}\log(2,5)}{{}^{10}\log(1,03)} \approx 30,99$$

Het duurt dus ongeveer 31 maanden voordat P zijn lening heeft terugbetaald. In die 31 maanden betaalt hij de bank in totaal  $31 \times 50 = 1550$  euro.

Hoe zit het met Q? We nemen aan dat hij  $m$  maanden lang aan het begin van iedere maand 50 euro op een spaarrekening zet. Na  $m$  maanden hebben die bedragen samen een eindwaarde die gelijk is aan 1000 euro. Dus

$$1000 = B(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 50 \cdot 1,03 \frac{1,03^n - 1}{0,03}$$

## Lenen of sparen?

Hieruit volgt dat

$$1,03^n - 1 = 1000 \frac{0,03}{50 \cdot 1,03} = \frac{30}{51,5}$$

$$1,03^n = \frac{30}{51,5} + 1 = \frac{81,5}{51,5}$$

$$n^{10} \log(1,03) = {}^{10}\log\left(\frac{81,5}{51,5}\right) = {}^{10}\log(81,5) - {}^{10}\log(51,5)$$

$$n = \frac{{}^{10}\log(81,5) - {}^{10}\log(51,5)}{{}^{10}\log(1,03)} \approx 15,53$$

Het duurt dus ongeveer 15 en een halve maand voordat Q 1000 euro bij elkaar gespaard heeft, laten we zeggen 16. In die 16 maanden zet Q  $16 \times 50 = 800$  euro op zijn spaarrekening. Wat is dus slimmer, sparen of lenen? In dit voorbeeld zie je dat je, als je onmiddellijk een flatscreentelevisie van 1000 euro wilt kopen, achteraf 1550 euro terug moet betalen voor een lening. Als je het geduld hebt om te sparen dan hoeft je maar 800 euro op een spaarrekening te zetten.

### **Opgave 5.1**

Veronderstel dat je een scooter wilt kopen 2000 euro. Je kunt maandelijks een bedrag opzij zetten van 100 euro. Je staat voor de keuze: leen ik een bedrag van 2000 euro bij de bank om de scooter onmiddellijk te kopen en betaal ik die lening terug in maandelijkse termijnen van 100 euro? Of open ik een spaarrekening bij die bank en spaar ik het bedrag van 2000 euro bij elkaar door iedere maand 100 euro op die spaarrekening te zetten?

De bank vraagt maandelijks 4% rente voor een lening. De bank vergoedt ook maandelijks 4% rente op een spaarrekening. Wat kun je het beste doen?

- Hoeveel maanden ben je bezig met terugbetalen als de 2000 euro leent? Hoeveel heb je dan in totaal terugbetaald?
- Hoeveel maanden ben je bezig als je de 2000 euro bij elkaar spaart? Hoeveel geld heb je dan naar de bank gebracht?
- Waar zou jij voor kiezen? Lenen of sparen?

Bron: Nibud

#### Sparen of lenen

Sparen is eigenlijk heel spannend. Want wat je wilt hebben, komt steeds dichterbij. En je kan je echt op iets verheugen.

#### Spaartips

- Open een speciale spaarrekening voor bijvoorbeeld de scooter of de vakantie. Zo weet je waarvoor je spaart en je weet hoeveel je al hebt.
- Krijg je onverwachts geld? Zet dat dan gelijk op je spaarrekening. Zo geef je het niet meteen weer uit.
- Hou je iedere maand geld over? Laat de bank dan automatisch dat bedrag iedere maand van je gewone rekening naar je spaarrekening overmaken.
- Hoe langer je geld vaststaat en je er dus moeilijk aan kunt komen, hoe meer rente je krijgt.

## Lenen of sparen?

### Lenen

Als je geld leent voor iets dan kun je het sneller kopen. Dat is natuurlijk leuk. Maar het vervelende is dat je het geld echt moet terugbetalen. Vaak zelfs met rente.

### Leentips

- Een lening moet je iedere maand afbetalen. Met rente! Kijk of je iedere maand wel genoeg geld hebt om dat bedrag te betalen. Als je niet betaalt, kom je in de problemen.
- Let op hoe lang je bezig bent met afbetalen. Het is balen als je nog moet betalen voor iets dat je allang niet meer gebruikt.
- Let op met zogenaamde goedkope leningen. Vaak gelden de lage rentes maar voor een paar maanden. Daarna ga je veel meer betalen.
- Wil je nu iets kopen waar je het geld niet voor hebt? Leen dan liever bij je eigen bank. Leen niet via een postorderbedrijf of via een klantenkaart. Zij berekenen veel meer rente.

### Sparen of toch lenen?

Is het nu slimmer om te gaan sparen of te gaan lenen? Dat zul je voor jezelf moeten betalen. Wel zijn er twee algemene regels die je kunt toepassen:

- Kun je de aankoop uitstellen? Spaar dan, dat is veel goedkoper.
- Kunnen er hoge kosten ontstaan doordat je de aankoop uitstelt? Stel dat je scooter dringend moet worden gerepareerd en dat je daarvoor een lening nodig hebt. Als je de scooter niet repareert, kan de schade zo groot worden, dat je uiteindelijk duurder uit bent. Of je gaat elke dag met de bus tot je genoeg geld hebt gespaard voor de lening, dan ben je natuurlijk veel geld kwijt aan reiskosten.

### Lenen bij de winkel

Op afbetaling kopen is ook lenen. Winkeliers bieden dus vaak een lening aan. Het lijkt heel makkelijk. 'Koop nu en betaal later...' Maar die winkel wil echt verdienen. Dus betaal jij flink veel rente. Zo wordt je scooter nog duurder.

### Voorbeeld

Wat kost een scooter van 2000 euro?

Rachid heeft een scooter gekocht van € 2000. Hij heeft 'm op afbetaling gekocht. Hij lost € 90 per maand af, 24 maanden lang. Hij betaalt 0,5% rente per maand. Rachid heeft € 2340 betaald voor de scooter als die eenmaal is afbetaald.



## 6. Toepassing Excel

In deze module heb je verschillende formules gezien waar je gegevens mee kunt berekenen. Je hebt gezien waar ze vandaan komen en hoe je ze kunt gebruiken. Nu je dat weet kun je ook begrijpen wat het computerprogramma Excel voor verschillende functies heeft en hoe die werken.

### 6.1 Contante waarde

In het hoofdstuk over lenen staat het volgende voorbeeld:

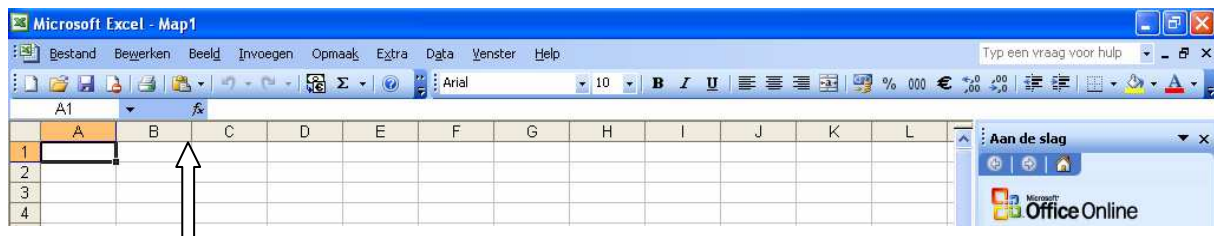
#### Voorbeeld 1

Je gaat naar de bank om een bepaald bedrag te lenen tegen 5% rente per jaar. Je belooft de bank dat je in de komende jaren *tien keer achter elkaar* 100 euro terug zult betalen, dus 100 euro op het tijdstip  $t = 1$ , weer 100 euro op het tijdstip  $t = 2$ , weer 100 euro op het tijdstip  $t = 3$  enzovoorts tot en met 100 euro op het tijdstip  $t = 10$ . Hoeveel zal de bank je dan nu willen lenen?

Dit kun je handmatig oplossen, zoals hoofdstuk 4 liet zien, met de volgende formule:

$$CW = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Bij Excel is daar de functie HW voor. Deze functie kun je vinden door op  $f_x$  te klikken.



Kies categorie Financieel en zoek de functie HW op. Klik hierop en kies OK.

Het scherm dat op de volgende bladzijde staat zal dan openen. Als je bij **Rente** de rente invult met %-teken, bij **Aantal-termijnen** het aantal termijnen invult en bij **Bet** het bedrag dat je per maand betaald met min-teken (je betaált namelijk dat bedrag), dan weet je hoeveel de bank je nu zal willen lenen.

Op de volgende bladzijde kun je zien dat de bank je 772,17 euro wil lenen. Dit getal kwam er ook uit in hoofdstuk 4.

## Lenen of sparen?

The screenshot shows the 'Functieargumenten' (Function Arguments) dialog box for the NPV function in Excel. The dialog has a blue title bar with the text 'Functieargumenten' and a close button. Inside, the function name 'NPV' is displayed in the top left. The arguments are listed as follows:

| Argument         | Value | Result  |
|------------------|-------|---------|
| Rente            | 5%    | = 0,05  |
| Aantal-termijnen | 10    | = 10    |
| Bet              | -100  | = -100  |
| Tw               |       | = getal |
| Type_getal       |       | = getal |

Below the arguments, the result of the formula is shown: = 772,1734929. A descriptive text explains the function: 'Berekent de huidige waarde van een investering: het totale bedrag dat een reeks toekomstige betalingen momenteel waard is.' A note about the 'Bet' argument states: 'Bet is de betaling die iedere termijn wordt verricht. Dit bedrag kan gedurende de looptijd van de investering niet worden gewijzigd.' At the bottom, the 'Resultaat formule =' is shown as 772,1734929. There is a link 'Help-informatie over deze functie' and two buttons: 'OK' and 'Annuleren'.

### Opgave 6.1.1

Onderstaande vraag heb je al in hoofdstuk 4 gezien. Probeer hem nu op te lossen met Excel. Veronderstel dat de markrente 6% is. Je wilt een bepaald bedrag lenen bij de bank. Je belooft de bank dat je acht jaar lang aan het eind van ieder jaar 500 euro terug zult betalen. Welk bedrag zal de bank je daar nu voor willen lenen?

### Opgave 6.1.2

Veronderstel dat de markrente 4% is. Je wilt een bepaald bedrag lenen bij de bank. Je belooft de bank dat je 10 jaar lang aan het eind van ieder jaar 750 euro terug zult betalen. Welk bedrag zal de bank je daar nu voor willen lenen? Bereken met Excel.

## 6.2 Een lening terugbetalen in vaste termijnen

In het hoofdstuk over lenen staan de volgende voorbeelden:

### Voorbeeld 1

Veronderstel dat de marktrente 5% is. Je gaat nu naar de bank toe om een bedrag van 1000 euro te lenen en je bent bereid om die lening in de komende vier jaar terug te betalen. Je wilt dat terugbetalen graag in vaste termijnen doen, dat wil zeggen je wilt graag op het tijdstip  $t = 1$  een bepaald bedrag  $B$  terugbetalen en op de tijdstippen  $t = 2$ ,  $t = 3$  en  $t = 4$  wil je het zelfde bedrag  $B$  terugbetalen. Hoe groot zou dat bedrag  $B$  zijn?

Dit kun je handmatig oplossen, zoals hoofdstuk 4 liet zien, met de volgende formule:

$$1000 = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1,05)^4}}{0,05}$$

Bij Excel is daar de functie BET voor. Deze functie kun je vinden door op  $f_x$  te klikken. Kies categorie Financieel en zoek de functie BET op. Klik hierop en kies OK.

Het scherm wat hieronder staat zal dan openen. Als je bij **Rente** de rente invult met %-teken, bij **Aantal-termijnen** het aantal termijnen invult en bij **Hw** het bedrag dat je wilt lenen, dan weet je hoeveel je per jaar kwijt zal zijn. Het antwoord staat negatief, omdat je het bedrag moet betalen.

The screenshot shows the 'Functieargumenten' (Function Arguments) dialog box for the BET function. The dialog has a title bar with 'Functieargumenten' and a close button. Inside, the function name 'BET' is shown in the top left. The arguments are listed as follows:

- Rente**: 5% (with a small icon to the right, and '= 0,05' to the right of the input field)
- Aantal-termijnen**: 4 (with a small icon to the right, and '= 4' to the right of the input field)
- Hw**: 1000 (with a small icon to the right, and '= 1000' to the right of the input field)
- Tw**: (empty input field, with a small icon to the right, and '= getal' to the right of the input field)
- Type\_getal**: (empty input field, with a small icon to the right, and '= getal' to the right of the input field)

Below the arguments, the result is shown: '= -282,0118326'. Below that, a description of the function is provided: 'Berekent de periodieke betaling voor een lening op basis van constante betalingen en een constant rentepercentage.' Below that, a note about the 'Hw' argument is shown: 'Hw is de huidige waarde: het totaalbedrag dat een reeks toekomstige waarden op dit moment waard is.' At the bottom, the result is shown again: 'Resultaat formule = -282,0118326'. There is a link 'Help-informatie over deze functie' and two buttons: 'OK' and 'Annuleren'.

Hierboven kun je zien dat je per jaar 282,01 euro moet betalen. Dit getal kwam er ook uit in hoofdstuk 4.

## Lenen of sparen?

### Voorbeeld 2

Veronderstel dat de marktrente 7% is. Je wilt een bedrag lenen van 6000 euro en je wilt die komende lening in de komende jaren in vaste termijnen terug gaan betalen, namelijk 800 euro na 1 jaar, 800 euro na 2 jaar, 800 euro na 3 jaar enzovoorts.

Na hoeveel jaar ben je klaar met terugbetalen? Hoeveel heb je dan in totaal terugbetaald?

Dit kun je handmatig oplossen, zoals hoofdstuk 4 liet zien, met de volgende formule:

$$6000 = 800 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1,07)^n}}{0,07}$$

Bij Excel is daar de functie NPER voor. Deze functie kun je vinden door op  $f_x$  te klikken. Kies categorie Financieel en zoek de functie NPER op. Klik hierop en kies OK.

Het scherm wat hieronder staat zal dan openen. Als je bij **rente** de rente invult met %-teken, bij **Bet** het bedrag dat je per maand betaald met min-teken (je betaald namelijk dat bedrag) en bij **Hw** het bedrag dat je wilt lenen, dan weet je hoeveel jaar je over het afbetalen van je lening moet doen.

**Functieargumenten**

NPER

|            |      |         |
|------------|------|---------|
| Rente      | 7%   | = 0,07  |
| Bet        | -800 | = -800  |
| Hw         | 6000 | = 6000  |
| Tw         |      | = getal |
| Type_getal |      | = getal |

= 11,00288717

Berekent het aantal termijnen van een investering, op basis van periodieke, constante betalingen en een constant rentepercentage.

**Bet** is de betaling die iedere termijn wordt verricht. Dit bedrag kan gedurende de looptijd van de investering niet worden gewijzigd.

Resultaat formule = 11,00288717

[Help-informatie over deze functie](#)

OK Annuleren

Hierboven kun je zien dat je (na iets meer dan) 11 jaar klaar bent met terugbetalen. Dit getal kwam er ook uit in hoofdstuk 4.

### Opgave 6.2.1

Onderstaande vraag heb je al in hoofdstuk 4 gezien. Probeer hem nu op te lossen met Excel. De marktrente is 6%. Je leent bij een bank een bedrag van 1000 euro en je wilt die lening in de komende drie jaar terug gaan betalen in vaste termijnen. Hoe groot is het bedrag B dat je jaarlijks gaat terugbetalen?

### Opgave 6.2.2

Onderstaande vraag heb je al in hoofdstuk 4 gezien. Probeer hem nu op te lossen met Excel. De marktrente is 7%. Je wilt een bedrag lenen van 5000 euro en je wilt die lening in de komende 6 jaar gaan afbetalen in vaste termijnen. Hoe groot is het bedrag B dat je jaarlijks terug gaat betalen? Hoeveel ga je in totaal terugbetalen?

**Opgave 6.2.3**

De marktrente is 6%. Je wilt een bedrag lenen van 7500 euro en je wilt die lening in de komende 8 jaar gaan afbetalen in vaste termijnen. Hoe groot is het bedrag B dat je jaarlijks terug gaat betalen? Hoeveel ga je in totaal terugbetalen? Los op met Excel.

**Opgave 6.2.4**

Onderstaande vraag heb je al in hoofdstuk 4 gezien. Probeer hem nu op te lossen met Excel. Je leent een bedrag van 6000 euro tegen een jaarlijkse rente van 7%. Je belooft dat je een aantal jaren lang aan het eind van ieder jaar 500 euro terug zult betalen. Hoeveel jaren ben je bezig met terugbetalen?

**Opgave 6.2.5**

Je leent een bedrag van 2000 euro tegen een jaarlijkse rente van 6,5%. Je belooft dat je een aantal jaren lang aan het eind van ieder jaar 450 euro terug zult betalen. Hoeveel jaren ben je bezig met terugbetalen? Los op met Excel.

## 7. Diagnostische toets

### **Opgave 7.1**

Je zet 400 euro op een bank tegen een jaarlijkse intrest van 5%. Na hoeveel jaar is dat bedrag gegroeid tot 700 euro?

### **Opgave 7.2**

Wat is het verschil tussen schijnbare en effectieve intrest?

### **Opgave 7.3**

Je wilt iets kopen dat 750 euro kost. Je besluit dat bedrag bij elkaar te sparen door een aantal maanden lang aan het begin van iedere maand 50 euro op een spaarrekening te zetten bij een bank. Die bank vergoedt 2% intrest per maand. Hoeveel maanden duurt het voordat je 750 euro bij elkaar hebt gespaard? Hoeveel van die 750 euro heb je dan zelf op je spaarrekening gezet en hoeveel van die 750 euro bestaat uit intrest die je van de bank hebt ontvangen?

### **Opgave 7.4**

Wat wordt er bedoeld met ‘de contante waarde’ van een bedrag?

### **Opgave 7.5**

De marktrente is 5%. Je wilt een bedrag lenen van 7000 euro en je wilt die lening in de komende 10 jaar gaan afbetalen in vaste termijnen.

- a) Hoe groot is het bedrag B dat je jaarlijks terug gaat betalen?
- b) Hoeveel ga je in totaal terugbetalen?

### **Opgave 7.6**

Veronderstel dat je een scooter wilt kopen van 2500 euro. Je kunt maandelijks een bedrag opzij zetten van 200 euro. Je staat voor de keuze: leen ik een bedrag van 2500 euro bij de bank om de scooter onmiddellijk te kopen en betaal ik die lening terug in maandelijkse termijnen van 200 euro? Of open ik een spaarrekening bij die bank en spaar ik het bedrag van 2500 euro bij elkaar door iedere maand 200 euro op die spaarrekening te zetten?

De bank vraagt maandelijks 4% rente voor een lening. De bank vergoedt ook maandelijks 4% rente op een spaarrekening. Wat kun je het beste doen?

- a) Hoeveel maanden ben je bezig met terugbetalen als de 2500 euro leent? Hoeveel heb je dan in totaal terugbetaald?
- b) Hoeveel maanden ben je bezig als je de 2500 euro bij elkaar spaart? Hoeveel geld heb je dan naar de bank gebracht?

## Bijlage 1

In de theorie van hoofdstuk 3 en hoofdstuk 4 wordt gebruik gemaakt van de volgende formule:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Deze formule geldt voor ieder natuurlijk getal  $n$  en voor ieder reëel getal  $r$  dat niet gelijk is aan 1. Het volgende getallenvoorbeeld geeft ons daar een beetje vertrouwen in: als je  $r = 2$  kiest en  $n = 3$ , dan is het linkerlid gelijk aan

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

en het rechterlid is

$$\frac{2^4 - 1}{2 - 1} = \frac{15}{1} = 15$$

Dat de formule *altijd* juist is, blijkt uit het volgende bewijs:

Noem

$$X = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

Dan geldt achtereenvolgens dat

$$r \cdot X = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1}$$

$$X - r \cdot X = (1 + r + r^2 + \dots + r^n) - (r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1}) = 1 - r^{n+1}$$

$$X \cdot (1 - r) = 1 - r^{n+1}$$

Dus

$$X = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Hieruit volgt dat

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$