

I Vectoren in $\mathbb{R}^2$

I.0 Inleiding

Een *vector* is een wiskundig begrip dat *centraal* staat in de *wiskunde* zelf, maar dat ook een grote rol speelt in ander vakken, in het bijzonder de *natuurkunde* en de *econometrie*.

In dit hoofdstuk staat de wiskundige aanpak van het begrip vector en de eigenschappen ervan op de voorgrond. Hierbij wordt nadrukkelijk onderscheid gemaakt tussen de abstracte, algebraïsche definitie en aanpak van het begrip vector en de visuele interpretatie van deze definitie en aanpak. We kiezen hier niet voor de meest algemene abstracte algebraïsche definitie van vectoren, hoewel die enigszins besproken wordt in het aanhangsel van §I.1

Maar ook de hier gekozen algebraïsche aanpak is al zo abstract dat we deze niet consequent zullen volhouden. Veel abstracte algebraïsche bewijzen zullen worden vervangen door visuele, meetkundige argumenten. Een puur abstracte benadering is vaak omslachtig en ondoorzichtig, terwijl de betekenis van veel van deze abstracte begrippen juist duidelijk wordt door een meetkundige beschouwing. Voor een eerste kennismaking is een puur algebraïsche benadering van vectoren daarom ongeschikt.

Bovendien maakt juist de meetkundige interpretatie van het vectorbegrip het mogelijk om de overeenkomsten en de verschillen tussen de wiskundige en de natuurkundige benadering van dit begrip af en toe aan de orde te stellen.

In dit hoofdstuk komt verder af en toe aan de orde waar het juist in latere hoofdstukken om zal draaien: De zogenoemde *lineaire transformaties*, dat zijn speciale bewerkingen op vectoren die leiden tot andere vectoren. Deze transformaties zijn ook in de natuurkunde en in de econometrie van groot belang, maar deze tekst kan daar helaas niet op ingaan.

Wat een vector is en wat lineariteit van vectoren inhoudt wordt besproken in de volgende paragraaf §I.1.

I.1 Basisdefinities

In deze paragraaf komt alleen de algebraïsche benadering van het begrip vector aan de orde. Het meetkundige beeld komt pas in de volgende paragraaf aan bod.

In het aanhangsel wordt geschetst hoe vectoren op een meer abstracte manier kunnen worden gedefinieerd.

Definitie

Een vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ is een kolom van twee reële getallen a_1 en a_2 :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

De reële getallen a_1 en a_2 heten de *kentallen* of de *componenten* van de vector $\vec{a}$

Opmerking

Een vector in $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^3$ is een kolom van drie reële getallen a_1 , a_2 en a_3 : $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Een vector in $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^n$ is een kolom van n reële getallen $a_1, \dots, a_n$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Wij beperken ons hier tot vectoren in $\mathbb{R}^2$, maar vaak is wat in $\mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd en bewezen eenvoudig uit te breiden naar vectoren in $\mathbb{R}^n$.

Doel van deze paragraaf is om de eerste *gevolgen* te onderzoeken van *niet meer dan twee bewerkingen* met vectoren: de *optelling* van twee vectoren en de *schaling* van een vector. We geven eerst de definities van de beide bewerkingen, daarna enkele getallenvoorbeelden en vervolgens bespreken we enkele algemene eigenschappen.

Definitie

Aan elk paar vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ is een nieuwe vector toegevoegd, genaamd de *optelling* of *som* van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, en genoteerd als $\vec{a} + \vec{b}$. Deze optelling wordt gegeven door

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Definitie

Aan elk reëel getal λ en elke vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ is een nieuwe vector $\lambda\vec{a}$ toegevoegd, gedefinieerd door

$$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

Deze bewerking heet de *schaling* van de vector $\vec{a}$ met een *schaalfactor* λ .
 $\lambda\vec{a}$ wordt ook de *vermenigvuldiging* genoemd van de vector $\vec{a}$ met de scalar λ .

Getallenvoorbeelden

- 1) Laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, dan geldt voor de som van de eerste vector met de tweede

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 3+(-5) \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Voor de som van de tweede vector met de}$$

$$\text{eerste geldt } \vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ (-5)+3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De optelling van vectoren blijkt *commutatief* te zijn.

Dit betekent dat het er niet toe of eerst de vector $\vec{a}$ wordt genomen in de optelling en dan de vector $\vec{b}$ of dat eerst de vector $\vec{b}$ wordt genomen en dan de vector $\vec{a}$.
 (Commuteren is een ander woord voor *verwisselen*.) In formule betekent de commutativiteit van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

- 2) De vector $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt de *nulvector* genoemd in $\mathbb{R}^2$. Voor alle vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$\text{geldt } \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

$$\text{Immers } \vec{a} + \vec{0} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{a} \text{ en } \vec{0} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 + a_1 \\ 0 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{a}.$$

- 3) Laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan geldt $(-2) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 4 \\ (-2) \cdot (-3) \end{pmatrix}$, dus de schaling van de vector $\vec{a}$ met

$$\text{de schaaftactor } -2 \text{ levert de vector } (-2)\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Opmerking

De optelling in $\mathbb{R}^2$ van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wordt ook in termen van alleen de kentallen geschreven

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Ook de vermenigvuldiging met een scalar λ kan in termen van alleen de kentallen worden geschreven

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

Verdere getallenvoorbeelden

- 4) Laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan geldt

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verder geldt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Er geldt dus $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Deze eigenschap van de optelling van vectoren wordt de *associativiteit* genoemd.

Het doet er niet toe of we eerst de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ via de optelling met elkaar associëren en vervolgens bij deze optelling de vector $\vec{c}$ optellen (linkerlid) of dat we eerst $\vec{b}$ en $\vec{c}$ via de optelling met elkaar in verband brengen en dan vervolgens deze optelling bij de vector $\vec{a}$ optellen (rechterlid).

- 5) Bij de optelling vermenigvuldiging van getallen bestaat het “haakjes wegwerken”. Zo geldt voor de reële getallen p , q en r dat $(p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$. Deze eigenschap van getallen wordt de *distributiviteit* genoemd: de vermenigvuldiging met een som wordt over de afzonderlijke termen van de som gedistribueerd (verdeeld).

Deze eigenschap blijkt ook bij optelling van twee vectoren en vermenigvuldiging met een scalar te gelden.

Laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\lambda = -2$ dan geldt

$$(-2) \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (-2) \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$(-2) \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Er is dus *distributiviteit over de vectorsom*: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

- 6) Er bestaat ook *distributiviteit over de som van scalars*: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

Bijvoorbeeld laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$ en $\mu = 5$ dan geldt

$$(-2 + 5) \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } (\lambda + \mu)\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$(-2) \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Dus inderdaad $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

Deze voorbeelden zijn bedoeld om gevoel te krijgen voor de algebraïsche gevolgen van de definitie van optelling van vectoren en de definitie van schaling van een vector.

De combinatie van vectoroptelling en schaling van een vector wordt de *lineariteit* van vectoren genoemd. *De volgende paragrafen en hoofdstukken vormen in feite een uitgebreid onderzoek naar de gevolgen van deze lineariteit.*

We komen we nu op hoe het *verschil* van twee vectoren kan worden geformuleerd met behulp van de lineariteit. Zoals uit de volgende definitie, en het erop volgende voorbeeld, blijkt kan dit verschil worden gedefinieerd vanuit de genoemde optelling en schaling. Dit is een voorbeeld van het feit dat we alleen optelling en schaling nodig hebben om alle andere min of meer vanzelfsprekende bewerkingen kunnen definiëren die we met vectoren zouden kunnen uitvoeren.

Definitie

Aan elk paar vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ is een nieuwe vector toegevoegd, genaamd het *verschil* of *afrekking* van $\vec{a}$ met $\vec{b}$, en genoteerd als $\vec{a} - \vec{b}$. Dit verschil wordt gedefinieerd door

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

Voorbeeld

Laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, dan geldt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } \vec{a} + (-1)\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Naïef met kolommen werkend zouden we krijgen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dit betekent dat de formele definitie van het verschil van vectoren en het min of meer vanzelfsprekend aftrekken van de kolommen tot hetzelfde resultaat leiden.

In het verlengde van de definitie van het verschil tussen twee vectoren staat het begrip tegengestelde van een vector.

Definitie

De *tegengestelde* van een vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ is de vector $(-1)\vec{a}$, die wordt genoteerd als $-\vec{a}$.

Stelling

Van iedere vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ is de som met zijn tegengestelde de nulvector, d.w.z. $\vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$.

Bewijs

Laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan is $-\vec{a} = (-1)\vec{a} = (-1) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$.

Er geldt $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + -a_1 \\ a_2 + -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.w.z. $\vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$

□

Opmerkingen

- 1) De hier gegeven stelling en het hier gegeven bewijs zijn kenmerkend voor veel van wat in het volgende gebeurt: de *stelling* wordt gegeven *in termen van de pijlnotatie*, het *algebraïsche bewijs* gebeurt *met behulp de kentallen in kolommen*.
- 2) Het verschil $\vec{a} - \vec{b}$ van twee vectoren $\vec{a}$ met $\vec{b}$ wordt ook gegeven door $\vec{a} + -\vec{b}$

Als slot van deze paragraaf de volgende algebraïsche definitie. Zoals in de volgende paragraaf over het meetkundige beeld van vectoren zal blijken, hangt deze definitie van de *norm* direct

samen met de stelling van *Pythagoras*. Verderop in dit hoofdstuk zal ook blijken dat deze norm samenhangt met het uiterst belangrijke begrip van inproduct van twee vectoren.

Definitie

De lengte of norm $|\vec{a}|$ van een vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ is het getal $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Opmerking

De norm kan ook via alleen de kentallen worden uitgedrukt: $\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Voorbeelden

1) Laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, d.w.z. $|\vec{a}| = \sqrt{13}$.

2) Vermenigvuldigt men de vector $\vec{a}$ met de scalar $\frac{1}{|\vec{a}|}$ dan ontstaat een vector die wordt genoteerd als $\vec{e}_a$. Dus $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$.

Dit wordt de *eenheidsvector* genoemd die samenhangt met de vector $\vec{a}$.

In dit geval $\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

Voor de norm van deze vector geldt $|\vec{e}_a| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}} = 1$.

Dus de norm van een eenheidsvector is gelijk aan één.

Opmerking over regels bij het werken met wortels uit gehele getallen

Bij het *werken met wortels* gelden ondermeer de volgende *twee regels*

- 1) Staat de wortel uit een geheel getal in de noemer van een breuk dan moet deze uit de noemer verdwijnen. Uiteindelijk horen alleen in de teller wortels voor te komen
 - 2) Als een geheel positief getal onder de wortel het product is van een kwadraat van een ander positief getal en nog een positief getal dan moet het kwadraat uit de wortel worden gehaald.
- Dit heeft tot effect dat het gehele getal onder de wortel zo klein mogelijk is.

Voorbeelden

1) Gegeven: Het getal $\frac{1}{\sqrt{13}}$

Gevraagd: Haal de wortel uit de noemer

Oplossing: $\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{(\sqrt{13})^2} = \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{1}{13} \sqrt{13}$

- 2) *Gegeven:* Het getal $\frac{1}{\sqrt{p}}$ waarbij p positief geheel is

Gevraagd: Toon aan dat geldt $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p} \sqrt{p}$

Oplossing: $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}}{(\sqrt{p})^2} = \frac{\sqrt{p}}{p} = \frac{1}{p} \sqrt{p}$

De essentie is dus dat teller en noemer worden vermenigvuldigd met $\sqrt{p}$ waardoor er in de noemer een kwadraat van $\sqrt{p}$ ontstaat. Door dit kwadraat verdwijnt de wortel in de noemer

- 3) Voor de eenheidsvector uit bovenstaand voorbeeld betekent dit dat bij de kentallen $\sqrt{13}$ uit de noemer moet verdwijnen.

$$\vec{e}_a = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} \sqrt{13} \\ \frac{3}{13} \sqrt{13} \end{pmatrix}$$

- 4) Een voorbeeld van de tweede regel

Gegeven: Het getal $\sqrt{96}$

Gevraagd: Maak het gehele getal onder de wortel zo klein mogelijk

Oplossing: 96 is het product van 16 en 6, waarbij 16 het kwadraat van 4 is. Volgens de regel wordt 16 onder de wortel vandaan gehaald.

$$\sqrt{96} = \sqrt{16 \cdot 6} = \sqrt{16} \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

- 5) *Gegeven:* Het getal $\frac{4}{\sqrt{72}}$

Gevraagd: Herleid dit getal met behulp van bovenstaande regels en schrijf de breuk met de gehele getallen zo eenvoudig mogelijk

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sqrt{72}} &= \frac{4}{\sqrt{72}} \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{72}} = \frac{4}{72} \sqrt{72} && \text{eerste wortel regel} \\ &= \frac{1}{9} \sqrt{72} && \text{breuk vereenvoudigen} \\ &= \frac{1}{9} \sqrt{36 \cdot 2} = \frac{1}{9} 6\sqrt{2} && \text{tweede wortel regel} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2} && \text{breuk vereenvoudigen} \end{aligned}$$

Aanhangsel: Axioma's van een reële vectorruimte

In de benadering waarvoor in deze tekst is gekozen worden *vectoren* gezien als *kolommen met n reële getallen* waarbij een min of meer voor de hand liggende *optelling voor deze vectoren* is gedefinieerd en een min of meer voor de hand liggende *schaling van een vector met een reëel getal*.

Dit aanhangsel beoogt een indruk te geven van hoe in de wiskunde *vectoren op een meer abstracte manier* kunnen worden gedefinieerd dan via kolommen van n reële getallen. Het belang van deze benadering is dat de ervaring die we hier opdoen bij het werken met vectoren als kolommen, aldus gebruikt kan worden bij totaal andere wiskundige objecten als kolommen. Aan het eind van dit aanhangsel geven we een voorbeeld van zo'n ander object. Echter voor het begrijpen van de volgende paragrafen en hoofdstukken van deze tekst is wat nu volgt niet nodig.

De abstracte manier van werken gaat uit van zogenoemde *axioma's*. Dit zijn de *grondregels* waarvan zonder nader bewijs wordt uitgegaan en die de basis leggen voor de wiskundige structuur waarmee zal worden gewerkt. Vanuit deze axioma's moeten alle andere eigenschappen binnen de structuur worden afgeleid met behulp van logische redeneringen. De belangrijkste eigenschappen worden geformuleerd in de vorm van *stellingen*. Een *bewijs* bij een stelling is een logische redenering die uitgaat van de axioma's en de stellingen en eigenschappen die reeds eerder bewezen zijn, waarbij de conclusie van de redenering één van de eigenschappen oplevert die in de stelling zijn geformuleerd. Als alle eigenschappen in de stelling zijn bewezen heet het bewijs van de stelling compleet of volledig.

Aan axioma's worden bepaalde eisen gesteld. De belangrijkste is dat zij *geen innerlijke tegenspraak* of *contradictie* bevatten. Dit heet de *consistentie* van de axioma's.

Zou men bijvoorbeeld bij de gehele getallen het axioma hebben: "Als een geheel getal gedeeld wordt door een ander geheel getal dan ontstaat altijd een nieuw geheel getal", dan is er een tegenspraak in het geval dat het eerste getal 4 is en het tweede getal 6. 4 gedeeld door 6 bestaat niet bij de gehele getallen, immers het resultaat is de breuk $2/3$. Het axioma is wel geldig bij de breuken, mits er maar niet wordt gedeeld door 0.

Is er sprake van een contradictie dan spreekt men ook wel van een *ongerijmdheid*.

Overigens is het meestal een zeer ingewikkelde zaak om aan te tonen dat de axioma's van een zekere wiskundige structuur contradictievrij zijn.

Naast de axioma's zijn er de *definities*. Sommige definiëren objecten waarmee binnen de algemene structuur wordt gewerkt. Andere leggen de eigenschappen van een bijzondere structuur vast binnen de algemene structuur die is vastgelegd door de axioma's. Binnen de algemene structuur zijn er dan ook andere bijzondere structuren mogelijk met andere eigenschappen. Als men bijvoorbeeld werkt met de zogenoemde *axioma's van Hausdorff voor de reële getallen* dan zijn er extra definities nodig om vast te stellen wat een geheel getal is. Echter de positieve breuken vormen een onderdeel van de reële getallen met andere eigenschappen.

Uiteraard geldt ook voor definities dat zij zowel onderling consistent moeten zijn als consistent met de axioma's.

In deze tekst zijn de drie axioma's van de vectorruimte $\mathbb{R}^2$ de definitie van een vector als kolom van twee reële getallen samen met de twee definities voor optelling resp. schaling, dus samen met de definitie van lineariteit. De nadere definitie van *inproduct*, zoals die in §I.6 aan de orde komt, levert een bijzondere structuur op die niet altijd hoeft te gelden binnen $\mathbb{R}^2$. De

speciale relativiteitstheorie van Einstein vormt een voorbeeld van een andere bijzondere structuur binnen $\mathbb{R}^2$ (en meer algemeen binnen $\mathbb{R}^4$), die werkt met het zogenoemde *Minkowski-product*.

Overigens is het ook mogelijk de eigenschappen van deze vectorruimte $\mathbb{R}^2$ te zien als een bijzonder geval van de meer algemene eigenschappen van een reële vectorruimte.

Nu volgen de *axioma's van een reële vectorruimte*.

We gaan hierbij uit van een verzameling V van objecten. Deze objecten worden *vectoren* genoemd, die we aangeven met een kleine Latijnse letter met een pijltje erboven. Verder nemen we aan dat binnen V twee bewerkingen gedefinieerd zijn, een *vectoroptelling* en een *scalaire vermenigvuldiging*. De scalars zijn hier de reële getallen, die hier worden aangegeven door een kleine Griekse letter.

Om precies te zijn

- 1) Bij elk tweetal vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ uit V bestaat een nieuwe vector, genaamd de *vectorsom* van $\vec{v}$ en $\vec{w}$, die wordt genoteerd als $\vec{v} + \vec{w}$
- 2) Bij elk reëel getal λ en bij elke vector $\vec{v}$ uit V bestaat een nieuwe vector, genaamd de *vermenigvuldiging* van de scalar λ met de vector $\vec{v}$, die wordt genoteerd als $\lambda\vec{v}$

De axioma's worden gegeven in de volgende

Definitie (axioma's van een reële vectorruimte)

Men noemt V een *reële vectorruimte* als V voldoet aan de volgende acht axioma's

- A.1 *Associativiteit van de vectoroptelling*
Voor alle $\vec{u}, \vec{v}$ en $\vec{w}$ uit V geldt $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- A.2 *Het bestaan van een nulvector*
Er bestaat een vector, genaamd de *nulvector* en genoteerd als $\vec{0}$, met de eigenschap dat voor alle $\vec{v}$ uit V geldt $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
- A.3 *Commutativiteit*
Voor alle $\vec{v}$ en $\vec{w}$ uit V geldt $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- A.4 *Het bestaan van een tegengestelde vector*
Voor alle $\vec{v}$ uit V geldt $\vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{0}$
De vector $(-1)\vec{v}$ wordt de *tegengestelde* van de vector $\vec{v}$ genoemd en vaak genoteerd als $-\vec{v}$.
- A.5 *Associativiteit van de scalaire vermenigvuldiging*
Voor alle reële getallen λ en μ , en alle $\vec{v}$ uit V geldt $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
- A.6 *Scalar 1 verandert een vector niet*
Voor alle $\vec{v}$ uit V geldt $1\vec{v} = \vec{v}$
- A.7 *Distributiviteit bij de vectoroptelling*
Voor alle reële getallen λ , en alle $\vec{v}$ en $\vec{w}$ uit V geldt $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
- A.8 *Distributiviteit bij de optelling van scalars*
Voor alle reële getallen λ en μ , en alle $\vec{v}$ uit V geldt $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

Deze eigenschappen van *optelling en schaling* van een reële vectorruimte samen noemt men de *lineariteit* van de ruimte. Vandaar dat men ook wel spreekt van een *reële lineaire ruimte* in plaats van een reële vectorruimte.

Uitgaande van deze axioma's moeten er nu twee dingen gebeuren. Er moet worden aangetoond dat de ruimte $\mathbb{R}^2$ voldoet aan de axioma's, en meer in het algemeen de ruimte $\mathbb{R}^n$, en er moeten stellingen worden afgeleid uitgaande van alleen de axioma's. Van beide geven we een voorbeeld.

We bewijzen de distributiviteit van de vectoroptelling in $\mathbb{R}^2$. Dit gebeurt via de kentallen van de vectoren. In dit geval geldt $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Bij de scalaire vermenigvuldiging met λ geldt

$$\begin{aligned} \lambda \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) &= \lambda \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} && \text{optelling vectoren in } \mathbb{R}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(v_1 + w_1) \\ \lambda(v_2 + w_2) \end{pmatrix} && \text{scalaire vermenigvuldiging in } \mathbb{R}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda v_1 + \lambda w_1 \\ \lambda v_2 + \lambda w_2 \end{pmatrix} && \text{distributiviteit reële getallen} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \lambda w_2 \end{pmatrix} && \text{optelling vectoren in } \mathbb{R}^2 \\ &= \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} && \text{scalaire vermenigvuldiging in } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Dus inderdaad geldt in $\mathbb{R}^2$ $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$

Als voorbeeld van een bewijs vanuit alleen de axioma's van een reële vectorruimte bewijzen we de ogenschijnlijk vanzelfsprekende

Stelling

Voor alle vectoren $\vec{v}$ uit een reële vectorruimte V geldt $0\vec{v} = \vec{0}$

Bewijs

$$\begin{aligned} 0\vec{v} &= (1 + (-1))\vec{v} && \text{eigenschap reële getallen} \\ &= 1\vec{v} + (-1)\vec{v} && \text{distributiviteit optelling scalars} \\ &= \vec{v} + (-1)\vec{v} && \text{eigenschap van de scalar 1} \\ &= \vec{0} && \text{bestaan tegengestelde vector} \end{aligned}$$

□

Binnen $\mathbb{R}^2$ is deze stelling vanzelfsprekend, maar hier is toch enig werk nodig.

Dat $\mathbb{R}^2$ aan alle axioma's voldoet gaan we hier niet verder bewijzen. Ook zullen we geen andere stellingen vanuit de axioma's afleiden. We eindigen dit aanhangsel met een voorbeeld van een andere reële vectorruimte als $\mathbb{R}^n$:

De verzameling van veeltermen met één onbekende met reële coëfficiënten is een reële lineaire ruimte.

Definitie

Een reële veelterm met onbekende x is een object van de vorm

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Hierin is n een geheel positief getal en zijn $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reële getallen, genaamd de coëfficiënten van de veelterm.

De verzameling van deze veeltermen wordt genoteerd als $\mathbb{R}[x]$.

Het volgende voorbeeld laat zien hoe binnen $\mathbb{R}[x]$ op een min of meer vanzelfsprekende manier een optelling van veeltermen en een scalaire vermenigvuldiging wordt gevormd.

Voorbeeld

Gegeven: De reële veeltermen $\vec{p} = \sqrt{2} - x + 5x^4$ en $\vec{q} = 1 - 2x^2$, en de scalar $\lambda = \frac{1}{7}$

Gevraagd: a) Schrijf de som van $\vec{p}$ en $\vec{q}$ als een reële veelterm
b) Schrijf de scalaire vermenigvuldiging van $\vec{p}$ met $\lambda = \frac{1}{7}$ als een reële veelterm.

Oplossing:

a)

$$\begin{array}{rcllclclcl} \vec{p} & = & \sqrt{2} & + & (-1)x & + & 0x^2 & + & 0x^3 & + & \pi x^4 \\ \vec{q} & = & 1 & + & 0x & + & (-2)x^2 & + & 0x^3 & + & 0x^4 \\ \hline \vec{p} + \vec{q} & = & (\sqrt{2} + 1) & + & (-1)x & + & (-2)x^2 & + & 0x^3 & + & \pi x^4 \\ & = & \sqrt{2} + 1 - x - 2x^2 & + & \pi x^4 \end{array}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} \vec{p} &= \frac{1}{7}(\sqrt{2} - x + \pi x^4) \\ &= \frac{1}{7}\sqrt{2} - \frac{1}{7}x + \frac{1}{7}\pi x^4 \end{aligned}$$

Aldus is een dergelijke som van twee reële veeltermen weer een reële veelterm en de scalaire vermenigvuldiging van een reële veelterm met een scalar opnieuw een reële veelterm.

Het is min of meer vanzelfsprekend dat met een dergelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging de ruimte $\mathbb{R}[x]$ voldoet aan de acht axioma's van een reële vectorruimte.

We laten ook hier de omslachtige klus achterwege om dit in detail te bewijzen.

(Overigens is het in de wiskunde het niet gebruikelijk om een veelterm met de pijlnotatie aan te geven.)

Opgaven

I.1.1 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bereken de kentallen van de vector $2\vec{a} - 3\vec{b}$

- I.1.2 a) Er is één scalar die bij vermenigvuldiging in $\mathbb{R}^2$ met welke vector dan ook steeds één en dezelfde vector oplevert. Welke scalar is dat en welke vector ontstaat er dan altijd?
- b) Er is één scalar waarvoor bij alle vectoren in $\mathbb{R}^2$ geldt dat scalaire vermenigvuldiging van de vector de opnieuw deze vector oplevert. Welke scalar is dat?

I.1.3 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

- a) Geef de kentallen van de vectoren $(-2)\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$ en $-\frac{3}{2}\vec{a}$ en bereken de norm van deze vectoren.
- b) Bereken de norm van de vectoren $(-2)\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$ en $-\frac{3}{2}\vec{a}$
- c) Toon aan dat geldt $|(-2)\vec{a}| = |\vec{a}|$, $|\frac{1}{2}\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$ en $|\frac{3}{2}\vec{a}| = \frac{3}{2}|\vec{a}|$.

I.1.4 Bereken $\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$

I.1.5 Bereken de kentallen van de eenheidsvector $\vec{e}_a$ behorend bij de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

I.1.6 Bewijs op een manier vergelijkbaar manier met het bewijs van $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$ in het aanhangsel dat geldt in $\mathbb{R}^2$

$$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}.$$

(Bij het linkerlid is er eerst optelling van scalars en dan schaling, bij het rechterlid is er eerst schaling met de afzonderlijke scalars en dan vectoroptelling. Het eindresultaat is volgens de formule dezelfde vector.)

I.1.7 Een reële tweeterm met onbekende x is een object van de vorm $a_0 + a_1x$, waarbij a_0 en a_1 de reële coëfficiënten zijn.

- a) Laat $\vec{p} = a_0 + a_1x$ en $\vec{q} = b_0 + b_1x$. Schrijf som van $\vec{p}$ en $\vec{q}$ als reële tweeterm.
- b) Als λ een scalar is schrijf dan $\lambda\vec{p}$ als reële tweeterm.

Opmerking: Er bestaat een direct verband tussen de lineaire ruimte van de reële tweetermen en de vectorruimte $\mathbb{R}^2$: Aan iedere reële tweeterm $a_0 + a_1x$ is de vector

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ toegevoegd. Gezien als vectoren maakt het dus niet uit of we reële

tweetermen bestuderen of vectoren in $\mathbb{R}^2$.

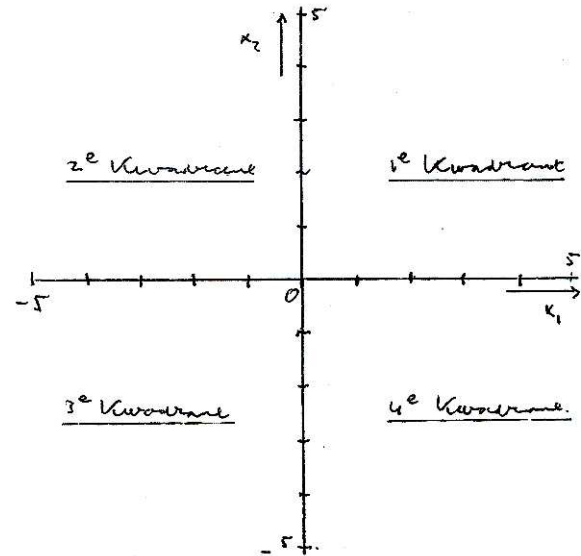
I.2 De verplaatsingsvector in een vlak als meetkundig beeld van een vector in $\mathbb{R}^2$

In deze paragraaf gaan we nader in op het meetkundige beeld dat kan worden gevormd bij de algebraïsche definitie van de vector in $\mathbb{R}^2$. Hierbij komt direct het meetkundige beeld van de norm van een vector ter sprake. Ook gaan we in op het meetkundige beeld dat behoort bij de algebraïsch gedefinieerde vectoroptelling en het beeld dat behoort bij de algebraïsch gedefinieerde scalaire vermenigvuldiging $\mathbb{R}^2$.

Voor het *meetkundige beeld* gaan we uit van een *plat vlak* dat voorzien is van een zogenaamd *standaard assenstelsel*.

Definitie

Een *standaard assenstelsel* (x_1, x_2) in een plat vlak is een recht assenstelsel waarbij de x_1 -as en de x_2 -as *onderling loodrecht* staan. Hierbij bezitten de x_1 -as en de x_2 -as dezelfde *schaal*, die verder in overeenstemming is met de *standaard lengte*.



Opmerkingen

- 1) Bij het meetkundige beeld van vectoren in $\mathbb{R}^2$ gaan we er altijd vanuit dat in het platte vlak het standaard assenstelsel (x_1, x_2) is aangelegd.
Verderop in dit hoofdstuk zullen we ook een assenstelsel (x, y) tegenkomen dat door een draaiing om de oorsprong O uit dit standaard assenstelsel ontstaat.
- 2) Het vlakdeel ingesloten door de positieve x_1 -as en de positieve x_2 -as heet het *eerste kwadrant*.
Het vlakdeel ingesloten door de negatieve x_1 -as en de positieve x_2 -as heet het *tweede kwadrant*.
Het vlakdeel ingesloten door de negatieve x_1 -as en de negatieve x_2 -as heet het *derde kwadrant*.
Het vlakdeel ingesloten door de positieve x_1 -as en de negatieve x_2 -as heet het *vierde kwadrant*.

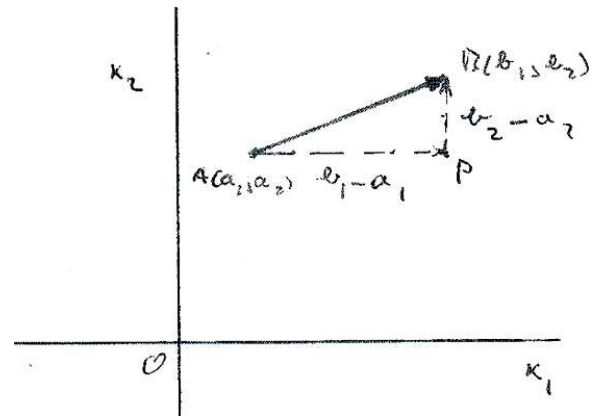
Stel een punt A in het platte vlak heeft coördinaten (a_1, a_2) en een punt B in dit vlak heeft coördinaten (b_1, b_2) .

Definitie

Onder de *verplaatsingsvector* $\overrightarrow{AB}$ van punt A naar punt B verstaat men de vector

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Algebraïsch gezien is $\overline{AB}$ een vector, want $\overline{AB}$ is een kolom van twee reële getallen. Een meetkundig beeld van deze verplaatsingsvector is een pijl van punt A naar punt B . Zie de figuur rechts. A heet de *staart* van de pijl en B heet de *kop* van de pijl. Een verplaatsingsvector is dus een kolom reële getallen met als meetkundige voorstelling een pijl. *Gemakshalve* zullen we echter ook de meetkundige voorstelling, dus de pijl, een verplaatsingsvector noemen.



De volgende stelling geeft een meetkundige motivering van de algebraïsch gedefinieerde norm of lengte van een vector. De lengte van de verplaatsingsvector blijkt gelijk te zijn gelijk aan de afstand tussen begin- en eindpunt

Stelling

De afstand AB tussen de punten A en B is de norm van de vector $\overline{AB}$. Dus

$$AB = |\overline{AB}|$$

Oftewel

$$AB = \left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \right|$$

Bewijs

Uit de figuur blijkt dat volgens Pythagoras geldt

$$\begin{aligned} AB^2 &= AP^2 + PB^2 \\ &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \end{aligned}$$

Dus

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Per definitie geldt

$$\left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

□

Voorbeeld

Laat $A(2,1)$ en $B(4,5)$. Laat verder $P(-3,-2)$ en $Q(-1,2)$. Voor de verplaatsingsvector $\overline{AB}$ geldt

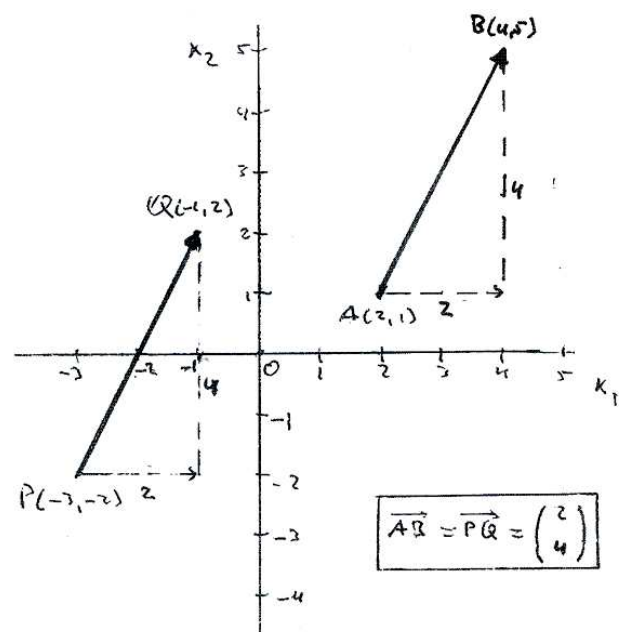
$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

En voor de afstand tussen de punten A en B geldt:

$$AB = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Voor de verplaatsingsvector $\overline{PQ}$ geldt

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} -1 - (-3) \\ 2 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



En voor de afstand tussen de punten P en Q geldt:

$$PQ = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Conclusies uit het voorbeeld

Er geldt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$, dus de verplaatsingsvectoren van A naar B en van P naar Q zijn hetzelfde.

In het platte vlak zijn de verplaatsingsvectoren gelijk als voor de pijlen geldt:

- De pijlen zijn evenwijdig
- De pijlen zijn even lang
- De pijlen staan in dezelfde richting

Vraag (opgave I.2.1)

Verklaar dat in het voorbeeld $\overrightarrow{QP}$ en $\overrightarrow{AB}$ tegengestelde vectoren zijn.

Wat geldt voor de pijlen die verplaatsingsvectoren aangeven tegengesteld aan $\overrightarrow{AB}$?

Er is een speciale klasse van verplaatsingsvectoren en dat zijn de positievectoren. We bekijken hiertoe een punt A in dit vlak dat standaard coördinaten (a_1, a_2) heeft.

Definitie

De verplaatsingsvector $\overrightarrow{OA}$ van de oorsprong O naar het punt A heet de *positievector* van het punt A . Dus

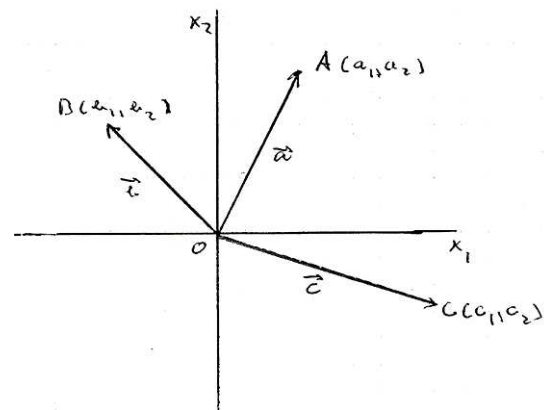
$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 - 0 \\ a_2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Opmerking

Positievectoren worden weergegeven door pijlen die alle hun staart in de oorsprong hebben en hun kop in de positie van het punt dat door de positievector wordt vastgelegd

We zullen de vector $\overrightarrow{OA}$ noteren als $\vec{a}$, dus bij een punt $A(a_1, a_2)$ hoort de positievector

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



Terwijl er oneindig veel verplaatsingen in het platte vlak worden weergegeven door dezelfde verplaatsingsvector is dat niet zo voor de positievector. Heeft een punt in het vlak een andere positie dan is ook de positievector anders.

In de figuur leggen de verschillende vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ als

positievector verschillende punten in het vlak vast.

Nu we de begrippen positievector en verplaatsingsvector hebben gedefinieerd kunnen we de zogenoemde *kop-kop methode* van *afrekken* in het platte vlak bespreken.

Kop-kop methode van aftrekken van vectoren

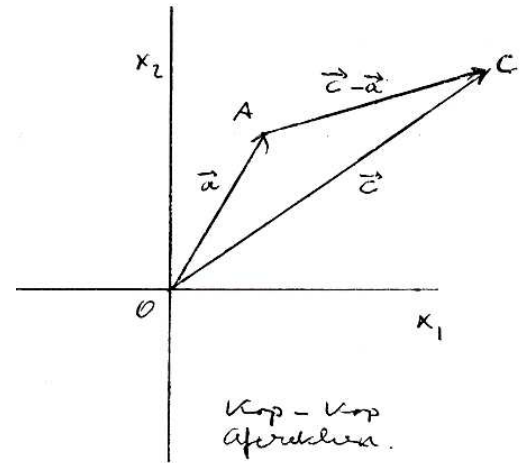
We willen een beeld van de aftrekking van een vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ door een vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Leg in het vlak de *staarten* van de vectoren *tegen elkaar*. Meestal wordt deze staarten in de oorsprong gekozen. In dat geval zijn de koppen van de vectoren resp. $C(c_1, c_2)$ en $A(a_1, a_2)$.

Voor de verschilvector geldt

$$\vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Dit is ook de verplaatsingsvector $\overrightarrow{AC}$ van de kop A van de vector $\vec{a}$ naar de kop C van de vector $\vec{c}$. Het *verschil* is dus de pijl die de *koppen* van de vectoren *verbindt*



Conclusie:

Staarten van $\vec{a}$ en $\vec{c}$ aan elkaar en koppen verbinden door een pijl van de kop van $\vec{a}$ naar de kop van $\vec{c}$ levert het verschil $\vec{c} - \vec{a}$ van deze twee vectoren.

Vanuit de kop-kop methode van aftrekken komen we tot de *kop-staart methode van optellen*.

Kop-staart methode van optellen van vectoren

Gegeven de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Als de staart van de vector $\vec{a}$ in de oorsprong O wordt geplaatst dan geeft de kop het punt $A(a_1, a_2)$ aan. Kies een punt $C(c_1, c_2)$ zodanig dat de verplaatsingsvector $\overrightarrow{AC}$ gelijk is aan de vector $\vec{b}$. Laat $\vec{c}$ de positievector van $C(c_1, c_2)$ zijn.

Volgens de kop-kop methode is $\vec{b}$ het verschil van de vectoren $\vec{c}$ en $\vec{a}$. Dus

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

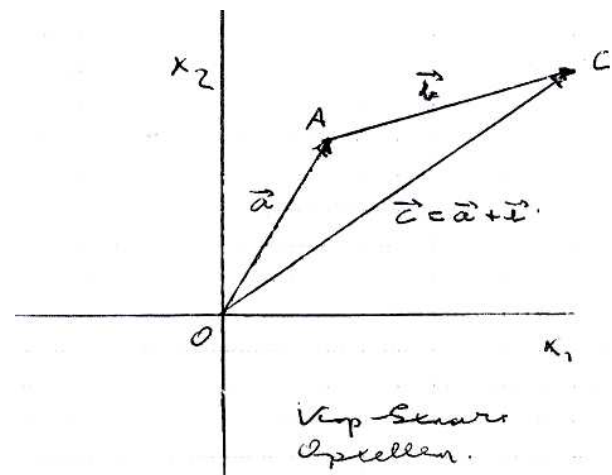
Gevolg

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{a} + \vec{c} - \vec{a} \\ &= \vec{c} \end{aligned}$$

De som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is een vector $\vec{c}$ die begint in de staart van $\vec{a}$ en eindigt in de kop van $\vec{b}$.

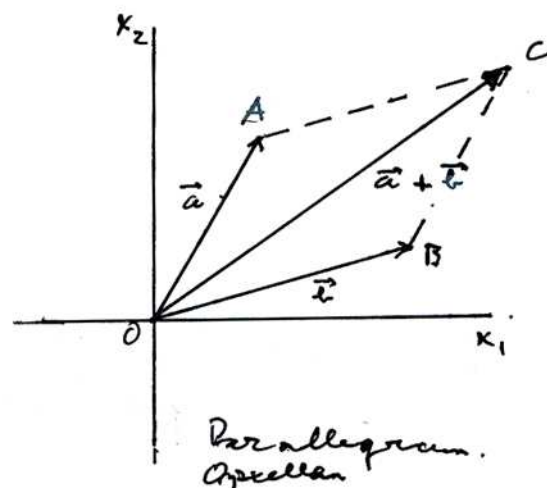
Conclusie

Zet men de staart van een vector $\vec{b}$ op de kop van een vector $\vec{a}$ dan is de somvector $\vec{a} + \vec{b}$ de pijl van de staart van $\vec{a}$ naar de kop van $\vec{b}$.



Parallellogram methode van optellen van vectoren

Verplaatst men bij de kop-staart methode de vector $\vec{b}$ naar de staart van de vector $\vec{a}$ dan ontstaat de positievector $\vec{OB}$. In de koppen A en B van de pijlen zijn lijnen evenwijdig aan de vectoren $\vec{b}$ en $\vec{a}$ getekend. Er ontstaat een parallellogram OBCA zoals rechts weergegeven. De pijl langs de diagonaal startend in het hoekpunt O van de twee staarten en eindigend in het andere hoekpunt C is de som $\vec{a} + \vec{b}$ van deze vectoren.



Conclusie

In een parallellogram waarbij de staarten van twee vectoren aan elkaar zijn gezet is de som van de vectoren de pijl langs de diagonaal die start in de twee staarten en eindigt in het andere hoekpunt.

Vraag (opgave I.2.2)

Met welke vector heeft de andere diagonaal in het parallellogram te maken?

Parallellogram methode van aftrekken van vectoren

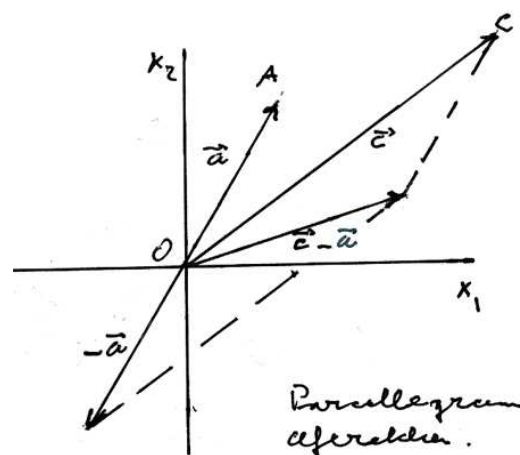
Voor het verschil van de vectoren $\vec{c}$ en $\vec{a}$ geldt per definitie

$$\vec{c} - \vec{a} = \vec{c} + (-\vec{a})$$

Dit is de som van de vector $\vec{c}$ met de tegengestelde $-\vec{a}$ van de vector $\vec{a}$. Deze formule leidt tot de

Conclusie

Plaast men de staarten van de vectoren $\vec{c}$ en $\vec{a}$ in eenzelfde punt (vaak de oorsprong O) en plaatst men in dat punt ook de staart van $-\vec{a}$ in dat punt dan levert het parallellogram voor de som van de vectoren $\vec{c}$ en $-\vec{a}$ de verschilvector $\vec{c} - \vec{a}$



Opmerking

Voor het aftrekken van vectoren gebruikt men veelal de kop-kop methode. Voor het optellen worden zowel de kop-staart methode als de parallellogram methode gebruikt.

In de *natuurkunde* wordt bij het *optellen* van *krachtvectoren* altijd de *parallellogram* methode gebruikt, waarbij de staarten in het puntdeeltje aangrijpen waarop de krachten werken.

Voor de *meetkundige betekenis* van de *scalaire vermenigvuldiging* geven we het volgende

Getallenvoorbeeld

Laat $\lambda = -2$ en $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan geldt voor per definitie de scalaire vermenigvuldiging

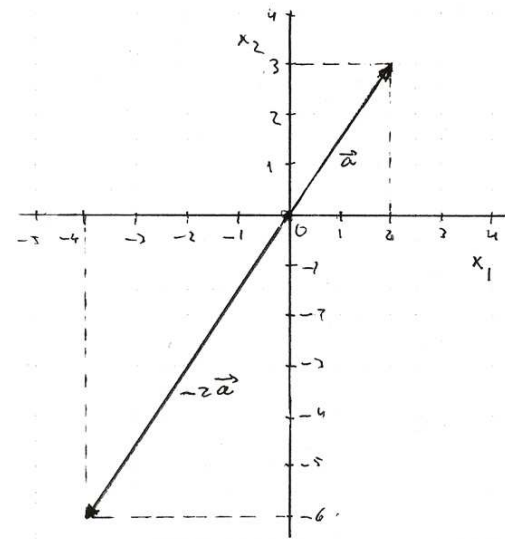
$$(-2) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 3 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. in termen van kolommen } (-2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Volgens het hierboven besproken meetkundige beeld geldt dat $(-2) \cdot \vec{a}$ door een pijl wordt weergegeven die tegengesteld gericht is aan de pijl van $\vec{a}$ en die twee keer zo lang is als de pijl van $\vec{a}$

Conclusie

Vermenigvuldigt men in $\mathbb{R}^2$ de vector $\vec{a}$ met een scalar λ dan is de lengte van de geschaalde vector $\lambda\vec{a}$ (linkerlid) is $|\lambda|$ keer zo groot als de lengte van de oorspronkelijke vector $\vec{a}$. Verder zijn $\vec{a}$ en $\lambda\vec{a}$ gelijkgericht als λ positief is en zijn $\vec{a}$ en $\lambda\vec{a}$ tegengesteld gericht als λ negatief is.

Meetkundig gezien is het kenmerk van schaling dus dat de lengte van een vector verandert (verandert van "schaal") maar dat de richting ervan volgens dezelfde lijn blijft.

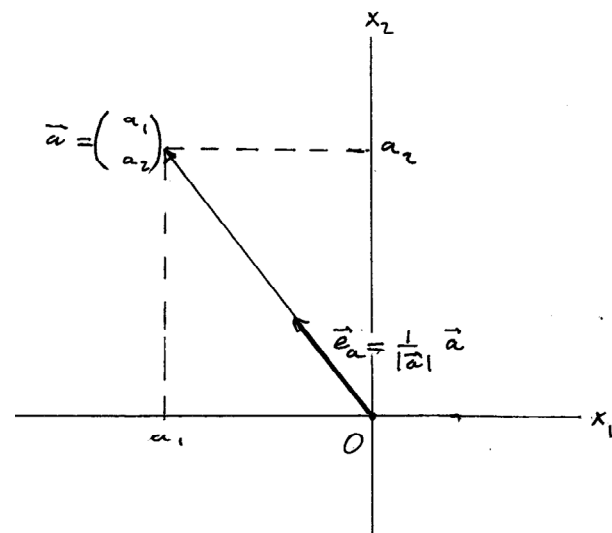


Ten slotte de volgende definitie, die in de vorige paragraaf reeds algebraïsch aan de orde is gekomen. De definitie is ook meetkundig van aard omdat er het begrip richting in voorkomt.

Definitie

In $\mathbb{R}^2$ verstaat men onder de *eenheidsvector* $\vec{e}_a$ in de

richting van $\vec{a}$ de vector $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$



Opgaven

I.2.1 In het eerste voorbeeld geldt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en ook $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

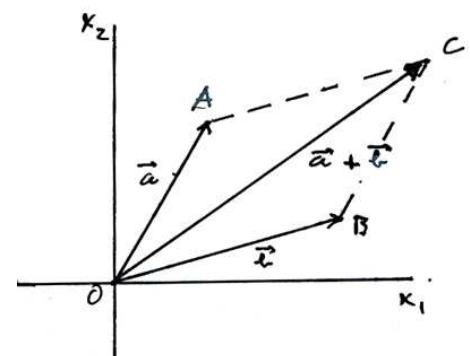
- Waarom zijn $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{QP}$ tegengestelde vectoren?
- Hoe zijn de pijlen van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{QP}$ gericht?

I.2.2 Druk de vector $\overrightarrow{AB}$ in de figuur rechts uit in de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

I.2.3 Gegeven de punten $A(-2,1)$ en $B(-3,-5)$

- Bereken de verplaatsingsvector $\overrightarrow{AB}$
- Bereken de afstand AB tussen de punten A en B

I.2.4 Bereken de afstand tussen de punten $P(-2,1)$ en $Q(4,-2)$



I.2.5 Gegeven de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Teken in een plat vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) de som $\vec{a} + \vec{b}$

- a) Volgens de kop-staart methode
- b) Volgens de parallellogram methode
- c) Bereken de lengte van deze somvector

Teken in een plat vlak met standaard assenstelsel het verschil $\vec{a} - \vec{b}$

- d) Volgens de kop-kop methode
- e) Volgens de parallellogram methode
- c) Bereken de lengte van deze verschilvector

Teken in een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de som $2\vec{a} + \vec{b}$

- f) Volgens de parallellogram methode

I.2.6 Iedere verplaatsingsvector is het verschil van twee positievectoren. Waarom is dit zo?

I.2.7 In deze opgave wordt komt aan de orde hoe de eenheidsvector $\vec{e}_a$ behorend bij een vector $\vec{a}$ kan worden getekend voordat de kentallen van $\vec{e}_a$ zijn berekenend

- a) Gegeven de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ teken deze vector als de positievector $\overrightarrow{OA}$ in het platte vlak met een standaard assenstelsel.
- b) Teken met lineaal of passer op het lijnstuk OA een punt E met afstand 1 tot de oorsprong O . Waarom geldt $\vec{e}_a = \overrightarrow{OE}$
- c) Bereken de kentallen van $\vec{e}_a$

I.2.8 a) Teken net als in opgave I.2.7 de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en de bijbehorende eenheidsvector $\vec{e}_a$ in een plat vlak met standaard assenstelsel.

- b) Toon dat geldt $\vec{e}_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Opmerking: De vectoren maken een hoek van 45° met de positieve x_1 -as. Deze hoek legt de eenheidsvector geheel vast. In §I.8 komt aan de orde dat deze eenheidsvector ook wordt genoteerd als $\vec{e}_{45^\circ}$ en dat dus geldt

$$\vec{e}_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

I.3 Nevenvectoren, algebraïsche en meetkundig

Een begrip dat voortdurend in deze tekst zal worden gebruikt is dat van de *nevenvector* in $\mathbb{R}^2$. Aan de hand van deze notie kunnen we ook nader ingaan op het verschil tussen de algebraïsche benadering van bewerkingen met vectoren en de meetkundige. Maar ook het samenspel van algebra en meetkunde zal aldus worden verder worden toegelicht.

We beginnen met een algebraïsche definitie van de nevenvector en vervolgens bewijzen we op een algebraïsche manier de zogenoemde *lineariteit* van de bewerking “nevenvector vormen”. Daarna gaan we in op de meetkundige betekenis van de nevenvector en vervolgens geven we een meetkundig argument voor deze lineariteit van de bewerking “nevenvector vormen”. Ten slotte bespreken we het begrip georiënteerde hoek tussen twee vectoren in $\mathbb{R}^2$.

Definitie

Aan elke vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ is een andere vector toegevoegd, genaamd de *nevenvector* en genoteerd als $\vec{a}^*$, gegeven door $\vec{a}^* = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Voorbeeld

Gegeven: De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Gevraagd: a) Geef de kentallen van de vectoren $\vec{a}^*$ en $\vec{b}^*$. Bereken ook de kentallen van $\vec{a}^* + \vec{b}^*$
b) Bereken de kentallen van $\vec{a} + \vec{b}$ en van $(\vec{a} + \vec{b})^*$

Oplossing

$$\text{a) } \vec{a}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{a}^* + \vec{b}^* = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ en } (\vec{a} + \vec{b})^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opmerking

In b) is er eerst opgeteld en dan de nevenvector gevormd. In a) zijn eerst de nevenvectoren gevormd en pas daarna opgeteld.

De berekening geeft aan dat deze verschillende manieren van werken hetzelfde opleveren.

Kennelijk geldt dus $(\vec{a} + \vec{b})^* = \vec{a}^* + \vec{b}^*$. Dit heet het behoud van de vectoroptelling onder de bewerking “nevenvector vormen”. Dit wordt algemeen bewezen bij de volgende

Stelling

Laat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ vectoren zijn in $\mathbb{R}^2$ en λ een scalar dan geldt voor de nevenvectoren

$$(\vec{a} + \vec{b})^* = \vec{a}^* + \vec{b}^* \quad \text{behoud vectoroptelling}$$

$$(\lambda \vec{a})^* = \lambda \vec{a}^* \quad \text{behoud schaling}$$

Bewijs

Het algebraïsch bewijs loopt via de kentallen van de vectoren.

Daarom werken we met de uitdrukkingen $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ voor de vectoren.

Behoud vectoroptelling:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right)^* &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}^* && \text{vectoroptelling} \\ &= \begin{pmatrix} -(a_1 + b_1) \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix} && \text{definitie nevenvector} \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 - b_1 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix} && \text{distributiviteit reële getallen} \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_1 \end{pmatrix} && \text{vectoroptelling} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^* && \text{definitie nevenvector} \end{aligned}$$

Behoud schaling:

$$\begin{aligned} \left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right)^* &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}^* && \text{schaling vector} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda a_2 \\ \lambda a_1 \end{pmatrix} && \text{definitie nevenvector} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cdot -a_2 \\ \lambda a_1 \end{pmatrix} && \text{commutiviteit reële getallen} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} && \text{schaling vector} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^* && \text{definitie nevenvector} \end{aligned}$$

□

Opmerkingen

- 1) Behoud vectoroptelling betekent dat het niet uitmaakt of men eerst optelt en dan de nevenvector vormt (linkerlid) of dat men eerst de nevenvectoren vormt en pas daarna optelt (rechterlid): het eindresultaat is dezelfde vector.
Behoud schaling betekent dat het niet uitmaakt of men eerst schaalt en dan de nevenvector vormt (linkerlid) of dat men eerst de nevenvector vormt en daarna schaalt (rechterlid).
- 2) Een bewerking in $\mathbb{R}^2$ op vectoren die zowel behoud vector optelling als behoud schaling heeft, die dus de lineariteit behoudt, heet een *lineaire transformatie*. De bewerking “nevenvector vormen” is dus lineair.

We zullen vanaf hoofdstuk III vele lineaire transformaties tegenkomen. Men kan zelfs stellen dat het bij de lineaire algebra, de wiskunde van bewerkingen met vectoren, vooral gaat om bewerkingen op vectoren die de vectoroptelling en de schaling behouden.

- 3) De eigenschap van commutatiteit (van verwisseling) van reële getallen is in het bewijs toegepast op het min-teken. Iets meer gedetailleerd is hier het volgende aan de hand

$$-\lambda a_2 = (-1)\lambda a_2 \stackrel{\#}{=} \lambda(-1)a_2 = \lambda \cdot -a_2$$

Bij # worden -1 en λ verwisseld.

Het belang van de *nevenvector* zit vooral in zijn *meetkundige betekenis*.

Stelling

Door een draaiing over een hoek van 90° ontstaat de *nevenvector* $\vec{a}^*$ uit de vector $\vec{a}$

Bewijs

In de figuur is de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ afgebeeld als de positievector $\overrightarrow{OA}$.

De zijde OP van $\triangle OPA$ is gelijk aan het kental a_1 en de zijde PA is gelijk aan het kental a_2 .

(Gemakshalve nemen we $a_1 > 0$ en $a_2 > 0$.)

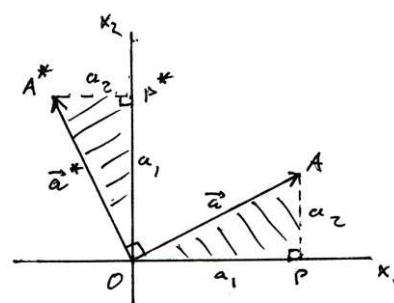
Door draaiing om O over 90° wordt het punt A afgebeeld als het punt A^* , en het punt P als het punt P^* . Door de draaiing gaat $\triangle OPA$ over in $\triangle OP^*A^*$.

Draaiing behoudt de lengtes, dus omdat $PA = a_2$ geldt

ook $P^*A^* = a_2$ en omdat $OP = a_1$ geldt ook $OP^* = a_1$. De x_1 -coördinaat van $\overrightarrow{OA^*}$ is negatief en gelijk aan $-P^*A^*$, dus gelijk aan $-a_2$.

De x_2 -coördinaat van $\overrightarrow{OA^*}$ is gelijk aan OP^* , dus gelijk aan a_1 . De positievector $\overrightarrow{OA^*}$ is dus de *nevenvector* $\vec{a}^* = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

□



Opmerkingen

- 1) Een ander woord voor draaiing is *rotatie*.
Merk op dat bij de meetkundige weergave van een rotatie de staarten van de vectoren aan elkaar worden gelegd.
- 2) *Notatie voor rotatie over 90° in $\mathbb{R}^2$*
Voor de notatie van een rotatie wordt het symbool $\mathcal{R}$ gebruikt. De draaiing over een positieve hoek van 90° wordt in een onderindex onder dit symbool aangegeven, dus door $\mathcal{R}_{90^\circ}$
Zowel de *pijlnotatie* wordt gebruikt voor de rotatie over 90° van vector $\vec{a}$ naar zijn *nevenvector* $\vec{a}^*$:

$$\vec{a} \xrightarrow{\mathcal{R}_{90^\circ}} \vec{a}^*$$

als de haakjesnotatie: $\vec{a}^* = \mathcal{R}_{90^0}(\vec{a})$

We gaan nu de lineariteit van de bewerking “nevenvector nemen” meetkundig bekijken.
Omdat $\vec{a}^* = \mathcal{R}_{90^0}(\vec{a})$ en $\vec{b}^* = \mathcal{R}_{90^0}(\vec{b})$ luidt de stelling meetkundig:

Stelling

Laat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ vectoren zijn in $\mathbb{R}^2$ en λ een scalar, dan geldt bij een rotatie over 90^0 :

$$\mathcal{R}_{90^0}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{R}_{90^0}(\vec{a}) + \mathcal{R}_{90^0}(\vec{b}) \quad \text{behoud vectoroptelling}$$

$$\mathcal{R}_{90^0}(\lambda \vec{a}) = \lambda \mathcal{R}_{90^0}(\vec{a}) \quad \text{behoud schaling}$$

Meetkundige bewijs

In de eerste figuur is $\vec{a}$ de positievector van O naar A en $\vec{b}$ de positievector van O naar B , d.w.z. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Verder is $OACB$ een parallellogram, dus is de positievector van O naar C de somvector van $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$, d.w.z.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

en dus $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Door rotatie om O over 90^0 gaat het parallellogram $OACB$ over in het parallellogram $OA^*C^*B^*$. Dus

$$\overrightarrow{OC^*} = \overrightarrow{OA^*} + \overrightarrow{OB^*}$$

De positievector van O naar C^* is de vector $\mathcal{R}_{90^0}(\vec{a} + \vec{b})$

die door de draaiing over 90^0 uit de vectorsom $\vec{a} + \vec{b}$ ontstaat, d.w.z. $\overrightarrow{OC^*} = \mathcal{R}_{90^0}(\vec{a} + \vec{b})$.

Verder geldt $\overrightarrow{OA^*} = \mathcal{R}_{90^0}(\vec{a})$ en $\overrightarrow{OB^*} = \mathcal{R}_{90^0}(\vec{b})$

Resultaat

$$\mathcal{R}_{90^0}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{R}_{90^0}(\vec{a}) + \mathcal{R}_{90^0}(\vec{b})$$

In de tweede figuur geldt opnieuw $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. De vector $\lambda \vec{a}$ die door schaling met een scalar λ uit de vector $\vec{a}$ ontstaat, is weergegeven als de positievector van O naar D , dus

$$\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OA}$$

want $\lambda \vec{a} = \overrightarrow{OD}$,

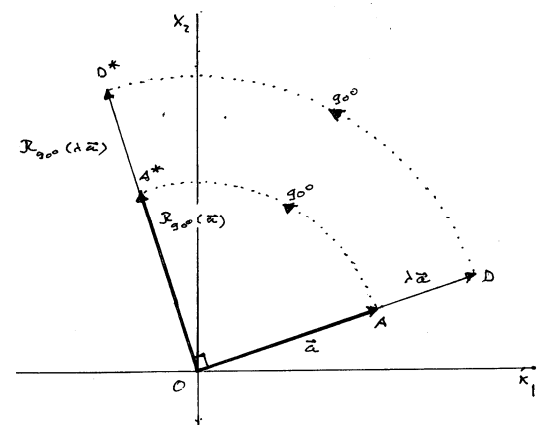
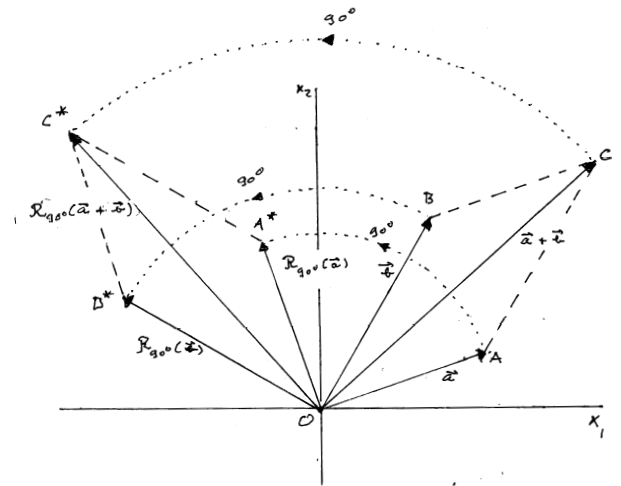
Door draaiing om O over 90^0 gaat A over in A^* en D over in D^* . Gevolg

$$\overrightarrow{OD^*} = \lambda \overrightarrow{OA^*}$$

Er geldt hierbij $\overrightarrow{OA^*} = \mathcal{R}_{90^0}(\vec{a})$ en $\overrightarrow{OD^*} = \mathcal{R}_{90^0}(\lambda \vec{a})$

Gevolg

$$\mathcal{R}_{90^0}(\lambda \vec{a}) = \lambda \mathcal{R}_{90^0}(\vec{a})$$



□

Opmerking

Behoud vectoroptelling betekent dat eerst vectoren optellen en dan roteren (linkerlid) hetzelfde oplevert als eerst vectoren roteren en dan optellen (rechterlid)

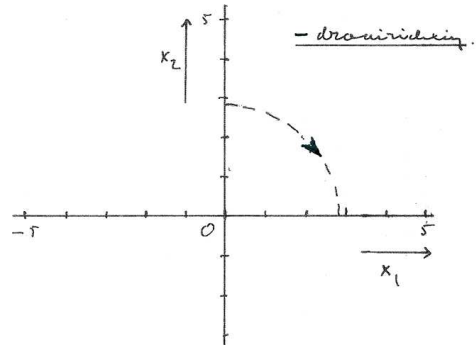
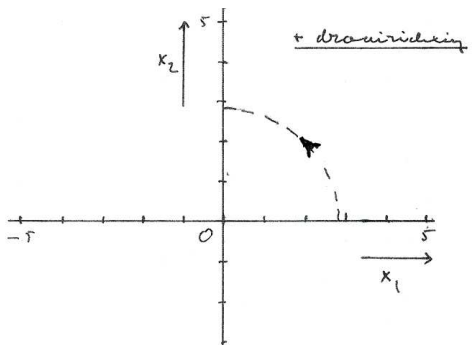
Behoud schaling betekent dat eerst schalen en dan roteren (linkerlid) hetzelfde oplevert als eerst roteren en daarna schalen (rechterlid).

De bewerking roteren over 90° is een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ omdat volgens de stelling er zowel behoud vectoroptelling als behoud schaling is.

We ronden de paragraaf af met een meetkundige beschouwing over *positieve* en *negatieve hoeken tussen vectoren in $\mathbb{R}^2$* , waarmee we in volgende paragrafen zullen gaan werken.. Hiertoe hebben we nodig

Definitie (draairichting in $\mathbb{R}^2$)

In het standaard assenstelsel (x_1, x_2) spreekt men van een *positieve draairichting* als men draait om de oorsprong O van de positieve x_1 -as naar de positieve x_2 -as volgens de *kleinste* hoek.



In een assenstelsel (x_1, x_2) spreekt men van een *negatieve draairichting* als men draait om O van positieve x_2 -as naar de positieve x_1 -as volgens de *kleinste* hoek.

Vraag (Opgave I.3.3)

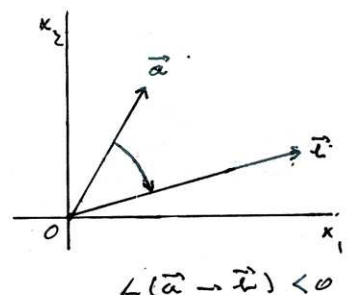
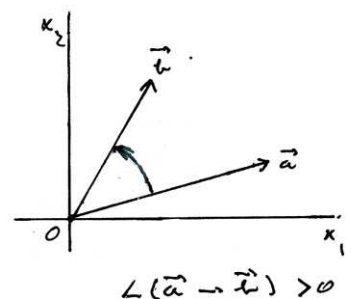
Waarom geldt $-\vec{a}^* = \mathcal{R}_{-90^\circ}(\vec{a})$?

Definitie (georiënteerde hoek tussen twee vectoren in $\mathbb{R}^2$)

Men zet in een plat vlak de staarten van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ (beide ongelijk de nulvector $\vec{0}$) in één punt. Stel er geldt verder dat de kleinste hoek tussen deze vectoren minder is dan 180° en groter dan 0° . Men draait om dit punt over deze *kleinste* hoek van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$. De *georiënteerde hoek* van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$, notatie $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b})$, is in grootte gelijk aan deze kleinste hoek.

Gaat men aldus volgens de positieve draairichting dan is deze georiënteerde hoek positief, dus geldt $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) > 0$,

Gaat men aldus volgens de negatieve draairichting dan is deze georiënteerde hoek negatief, dus geldt $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) < 0$,



Vraag (Opgave I.3.4)

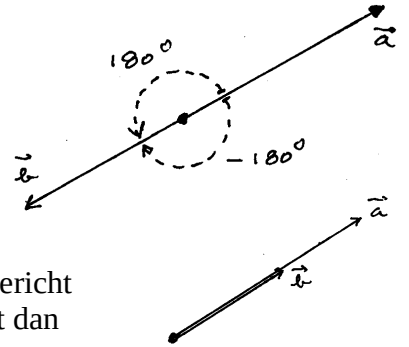
Waarom geldt altijd $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = -\angle(\vec{b} \rightarrow \vec{a})$?

Definitie (onderlinge oriëntatie van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$)

Zijn twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$, beide ongelijk de nulvector, dan heet de vector $\vec{b}$ *positief georiënteerd* ten opzichte van de vector $\vec{a}$ als $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) > 0$ en heet de vector $\vec{b}$ *negatief georiënteerd* ten opzichte van de vector $\vec{a}$ als $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) < 0$.

Opmerkingen

- 1) Zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, beide ongelijk de nulvector, tegengesteld gericht dan bestaat er geen onderlinge oriëntatie van de vectoren. In dit bijzondere geval zijn er van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$ twee georiënteerde hoeken mogelijk: $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = 180^\circ$ en $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = -180^\circ$.
- 2) Ook als de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, beide ongelijk de nulvector, gelijk gericht zijn bestaat er geen onderlinge oriëntatie van de vectoren. Er geldt dan $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = 0^\circ$.
- 3) De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn in beide gevallen volgens dezelfde lijn gericht. Zoals in de volgende paragraaf wordt besproken betekent dit dat de vectoren van elkaar afhankelijk zijn.



In het geval dat twee vectoren in $\mathbb{R}^2$, beide ongelijk de nulvector, een onderlinge kleinste hoek hebben die in grootte minder is dan 180° en groter dan 0° , is er wel sprake van een onderlinge oriëntatie en dan zijn de twee vectoren niet van elkaar afhankelijk omdat zij niet volgens dezelfde lijn gericht zijn.

Het bovenstaande maakt duidelijk dat de meetkundige benadering van de lineariteit van de bewerking “nevenvector nemen”, waarbij sprake is van een rotatie over 90° , een nieuw licht werpt op de misschien wat lastige algebraïsche benadering van de lineariteit van deze bewerking waarmee we zijn begonnen.

Dit is een algemeen kenmerk van beschouwingen met vectoren en lineaire transformaties van vectoren. Zoals reeds §I.0 is gezegd zijn algebraïsche definities en bewijzen vaak ondoorzichtig en soms erg omslachtig, terwijl een meetkundige toelichting veelal verheldert wat er aan de hand is. In het vervolg zullen we daarom soms in plaats van een algebraïsch bewijs alleen een meetkundige beschouwing geven die duidelijk moet maken waar het in feite over gaat.

Voor een eerste kennismaking met vectoren en lineaire transformaties lijkt een volledig strikte algebraïsche opbouw te abstract, zowel vanuit kolommen in $\mathbb{R}^n$ als vanuit de nog abstractere opbouw met behulp van axioma's.

Opgaven

I.3.1 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Geef de vectoren $\vec{a}^*$ en $\vec{b}^*$, en teken de vier vectoren als positievectoren in een assenstelsel (x_1, x_2)

I.3.2 Toon algebraïsch aan, dus via de kentallen, dat geldt

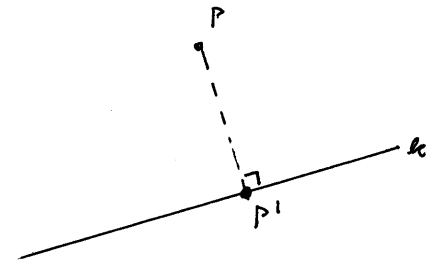
- $|\vec{a}^*| = |\vec{a}|$, dus een vector en zijn nevenvector hebben dezelfde norm
- $\vec{a}^{**} = -\vec{a}$,
- Geef een meetkundige toelichting op het twee keer de “bewerking nevenvector vormen” bij de formule uit b).

I.3.3 Waarom geldt $-\vec{a}^* = \mathcal{R}_{-90^\circ}(\vec{a})$?

I.3.4 Waarom geldt altijd $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = -\angle(\vec{b} \rightarrow \vec{a})$?

I.3.5 Verklaar meetkundig $\angle(\vec{a}^* \rightarrow \vec{b}^*) = \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b})$?

I.3.6 In een plat vlak wordt vanuit een punt P een loodlijn neergelaten op een lijn k . Het punt P' op de lijn k is het zogenoemde voetpunt van deze loodlijn. De afbeelding $P \xrightarrow{\mathcal{P}_k} P'$ wordt de (loodrechte) *projectie*



van punt P op de lijn k genoemd.

Deze vraag onderzoekt eerst meetkundig en daarna algebraïsch de eigenschappen van de projectie $\mathcal{P}_{x_1}$ van verplaatsingsvectoren in het platte vlak op de x_1 -as van het standaard assenstelsel.

- Geef in een standaard assenstelsel de punten $P(1, 2)$, $Q(3, 4)$ en $R(6, 5)$. Teken ook de punten P' , Q' en R' die de resp. geprojecteerden zijn van de punten P , Q en R op de x_1 -as. (Neem 1 cm voor de afstand 1 langs de assen.)
- Teken de verplaatsingsvector $\overrightarrow{PQ}$ en geef die aan met $\vec{a}$. Teken ook $\overrightarrow{QR} = \vec{b}$ en $\overrightarrow{PR} = \vec{a} + \vec{b}$. Wat zijn de kentallen van $\vec{a}$, van $\vec{b}$ en van $\vec{a} + \vec{b}$?
- Teken verder de verplaatsingsvector $\overrightarrow{P'Q'}$ en geef die aan met $\mathcal{P}_{x_1}(\vec{a})$. Teken ook $\overrightarrow{Q'R'} = \mathcal{P}_{x_1}(\vec{b})$ en $\overrightarrow{P'R'} = \mathcal{P}_{x_1}(\vec{a} + \vec{b})$. Wat zijn de kentallen van $\mathcal{P}_{x_1}(\vec{a})$, $\mathcal{P}_{x_1}(\vec{b})$ en $\mathcal{P}_{x_1}(\vec{a} + \vec{b})$?
- Leg uit dat bij projectie $\mathcal{P}_{x_1}$ van vectoren in een plat vlak op de x_1 -as er sprake is van behoud van vectoroptelling.
- Geef in een standaard assenstelsel de punten $P(1, 2)$, $Q(3, 4)$ en $S(4, 5)$. Teken ook de punten P' , Q' en S' die de resp. geprojecteerden zijn van de punten P , Q en R op de x_1 -as. (Neem opnieuw 1 cm voor de afstand 1 langs de assen.) Teken de verplaatsingsvector $\overrightarrow{PQ}$ en geef die aan met $\vec{a}$ en teken $\overrightarrow{PS} = \frac{3}{2}\vec{a}$. Teken ten slotte $\overrightarrow{P'Q'} = \mathcal{P}_{x_1}(\vec{a})$ en $\overrightarrow{P'S'} = \mathcal{P}_{x_1}(\frac{3}{2}\vec{a})$

- f) Hoe blijkt uit e) dat bij projectie $\mathcal{P}_{x_1}$ van vectoren in een plat vlak op de x_1 -as er sprake is van behoud van schaling?

Kennelijk geldt bij de projectie $\vec{a} \xrightarrow{\mathcal{P}_{x_1}} \vec{a}^\#$ van een vector $\vec{a}$ op de x_1 -as dat

$$\text{als } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{a}^\# = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^\# = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- g) Bewijs hiermee algebraïsch dat in $\mathbb{R}^2$ bij de projectie $\mathcal{P}_{x_1}$ geldt

$$\mathcal{P}_{x_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{P}_{x_1}(\vec{a}) + \mathcal{P}_{x_1}(\vec{b}) \quad \text{behoud vectoroptelling}$$

$$\mathcal{P}_{x_1}(\lambda \vec{a}) = \lambda \mathcal{P}_{x_1}(\vec{a}) \quad \text{behoud schaling}$$

(Gebruik bij het bewijs alleen de kolomnotatie en het symbool #.)

- I.3.7 Stel er is in een plat vlak een projectie van een vector $\vec{a}$ op de x_2 -as van het standaard assenstelsel

$$\vec{a} \xrightarrow{\mathcal{P}_{x_2}} \vec{a}^\#$$

- a) Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ wat zijn dan de kentallen van de vector $\vec{a}^\#$?

- b) Bewijs algebraïsch dat $\mathcal{P}_{x_2}(\vec{a}) = \vec{a} - \mathcal{P}_{x_1}(\vec{a})$

- c) Maak in het platte vlak met een standaard assenstelsel een vectortekening van dit verschil uit b) met de kop-kop methode.

- I.3.8 Een ander voorbeeld van het onderscheid tussen algebraïsch bewijzen en meetkundige beschouwing vormt de volgende bewerking op vectoren:

$$\text{Als } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{a}^\# = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$

- a) Geef bij de vectoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ de vectoren $\vec{c}^\#$, $\vec{b}^\#$ en $\vec{d}^\#$

Teken deze zes vectoren als positievectoren in een assenstelsel (x_1, x_2)

Uit de getekende figuur blijkt dat de vectoren $\vec{c}^\#$, $\vec{b}^\#$ en $\vec{d}^\#$ uit de resp. vectoren $\vec{c}$, $\vec{b}$ en door spiegeling in de x_1 -as.

Zowel de pijlnotatie wordt voor de deze spiegeling gebruikt:

$$\vec{a} \xrightarrow{\mathcal{S}_{x_1}} \vec{a}^\#$$

als de haakjesnotatie: $\vec{a}^\# = \mathcal{S}_{x_1}(\vec{a})$

- b) Laat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ vectoren zijn in $\mathbb{R}^2$ en λ een scalar.

Bewijs algebraïsch dat geldt voor de spiegelvectoren:

$$(\vec{a} + \vec{b})^\# = \vec{a}^\# + \vec{b}^\# \quad \text{behoud vectoroptelling}$$

$$(\lambda \vec{a})^\# = \lambda \vec{a}^\# \quad \text{behoud schaling}$$

- c) Bewijs algebraïsch: $|\vec{a}^\#| = |\vec{a}|$ (behoud norm bij spiegeling)

- d) Teken in het eerste kwadrant vectoren in een parallellogram vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a} + \vec{b}$ en toon meetkundig aan dat geldt

$$\mathcal{S}_{x_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{S}_{x_1}(\vec{a}) + \mathcal{S}_{x_1}(\vec{b}) \quad \text{behoud vectoroptelling}$$

- e) Toon meetkundig aan dat geldt

$$\mathcal{S}_{x_1}(\lambda \vec{a}) = \lambda \mathcal{S}_{x_1}(\vec{a}) \quad \text{behoud schaling}$$

- f) Verklaar meetkundig $\angle(\vec{a}^\# \rightarrow \vec{b}^\#) = -\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b})$
(verandering oriëntatie door spiegeling)

- g) Bewijs algebraïsch: $\vec{a}^{\# \#} = \vec{a}$.

Wat zegt dit meetkundig over een spiegeling na een spiegeling in dezelfde lijn?

I.3.8 Stel er is in het platte vlak een spiegeling van de vector $\vec{a}$ in de x_2 -as van het standaard assenstel naar de vector $\vec{a}^\#$. Dit wordt meetkundig genoteerd als:

In *pijlnotatie* $\vec{a} \xrightarrow{\mathcal{S}_{x_2}} \vec{a}^\#$

In de *haakjesnotatie* $\vec{a}^\# = \mathcal{S}_{x_2}(\vec{a})$

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ wat zijn dan de kentallen van $\vec{a}^\#$?

I.4 Scheve assen en basisvectoren. Lineaire combinaties van vectoren.

In §I.1 zijn vectoren algebraïsch geïntroduceerd. In §I.2 is het meetkundige beeld van vectoren aan de orde gekomen, terwijl in de vorige paragraaf over de nevenvector ook is begonnen met een algebraïsche benadering die vervolgens werd toegelicht door meetkundige beschouwingen.

In deze paragraaf over ondermeer scheve assen, lineaire afhankelijkheid van vectoren en basisvectoren zal de meetkundige benadering op de voorgrond staan en de algebraïsche benadering wat minder prominent zijn.

De volgende definitie van het *ontbinden* van een vector in $\mathbb{R}^2$ naar twee richtingen is zuiver meetkundig.

Definitie (ontbinding van een vector in $\mathbb{R}^2$)

Gegeven zijn in een vlak: twee snijdende lijnen l_1 en l_2 , en een vector $\vec{a}$.

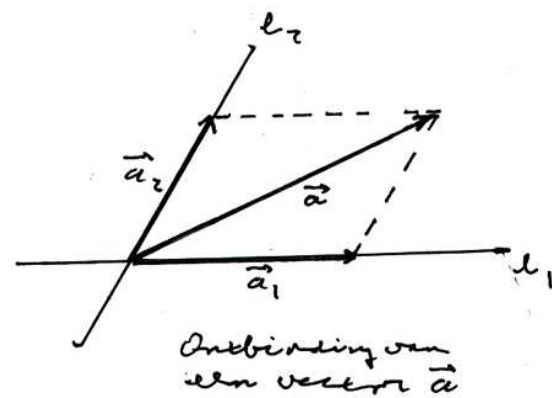
In de figuur ligt de staart van de vector $\vec{a}$ in het snijpunt van twee lijnen l_1 en l_2 . Vanuit de kop van $\vec{a}$ wordt een lijn evenwijdig aan l_1 getekend en een lijn evenwijdig aan l_2 .

De vectoren $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$ die aldus ontstaan heten de resp.

ontbondenen van de vector $\vec{a}$ volgens de lijnen l_1 resp. l_2 .

Uit de parallellogram methode van optellen van vectoren volgt

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$



Voorbeeld

Gegeven : Een assenstelsel (x_1, x_2) , de lijn $l: x_2 = -2x_1$ en de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gevraagd:

- a) Teken in een assenstelsel (x_1, x_2) deze lijn $l: x_2 = -2x_1$. Teken hierin ook de vector

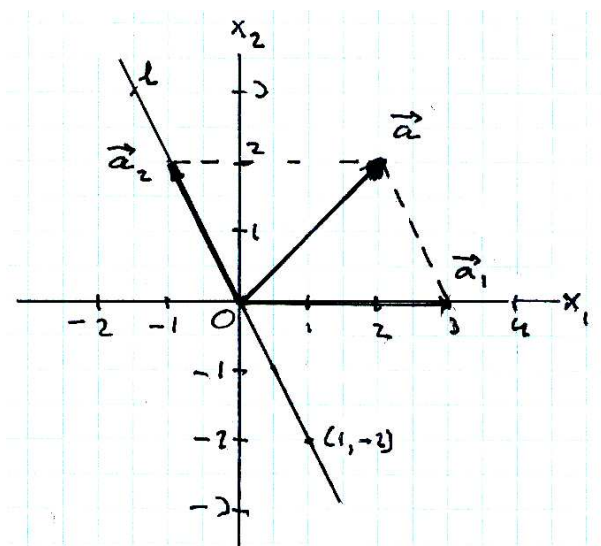
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als positievector .

- b) Ontbind in deze figuur de vector $\vec{a}$ naar een ontbondene $\vec{a}_1$ langs de x_1 -as en een ontbondene $\vec{a}_2$ langs de lijn l .

- c) Lees de kentallen van de vectoren $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$ af en laat algebraïsch zien dat geldt $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$

Oplossing:

- a) Als $x_1 = 1$ dan geldt volgens de formule voor l dat $x_2 = -2 \cdot 1 = -2$. Het punt $(1, -2)$ ligt dus op deze lijn. Zo ligt ook het punt $(0, 0)$ op l . De vector $\vec{a}$ is de pijl van het punt $(0, 0)$ naar het punt $(2, 2)$.



b) De lijn vanuit de kop van $\vec{a}$ evenwijdig aan l levert de vector $\vec{a}_1$ en de lijn door deze kop evenwijdig aan de x_1 -as levert de vector $\vec{a}_2$.

c) Aflezen in de figuur levert $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Voor de optelling van deze vectoren geldt $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dit is inderdaad de vector $\vec{a}$.

Opmerkingen

- 1) In de natuurkunde wordt deze ontbinding van een vector veel toegepast. Een belangrijk voorbeeld is het ontbinden van een kracht naar twee richtingen.
- 2) In dit voorbeeld waren de ontbondenen van een vector naar twee richtingen eenvoudig *meetkundig* te vinden.

De vraag is *hoe* in het algemene geval deze *ontbondenen algebraïsch* kunnen worden *berekend*. In het vervolg wordt een wiskundig apparaat ontwikkeld dat ook hiervoor kan worden gebruikt. Hierbij spelen begrippen als *basis* (deze paragraaf), *inproduct* (§I.6) en *determinant* (§I.7 en §I.9) een rol.

Als voorbereiding op het begrip *stelsel basisvectoren*

bekijken we de ontbinding van een vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in

$\mathbb{R}^2$ volgens het standaard assenstelsel (x_1, x_2) .

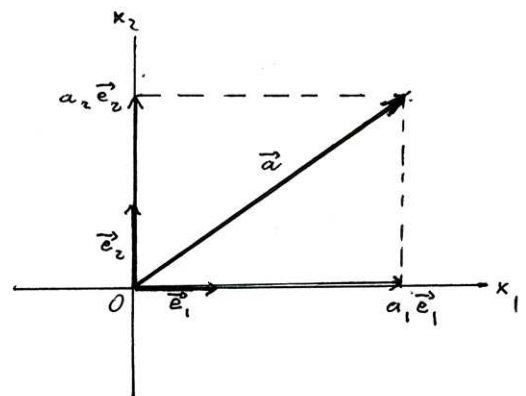
Langs de x_1 -as ligt de vector $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en langs x_2 -as ligt de

vector $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beide vectoren hebben lengte 1 en de

vectoren staan onderling loodrecht.

In nevenstaande figuur is de ontbondene van de vector $\vec{a}$

volgens de x_1 -as a_1 keer de vector $\vec{e}_1$, dus de vector $a_1\vec{e}_1$. De vector $a_2\vec{e}_2$ is de ontbondene van de vector $\vec{a}$ langs de x_2 -as. Het resultaat van deze ontbinding wordt geformuleerd in de volgende stelling.



Stelling

In $\mathbb{R}^2$ kan iedere vector $\vec{a}$ worden uitgedrukt in de vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ langs het standaard assenstelsel volgens

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

Algebraïsch bewijs van de stelling

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Definitie

In $\mathbb{R}^2$ heten de vectoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de *standaard basisvectoren*

Opmerkingen

- 1) De vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ staan onderling loodrecht en hebben ieder de norm één: $|\vec{e}_1| = 1$ en $|\vec{e}_2| = 1$. De vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ vormen een zogenoemde *standaard basis* in $\mathbb{R}^2$. Deze basis behoort bij het standaard assenstelsel (x_1, x_2) . $\vec{e}_1$ is de basisvector behorend bij de x_1 -as en $\vec{e}_2$ is de basisvector behorend bij de x_2 -as.
- 2) Vanwege de formule $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ noemt men de kentallen a_1 en a_2 van de vector $\vec{a}$ ook de resp. *kentallen* van $\vec{a}$ *ten opzichte van de standaard basis* $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

Aan de hand van een voorbeeld laten we nu zien hoe in $\mathbb{R}^2$ een stelsel basisvectoren en een scheef assenstelsel met elkaar samenhangen. Ook het begrip kentallen van een vector ten opzichte van deze andere basis komt hierbij aan de orde.

Dit voorbeeld zal aanleiding geven tot definities van het begrip lineaire combinatie van vectoren en begrippen als afhankelijkheid en onafhankelijkheid van stelsels vectoren. Aan de hand van deze begrippen kan daarna de algemene definitie van een stelsel basisvectoren worden gegeven.

Voorbeeld

Gegeven zijn de vectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Met behulp van deze vectoren gaan we een scheef assenstelsel (l_1, l_2) vormen.

Vervolgens laten we zien hoe de *kentallen* gevonden kunnen worden van de vector

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ten opzichte van dit assenstelsel en

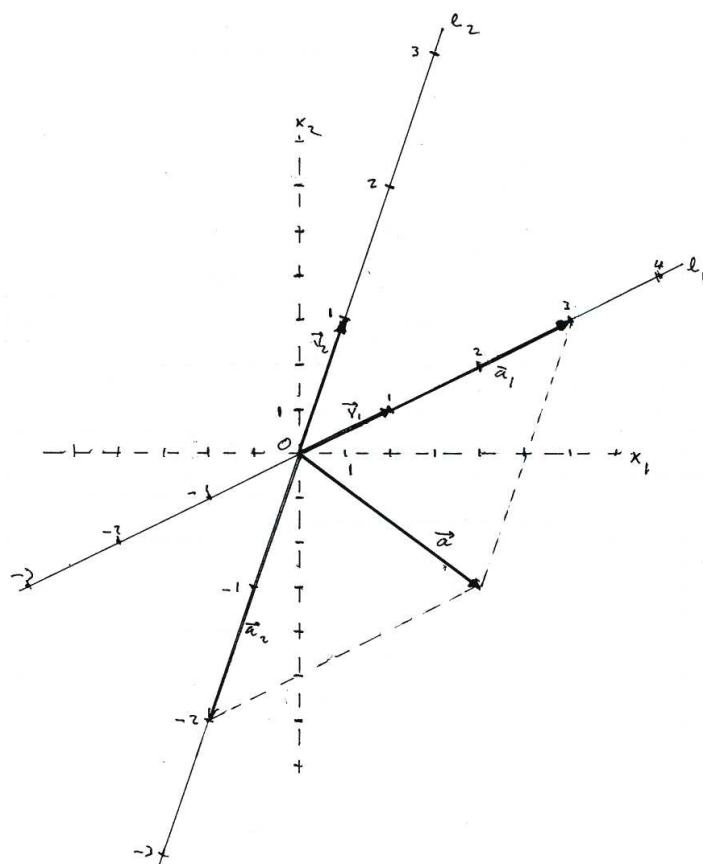
daarmee ten opzichte van de basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

Vorming van het scheve assenstelsel (l_1, l_2)

In de figuur zijn de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ opgevat als positievectoren en dus zijn de staarten in de oorsprong van het standaard assenstelsel geplaatst.

- Langs de vector $\vec{v}_1$ wordt door de oorsprong O de lijn l_1 getekend. Bij de kop van de vector $\vec{v}_1$ komt het getal 1. Het getal 2 bij l_1 ligt 2 keer zo ver van de oorsprong O als het getal 1, het getal 3 bij l_1 ligt 3 keer zo ver,

De negatieve getallen liggen langs l_1 aan de ander kant van O .



Het getal 2 ligt aldus bij de kop van de positievector $2\vec{v}_1$, het getal 3 ligt bij de kop van de vector $3\vec{v}_1$, De getallen -1 , -2 , -3 , liggen bij de koppen van de positievectoren $-\vec{v}_1$, $-2\vec{v}_1$, $-3\vec{v}_1$,

Hiermee is de as l_1 gevormd en het verband met de vector $\vec{v}_1$ besproken.

Merk op de het getal 1 langs deze as niet op een afstand 1 van O ligt maar op een afstand $|\vec{v}_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ omdat het getal 1 door de kop van de positievector $\vec{v}_1$ wordt vastgelegd.

- De as l_2 wordt op een vergelijkbare manier gevormd vanuit de vector $\vec{v}_2$. De lijn l_2 door O is langs de positievector $\vec{v}_2$ getekend. Het getal 1 bij l_2 ligt in de kop van $\vec{v}_2$, het getal -1 bij l_2 ligt aan de andere kant van O op dezelfde afstand van O . Het getal 2 bij l_2 ligt 2 keer zo ver van de oorsprong O als het getal 1,

Aldus geldt in feite dat de getallen 1, 2, 3, bij l_2 in de koppen van de positievectoren $\vec{v}_2$, $2\vec{v}_2$, $3\vec{v}_2$, liggen en dat de getallen -1 , -2 , -3 , bij l_2 door de koppen van de positievectoren $-\vec{v}_1$, $-2\vec{v}_1$, $-3\vec{v}_1$, worden vastgelegd.

Ook het getal 1 bij de as l_2 ligt niet op een afstand 1 van O , maar op een afstand

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Het hier gevormde assenstelsel (l_1, l_2) wijkt dus af in aantal opzichten van het standaard assenstelsel:

- De assen vallen niet samen met het standaard assenstelsel (x_1, x_2)
- De assen staan niet onderling loodrecht
- De schaal van de assen is niet normaal (d.w.z. het getal 1 bij een as ligt niet op een afstand 1 van de oorsprong).

De kentallen van de vector $\vec{a}$ ten opzichte van het assenstelsel (l_1, l_2)

De lijn door de kop van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ evenwijdig aan de l_2 -as snijdt de l_1 -as in 3.

De lijn door de kop van de vector $\vec{a}$ evenwijdig aan de l_1 -as snijdt de l_2 -as in -2 .

Men noemt dit: De vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft de kentallen 3 en -2 ten opzichte van het assenstelsel (l_1, l_2) .

De ontbinding van de vector $\vec{a}$ ten opzichte van de lijnen l_1 en l_2 levert de resp. ontbondenen

$$\vec{a}_1 = 3\vec{v}_1 = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{a}_2 = -2\vec{v}_2 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Omdat $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ volgt hieruit

$$\vec{a} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$$

Men noemt dit: De vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft de resp. kentallen 3 en -2 ten opzichte van de basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

Het maakt dus niet uit of men spreekt van de kentallen ten opzichte van een stelsel basisvectoren of van de kentallen ten opzichte van het bijbehorende assenstelsel.

Na dit voorbeeld wordt het tijd om precies te definiëren wat een stelsel basisvectoren is. Hiertoe hebben we het begrip lineaire combinatie van vectoren nodig en de begrippen afhankelijkheid en onafhankelijkheid van vectoren. De definities zijn zodanig dat zij niet alleen geldig zijn in $\mathbb{R}^2$ maar ook algemeen in $\mathbb{R}^n$.

Definitie

Een vector $\vec{v}$ heet een *lineaire combinatie* van een stelsel vectoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m$ als er scalars $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ bestaan zodanig dat

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \dots + \lambda_m \vec{w}_m$$

Voorbeelden

- 1) In het laatste voorbeeld is de vector $\vec{a}$ een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ omdat voor de scalars $\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = -2$ geldt

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$$

- 2) Iedere vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ is een lineaire combinatie van de standaard basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ omdat er altijd scalars a_1 en a_2 (de kentallen) bestaan zodanig dat.

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

- 3) Gegeven het stelsel vectoren $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ en ook de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$. De vector $\vec{v}$ is een lineaire combinatie van het stelsel vectoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ en $\vec{w}_3$ omdat geldt

$$\vec{v} = 4\vec{w}_1 - 2\vec{w}_2 + 0\vec{w}_3$$

Deze lineaire combinatie is niet uniek want ook is mogelijk

$$\vec{v} = -2\vec{w}_1 + 4\vec{w}_2 - 4\vec{w}_3$$

Ga door berekening na dat deze lineaire combinaties juist zijn (opgave I.4.4)

- 4) Gegeven het stelsel vectoren $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

en ook de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. De vector $\vec{v}$ is geen lineaire

combinatie van het stelsel vectoren $\vec{w}_1$ en $\vec{w}_2$, want:

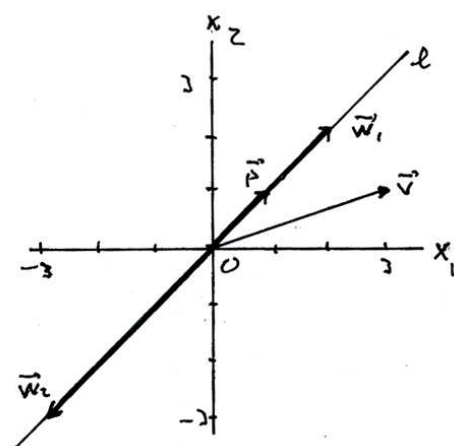
Voor een willekeurige lineaire combinatie van $\vec{w}_1$ en $\vec{w}_2$ geldt

$$\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \end{pmatrix} = (2\lambda_1 - 3\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dus iedere lineaire combinatie is gelijk of tegengesteld

gericht aan de vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gezien als positievector is

ieder lineaire combinatie van $\vec{w}_1$ en $\vec{w}_2$ gericht volgens de lijn $l: x_2 = x_1$ die langs de vector $\vec{p}$ ligt. De vector $\vec{v}$ is echter niet gelijk of tegengesteld gericht aan $\vec{p}$ want $\vec{v}$ is niet gericht volgens de lijn l .



Ook de volgende definitie geldt niet alleen in $\mathbb{R}^2$ maar algemeen in $\mathbb{R}^n$.

Definitie

Een stelsel vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ heet *lineair afhankelijk* als ten minste één van de vectoren uit het stelsel een lineaire combinatie is van de overige vectoren. Is het stelsel vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ niet lineair afhankelijk dan heet het stelsel *lineair onafhankelijk*.

Voorbeelden

- 1) De standaard basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ in $\mathbb{R}^2$ zijn onafhankelijk.
Stel het tegendeel, de vectoren zijn wel afhankelijk. Er is dan een scalar λ_1 zodanig dat $\vec{e}_2 = \lambda_1 \vec{e}_1$ of er is een scalar λ_2 zodanig dat $\vec{e}_1 = \lambda_2 \vec{e}_2$. In termen van kolomen betekent het eerste geval

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda_1 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Het is niet mogelijk dat $1 = 0$ en dus kan niet gelden $\vec{e}_2 = \lambda_1 \vec{e}_1$.

Een vergelijkbaar argument geldt voor het tweede geval.

- 2) In $\mathbb{R}^2$ vormt iedere vector $\vec{a}$ samen met de standaard basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ een afhankelijk stelsel.
Immers volgens de stelling hierboven zijn er scalars a_1 en a_2 bestaan zodanig dat.

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

Dus is iedere vector $\vec{a}$ een lineaire combinatie van $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$,

- 3) Als ten minste één van de vectoren uit een stelsel vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ gelijk is aan de nulvector $\vec{0}$ dan is het stelsel afhankelijk.

Stel bijv. $\vec{v}_1 = \vec{0}$ dan geldt $\vec{0} = 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n$. De scalars in de lineaire combinatie van $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ zijn dus alle 0.

- 4) Een stel vectoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ en $\vec{b} \neq \vec{0}$ is een afhankelijk stelsel dan en slechts dan als deze vectoren gelijk of tegengesteld gericht zijn.

Stel de vectoren zijn afhankelijk. Er is dan een scalar λ zodanig dat $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ of er is een scalar μ zodanig dat $\vec{a} = \mu \vec{b}$. In beide gevallen betekent dit dat de vectoren volgens dezelfde lijn gericht zijn.

Stel de vectoren zijn gelijk of tegengesteld gericht. Er is dan een scalar λ zodanig dat $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Dus vormen de vectoren een afhankelijk stelsel.

En ten slotte geldt ook de volgende definitie niet alleen in $\mathbb{R}^2$ maar algemeen in $\mathbb{R}^n$.

Definitie

Een stelsel vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ heet een *basis* als

- Het stelsel is onafhankelijk.
- Iedere andere vector is een lineaire combinatie van dit stelsel.

Voorbeeld

In het bovenstaande voorbeeld van het scheve assenstelsel (l_1, l_2) zijn de vectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ onafhankelijk (zie opgave I.4.5). Deze vectoren vormen een basis in $\mathbb{R}^2$ omdat niet

alleen de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ een lineaire combinatie is van de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ volgens

$$\vec{a} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$$

maar ook iedere andere vector $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ is van de vorm $\vec{b} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$. Dit laatste is een gevolg van de volgende stelling.

Stelling

Ieder tweetal onafhankelijke vectoren $\mathbb{R}^2$ vormt een basis.

Meetkundig bewijs

Stel twee vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ zijn onafhankelijk. Zij zijn dan resp. gericht volgens twee lijnen l_1 en l_2 die elkaar snijden.

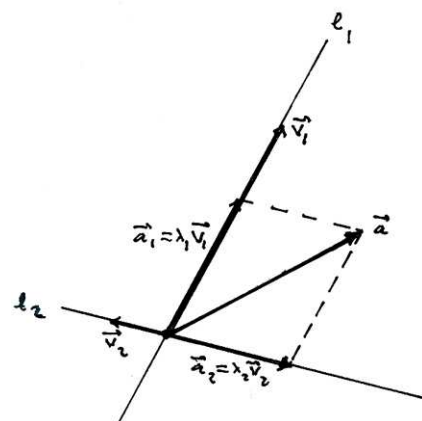
Laat $\vec{a}$ een willekeurige vector zijn. We ontbinden de vector $\vec{a}$ langs deze lijnen. De vector $\vec{a}_1$ is de ontbondene van $\vec{a}$ volgens de lijn l_1 en de vector $\vec{a}_2$ is de ontbondene van $\vec{a}$ volgens de lijn l_2 . Er geldt dus

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2.$$

De vector $\vec{a}_1$ ligt langs dezelfde lijn als de vector $\vec{v}_1$ en er bestaat dus een scalar λ_1 zodanig dat $\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$. De vector $\vec{a}_2$ ligt langs lijn l_2 evenals de vector $\vec{v}_2$ en er is daarom een scalar λ_2 zodanig dat

$$\vec{a}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2.$$

Resultaat $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$. Dus een willekeurige vector $\vec{a}$ is een lineaire combinatie van de onafhankelijke vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.



□

Opmerkingen

- 1) Het algebraïsche bewijs van de stelling gaat uit van twee vergelijkingen met twee onbekenden λ_1 en λ_2 . Het bewijs is sterk rekenkundig en geeft niet een goed beeld van wat afhankelijkheid of onafhankelijkheid van vectoren betekent, terwijl de in het meetkundig argument besproken ontbinding van een vector naar twee richtingen meer zicht geeft op wat er aan de hand is
- 2) Uit het hier gegeven bewijs blijkt dat de vector $\vec{a}$ op slechts één manier kan worden uitgedrukt als lineaire combinatie van de basis $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. De ontbinding van $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ volgens de lijnen l_1 en l_2 is uniek en omdat er verder maar één scalar λ_1 bestaat zodanig dat $\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$ en maar één scalar λ_2 zodanig dat $\vec{a}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$ is de lineaire combinatie $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ uniek.

- 3) Overigens geven we in §I.9 wel een rekenmethode voor de onbekenden λ_1 en λ_2 met behulp van de nevenvectoren van de onafhankelijke vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.
- 4) Vanwege de uniciteit van de scalars λ_1 en λ_2 heeft het zin om deze scalars de resp. kentallen van de vector $\vec{a}$ ten opzichte van de basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ te noemen.

Opmerking

Een assenstelsel met *onderling loodrechte* assen en een *schaal die overeenstemt met de standaard afstand* zullen we meestal met x en y aangeven.

Opmerking vooraf aan de opgaven:

Stelling over de rechthoekige driehoek met scherpe hoeken van 30° en 60°

De volgende meetkundige stelling zal in het vervolg worden gebruikt in de opgaven:

Stelling

In een rechthoekige driehoek met scherpe hoeken van 30° en 60° is de zijde tegenover de hoek van 30° de helft van de schuine zijde.

Bewijs

In $\triangle ABC$ rechts is a de zijde tegenover de hoek van 30° en b de schuine zijde.

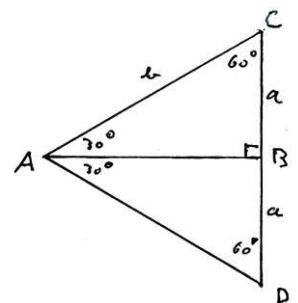
Het punt C wordt ten opzichte van de lijn door AB gespiegeld naar een punt D

$$C \xrightarrow{\mathcal{S}_{AB}} D$$

Hierdoor ontstaat $\triangle ABD$ met drie hoeken van 60° . Daarom is $\triangle ABD$ gelijkzijdig.

Er geldt dus $CD = AC$, dus $2a = b$. Resultaat $a = \frac{1}{2}b$

□



Voorbeeld

Stel in dat in de figuur voor de schuine zijde geldt $b = 8$ dan geldt volgens de stelling voor de zijde tegenover de hoek van 30° dat $a = \frac{1}{2}b = 4$.

Volgens Pythagoras geldt voor de zijde tegenover de hoek van 60°

$$c^2 = b^2 - a^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow c = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

Opmerkingen

- 1) Met behulp van deze stelling kunnen we sinus en cosinus van hoeken van 30° en 60° exact uitrekenen.

Uit de figuur blijkt $\cos 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

$$\sin 30^\circ = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

en

$$\cos 60^\circ = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

- 2) Het is niet de bedoeling dat deze getallen worden onthouden. Van belang is alleen de stelling.
Deze valt altijd eenvoudig te beredeneren met behulp een tekening van de spiegeling zoals uitgevoerd in het bewijs. Met de stelling kan eenvoudig verder worden gerekend. Als bijvoorbeeld de zijde tegenover de hoek van 30° bekend is valt de schuine zijde direct te berekenen en vervolgens met behulp van Pythagoras de andere rechthoekszijde. En daarna eventueel cosinus en/of sinus.

Opgaven

I.4.1 Gegeven zijn de vectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- a) Teken een scheef assenstelsel (l, m) door de oorsprong waarbij de lijn l gericht is volgens de vector $\vec{v}_1$ en de lijn m volgens de vector $\vec{v}_2$ en waarbij de kop van positievector $\vec{v}_1$ het getal 1 op de l -as vastlegt en de positievector $\vec{v}_2$ het getal 1 op de m -as

Verder is gegeven de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- b) Ontbind in de figuur de vector $\vec{a}$ naar de l -as en de m -as en lees de resp. kentallen λ_1 en λ_2 van deze vector ten opzichte van deze assen af.
c) Geef de vector $\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$ als kolomvector en ook de vector $\vec{a}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$ en laat algebraïsch zien dat geldt $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$

14.2 Gegeven is de vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- a) Waarom is de vector $\vec{k}$ volgens de lijn $x : x_2 = 2x_1$ gericht?
b) Bereken exact de eenheidsvector $\vec{e}_k$ in de richting van $\vec{k}$ en de bijbehorende nevenvector $\vec{e}_k^*$. Noem het stel basisvectoren $\vec{e}_k, \vec{e}_k^*$ resp. $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.
c) Teken het loodrechte assenstelsel (x, y) in het standaard assenstelsel.

Gegeven is verder de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

- d) Wat is de norm van deze vector en welke hoek maakt deze vector met de x_1 -as?
e) Teken de vector $\vec{a}$ in het assenstelsel (x, y) en lees de resp. kentallen a_x en a_y van deze vector af ten opzichte van dit assenstelsel.
f) Toon met behulp van b) algebraïsch aan dat de in d) gevonden kentallen voldoen aan $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$

14.3 a) Teken het loodrecht assenstelsel (x, y) dat door een draaiing om de oorsprong over 30° ontstaat uit het standaard assenstelsel

b) Gegeven de vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Bereken de norm van deze vector. Leg uit waarom deze vector is gericht volgens de x -as. Bereken de basisvectoren $\vec{e}_x = \vec{e}_k = \frac{1}{|\vec{k}|} \vec{k}$ en $\vec{e}_y = \vec{e}_x^*$

Gegeven is verder de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) Wat is de lengte van deze vector? Leg uit welke hoek deze vector maakt met de x_1 -as.

d) Welke hoek maakt deze vector met de x -as?

e) Ten opzichte van de basis in het assenstelsel (x, y) heeft de vector $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$ de kentallen $a_x = \sqrt{3}$ en $a_y = 1$. Verklaar dit meetkundig aan de hand van een figuur waarin de vector $\vec{a}$ in het assenstelsel (x, y) is getekend.

f) Toon met behulp van het resultaat uit b) algebraïsch aan dat het resultaat uit e) klopt.

I.4.4 Gegeven $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ en de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Toon door berekening aan dat geldt

$$\vec{v} = 4\vec{w}_1 - 2\vec{w}_2 + 0\vec{w}_3$$

b) Toon door berekening aan dat ook geldt

$$\vec{v} = -2\vec{w}_1 + 4\vec{w}_2 - 4\vec{w}_3$$

I.4.5 Bewijs dat de vectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ onafhankelijk zijn.

I.4.6 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Toon aan dat deze vectoren een afhankelijk stelsel vormen.

(Aanwijzing: Met bijv. de vector $-2\vec{b}$ valt dit snel in te zien zonder dat er een tekening hoeft te worden gemaakt.)

I.4.7 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b}$, waarbij voor de tweede vector kan gelden

a) $\vec{b} = \vec{a}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Leg uit welke van de paren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ een afhankelijk stelsel vectoren vormt

I.4.8 Volgens de laatste stelling kan in $\mathbb{R}^2$ elk tweetal onafhankelijke vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ dienen als basis voor de vectoren. Elke andere vector is een lineaire combinatie van zo'n tweetal vectoren.

a) Teken als positievectoren in een assenstelsel (x_1, x_2) de vectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ als positievectoren. Teken ook het bijbehorende scheve assenstelsel.

b) Teken ook als positievector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Ontbind de vector $\vec{a}$ langs de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$, dus volgens het scheve assenstelsel.

d) In $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ zijn λ_1 en λ_2 de kentallen van de vector $\vec{a}$ ten opzichte van de basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Bepaal deze kentallen uit de figuur en ga met een berekening na dat inderdaad geldt $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$

I.4.9 Laat $\vec{v}$ en $\vec{w}$ twee onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^2$ zijn

a) Waarom geldt $\angle(\vec{v}, \vec{w}) \neq 0^\circ$ en $\angle(\vec{v}, \vec{w}) \neq 180^\circ$?

Volgens de laatste stelling vormt het paar $\vec{v}, \vec{w}$ een basis voor $\mathbb{R}^2$

Als $\angle(\vec{v} \rightarrow \vec{w}) > 0^\circ$ heet de basis $\vec{v}, \vec{w}$ *positief georiënteerd*.

Als $\angle(\vec{v} \rightarrow \vec{w}) < 0^\circ$ heet de basis $\vec{v}, \vec{w}$ *negatief georiënteerd*.

b) Leg uit dat het basispaar $\vec{v}, \vec{w}$ en het basispaar $\vec{w}, \vec{v}$ een tegengesteld teken van oriëntatie bezitten.

I.4.10 Laat $\vec{v}$ en $\vec{w}$ twee afhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^2$ zijn.

Leg uit dat voor deze vectoren geen oriëntatie kan worden gedefinieerd.

I.4.11 Laat l en m twee onderling loodrechte lijnen zijn door een gekozen oorsprong van een vlak.

Leg uit dat bij dit paar lijnen er 8 onderling loodrechte paren basisvectoren van lengte 1 mogelijk zijn: 4 van positieve oriëntatie en 4 van negatieve oriëntatie.

I.5 Het inproduct van vectoren in $\mathbb{R}^2$: algebraïsche beschouwing

In een vorige paragraaf over de nevenvector hebben we vanuit onze *meetkundige intuïtie*, die in de loop van de tijd is opgebouwd, beschouwingen gehouden over *hoeken* en *lengtes* bij *vectoren*. Door *toevoeging van een extra structuur* aan een vectorruimte als $\mathbb{R}^2$ wordt het echter mogelijk om lengtes en hoeken *algebraïsch te definiëren*. Deze extra structuur heet het *inproduct* van twee vectoren en met dit inproduct worden lengte en hoek bij vectoren dus formeel gedefinieerd.

In deze paragraaf wordt dit inproduct algebraïsch gedefinieerd en wordt een stelling bewezen over de algemene eigenschappen van dit product. Deze algemene eigenschappen worden dan gebruikt om de kentallen van een vector te berekenen ten opzichte van een zogenoemde orthonormale basis. Zo'n orthonormale basis wordt geheel algebraïsch gedefinieerd met behulp van het inproduct.

In de volgende paragraaf komen de meetkundige aspecten van het inproduct aan bod. We zullen daar aantonen dat het begrip orthonormaal zijn van vectoren meetkundig betekent dat dergelijke vectoren onderling loodrecht staan. Dit laatste door een stelling van Pythagoras te bewijzen bij vectoren. Vervolgens wordt via deze stelling van Pythagoras bij vectoren uitgelegd hoe de hoek tussen twee vectoren algebraïsch wordt gedefinieerd.

Definitie

Aan ieder tweetal vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ is een reëel getal toegevoegd, genaamd het *inproduct* van deze vectoren en genoteerd als $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, gegeven door

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Opmerking

Uitgedrukt in alleen de kentallen van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ noteert men voor het inproduct

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Vanwege deze notatie wordt het inproduct in het Engels ook wel het *dotpruct* genoemd (dot = punt).

Voorbeeld

Gegeven de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gevraagd: het inproduct van deze vectoren

Oplossing

Voor het inproduct geldt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$

De volgende stelling geeft de *algemene algebraïsche eigenschappen van het inproduct*.

Stelling

Voor alle vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^2$ en voor iedere scalar λ geldt voor het inproduct

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \quad \text{commutativiteit}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \quad \text{behoud optelling}$$

$$\langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \quad \text{behoud schaling}$$

Verder geldt $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$ met nuleigenschap

$$\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$$

Bewijs

Commutativiteit

Voor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

Behoud vectoroptelling

Als verder geldt $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix}$ en dus

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) = a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2 = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \end{aligned}$$

Behoud schaling

$$\langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle = a_1(\lambda b_1) + a_2(\lambda b_2) = \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2) = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

Nuleigenschap

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_1 a_1 + a_2 a_2 = a_1^2 + a_2^2$$

Dit is altijd positief behalve als zowel $a_1 = 0$ als $a_2 = 0$, dus behalve als $\vec{a} = \vec{0}$

□

Opmerking

Voor alle vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^2$ en voor iedere scalar λ geldt verder

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \quad \text{behoud optelling}$$

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \quad \text{behoud schaling}$$

Dit kan net als hierboven worden bewezen, maar volgt ook direct uit de stelling vanwege de *commutativiteit*

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

en

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \lambda \vec{a} \rangle = \lambda \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

Als een bewerking op vectoren zowel optelling behoud als schaling dan noemt men een dergelijke bewerking lineair. Omdat behoud optelling en behoud schaling tussen de haken zowel links als rechts van de komma geldt, dus dubbel, noemt men het inproduct van twee vectoren ook wel een *bilineaire vorm*.

Vanuit het inproduct valt direct de lengte van een vector te definiëren.

Definitie

De *lengte* of *norm* van een vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$, notatie $|\vec{a}|$, is per definitie

$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

Toelichting op de definitie

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan geldt $\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Dit is in overeenstemming met de eerdere definitie $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Volgens de stelling, en ook volgens deze formule, heeft alleen de nulvector norm 0 en hebben alle andere vectoren een norm die positief is.

We gaan nu het begrip orthonormale basis definiëren dat centraal staat in het vervolg van deze paragraaf

Definitie

Twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ heten *orthogonaal* als hun inproduct gelijk nul is.

Dus twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ zijn orthogonaal als geldt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Voorbeeld

De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en zijn nevenvector $\vec{a}^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ zijn orthogonaal want er geldt

$$\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0$$

Opmerking

Dat een vector en zijn nevenvector orthogonaal zijn suggereert dat meetkundig de orthogonaliteit van twee vectoren betekent dat dergelijke vectoren onderlinge loodrecht staan. In de volgende paragraaf zal blijken dat de definitie van de hoek tussen twee vectoren vanuit het inproduct tot de conclusie leidt dat twee vectoren, beide ongelijk de nulvector, dan en slechts dan orthogonaal zijn als zij onderling een hoek van 90° hebben.

De hier gegeven definitie van orthogonaliteit werkt direct vanuit het inproduct, zonder tussenkomst van het meetkundige begrip loodrecht, dus zonder tussenkomst van het begrip hoek.

Ook de volgende definitie werkt rechtstreeks vanuit het inproduct, zonder tussenkomst van het begrip hoek, omdat ook de lengte van een vector direct vanuit het inproduct is gedefinieerd.

Definitie

Twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ heten *orthonormaal* als zij orthogonaal zijn en als zij beide norm 1 hebben (beide van lengte 1 zijn).

Voorbeeld

Gegeven: In het standaard assenstelsel (x_1, x_2) wordt de lijn l gegeven door $l: x_2 = \frac{3}{4}x_1$

Gevraagd: Een orthonormaal stelsel basisvectoren waarvan één van deze vectoren gericht is langs l .

Oplossing

Als $x_1 = 4$ dan is volgens de formule $x_2 = 3$. De vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ is dus gericht langs de lijn l .

De eenheidsvector in de richting van $\vec{k}$ wordt gegeven door

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

De nevenvector van $\vec{e}_k$ is

$$\vec{e}_k^* = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Ook de nevenvector heeft lengte 1 en er geldt verder

$$\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k^* \rangle = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0$$

Het stelsel vectoren $\vec{e}_k, \vec{e}_k^*$ is dus een orthonormale basis zoals gevraagd.

Opmerking over notatie van orthonormale assenstelsels in $\mathbb{R}^2$

Het assenstelsel behorend bij een orthonormale basis wordt een orthonormaal assenstelsel genoemd. Als we in het vervolg spreken over een x -as en een bijbehorende y -as in $\mathbb{R}^2$ dan zullen we altijd een orthonormaal assenstelsel bedoelen. De bijbehorende basisvectoren noteren we dan als $\vec{e}_x$ resp. $\vec{e}_y$. Dit betekent dat in deze notatie altijd moet gelden

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = 1$$

$$\langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle = 1$$

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0$$

In sommige gevallen zullen we echter een notatie als $\vec{e}_k, \vec{e}_k^*$ voor een orthonormale basis blijven gebruiken in plaats van de notatie $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.

In het volgende voorbeeld brengen we in de herinnering hoe de kentallen van een vector in $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van een basis worden bepaald op een *meetkundige* manier. We gebruiken hierbij een orthonormaal assenstelsel (x, y)

Na dit voorbeeld laten we zien hoe de *kentallen* van een vector in $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van een *orthonormale basis* met behulp van het *inproduct* kunnen worden *berekend*. De hiervoor benodigde stellingen worden bewezen met de hierboven reeds bewezen algemene eigenschappen van het inproduct.

Voorbeeld

Gegeven: De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$.

Gevraagd: De kentallen van deze vector ten opzichte van de basis $\vec{e}_k, \vec{e}_k^*$ uit het vorige voorbeeld.

Noteer hierbij $\vec{e}_x$ in plaats van $\vec{e}_k$ en $\vec{e}_y$ in plaats van $\vec{e}_k^*$.

Oplossing

Teken de lijn $x: x_2 = \frac{3}{4}x_1$ in het standaard assenstelsel (x_1, x_2) . Teken de lijn y door de oorsprong loodrecht op x . Breng op beide lijnen dezelfde schaal aan als die van de standaard assen. Het resultaat is in de figuur gegeven. De schalen langs x en y zijn dan zodanig gekozen dat de vector $\vec{e}_x = \vec{e}_k$ het getal 1 op x vastlegt en de vector $\vec{e}_y = \vec{e}_k^*$ het getal 1 op y .

Ontbinden van de vector $\vec{a}$ langs de assen x en y levert het kental 5 op de x -as en het kental -5 op de y -as.

Dit betekent dat zou moeten gelden ten opzichte van de basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$

$$\vec{a} = 5 \cdot \vec{e}_x + (-5) \vec{e}_y$$

Dit is inderdaad het geval omdat geldt

$$5 \cdot \vec{e}_x + (-5) \vec{e}_y = 5 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

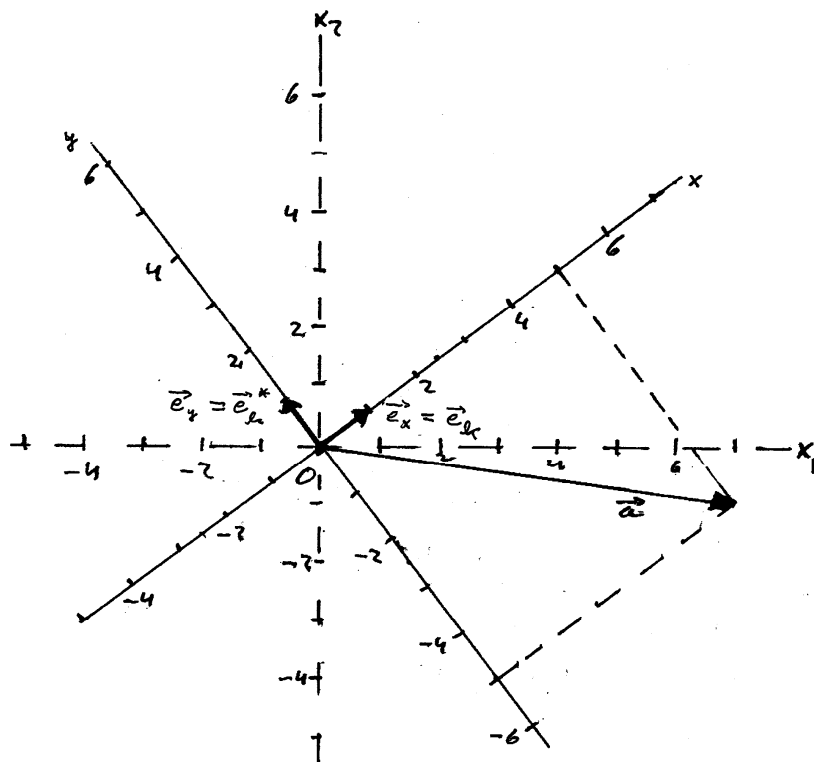
Opmerking

De kentallen van een willekeurige vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van de orthonormale basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ worden genoteerd als a_x resp. a_y .

In het bovenstaande voorbeeld geldt dus

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

met $a_x = 5$ en $a_y = -5$.



Stelling

Als in $\mathbb{R}^2$ $\vec{e}_x$ de eenheidsvector is in de richting van een vector $\vec{k}$ en $\vec{e}_y = \vec{e}_x^*$ is de nevenvector van $\vec{e}_x$ dan geldt

- 1) De vectoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ vormen een orthonormale basis in $\mathbb{R}^2$
- 2) De kentallen a_x, a_y van een vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van deze basis, dus in de formule $\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$, worden gegeven door

$$a_x = \langle \vec{e}_x, \vec{a} \rangle$$

$$a_y = \langle \vec{e}_y, \vec{a} \rangle$$

Bewijs

- 1) We moeten aantonen dat voor de vectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ geldt

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = 1$$

$$\langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle = 1$$

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0$$

Er geldt $\vec{e}_x = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ dus

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = \left\langle \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right\rangle = \frac{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle}{|\vec{k}|^2} \quad \text{behoud schaling}$$

$$= \frac{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle^2}} = 1 \quad \text{definitie norm}$$

Als $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2 = 1$. Dit betekent voor de

nevenvector $\langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = (-u_2)^2 + u_1^2 = 1$

en ook $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = u_1(-u_2) + u_2 \cdot u_1 = 0$

- 2) Uit de algemene eigenschappen van het inproduct volgt

$$\langle \vec{e}_x, \vec{a} \rangle = \langle \vec{e}_x, a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y \rangle = \langle \vec{e}_x, a_x \cdot \vec{e}_x \rangle + \langle \vec{e}_x, a_y \cdot \vec{e}_y \rangle$$

$$= a_x \langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle + a_y \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle$$

$$= a_x \cdot 1 + a_y \cdot 0 = a_x$$

behoud optelling

behoud schaling

orthonormaliteit

$$\langle \vec{e}_y, \vec{a} \rangle = \langle \vec{e}_y, a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y \rangle = \langle \vec{e}_y, a_x \cdot \vec{e}_x \rangle + \langle \vec{e}_y, a_y \cdot \vec{e}_y \rangle$$

$$= a_x \langle \vec{e}_y, \vec{e}_x \rangle + a_y \langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle$$

$$= a_x \cdot 0 + a_y \cdot 1 = a_y$$

behoud optelling

behoud schaling

orthonormaliteit

□

Voorbeeld

We kunnen nu in het vorige voorbeeld de kentallen *berekenen* van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

ten opzichte van de orthonormale basis $\vec{e}_x = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_y = \vec{e}_x^* = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

want volgens de stelling geldt

$$a_x = \langle \vec{e}_x, \vec{a} \rangle = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \cdot 7 + \frac{3}{5} \cdot (-1) = 5$$
$$a_y = \langle \vec{e}_y, \vec{a} \rangle = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{5} \cdot 7 + \frac{4}{5} \cdot (-1) = -5$$

Het bewijs van de volgende stelling is algebraïsch van aard en hoort daarom in deze paragraaf. Echter de meetkundige betekenis ervan is groot, zoals zal blijken in de volgende paragraaf. Zo is deze stelling onontbeerlijk bij het bewijs vanuit het inproduct van de stelling van Pythagoras zoals die geldt in een orthonormaal assenstelsel. Vervolgens leidt dit tot de projectiestelling die de motivering levert voor de definitie van een hoek vanuit het inproduct.

Stelling

Als in $\mathbb{R}^2$ de vector $\vec{a}$ ten opzichte van de orthonormale basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ de resp. kentallen a_x en a_y heeft en de vector $\vec{b}$ de resp. kentallen b_x b_y dan geldt voor het inproduct van deze vectoren

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y$$

Bewijs

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \langle a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y, \vec{b} \rangle = \langle a_x \cdot \vec{e}_x, \vec{b} \rangle + \langle a_y \cdot \vec{e}_y, \vec{b} \rangle && \text{behoud optelling} \\ &= a_x \langle \vec{e}_x, \vec{b} \rangle + a_y \langle \vec{e}_y, \vec{b} \rangle && \text{behoud schaling} \\ &= a_x b_x + a_y b_y && \text{vorige stelling} \end{aligned}$$

□

Opmerking: De algemene betekenis van de stelling.

Welk orthonormaal assenstelsel (x, y) er ook wordt gekozen, altijd is er dezelfde formule voor het inproduct.

Ten opzichte van de bijbehorende orthonormale basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ geldt immers altijd

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y \quad \text{en} \quad \vec{b} = b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y$$

met $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y$

Bij het standaard-assenstelsel (x_1, x_2) levert dit nogmaals de definitie van het inproduct.

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{en} \quad \vec{b} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2$$

met $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Opgaven

1.5.1 Gegeven is de vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Waarom is de vector $\vec{k}$ volgens de lijn $x : x_2 = 2x_1$ gericht?
- Geef exact de eenheidsvector $\vec{e}_x = \vec{e}_k$ in de richting van $\vec{k}$ en de bijbehorende nevenvector $\vec{e}_y = \vec{e}_k^*$.

Gegeven is verder de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

- Bereken de kentallen van deze vector ten opzichte van de orthonormale basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$

I.5.2 Gegeven is de vector $\vec{k} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

- Bereken de lengte van $\vec{k}$ en beargumenteer aan de hand van een figuur dat deze vector een hoek van 30° maakt met de positieve x_1 -as van het standaard assenstelsel.

Verder ontstaat het assenstelsel (x, y) vanuit het standaard assenstelsel (x_1, x_2) door een draaiing om de oorsprong over 30°

- Geef exact de kentallen van de orthonormale basisvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

Gegeven is ook de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

- Welke hoek maakt deze vector met de met de positieve x_1 -as van het standaard assenstelsel? En dus welke hoek met de positieve x -as?
- Bereken exact de kentallen van de vector $\vec{a}$ ten opzichte van deze basis.
- Verklaar het resultaat uit d) meetkundig met behulp van het resultaat uit c).

I.5.3 Gegeven is de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

- Bereken $|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$.

Verder ontstaat het assenstelsel (x, y) vanuit het standaard assenstelsel (x_1, x_2) door een draaiing om de oorsprong over 45° .

- Geef exact de kentallen van de orthonormale basisvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.
- Geef exact de kentallen van de vector $\vec{a}$ ten opzichte van deze basis.
- Bereken $|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$ ook met behulp van de laatste stelling.

I.5.4 De laatste stelling over het inproduct in een willekeurig orthonormaal stelsel is bewezen met de voorlaatste stelling over de kentallen van een vector ten opzichte van een orthonormaal stelsel. Omgekeerd volgt de voorlaatste stelling uit de laatste.

- Als in $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y$ geldt $\vec{a} = \vec{e}_x$ waarom dit leidt tot $b_x = \langle \vec{e}_x, \vec{b} \rangle$?
- Welke keuze voor $\vec{a}$ leidt tot $b_y = \langle \vec{e}_y, \vec{b} \rangle$?

I.6 Het inproduct van vectoren in $\mathbb{R}^2$: meetkundige betekenis

In de vorige paragraaf is het inproduct van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ *algebraïsch* gedefinieerd en als eerste toepassing van dit begrip hebben we laten zien hoe de kentallen van een vector ten opzichte van een orthonormale basis kunnen worden berekend. Bij de definitie van een orthonormale basis is alleen gebruik gemaakt van de algebraïsche eigenschappen van het inproduct en waren hoeken niet nodig.

In deze paragraaf komt de *meetkundige betekenis* van het inproduct aan bod. Deze meetkundige beschouwingen onderbouwen de algebraïsche definitie van de hoek tussen twee vectoren vanuit het inproduct. Deze definitie van de hoek is het hoofddoel van de paragraaf

De eerste stelling van meetkundige betekenis betreft de *stelling van Pythagoras* voor de ontbondenen van een vector ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel.

Stelling van Pythagoras

In $\mathbb{R}^2$ zijn de vectoren $b_x \cdot \vec{e}_x$ en $b_y \cdot \vec{e}_y$ zijn de ontbondenen van een vector $\vec{b} = b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y$ ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel (x, y) behorend bij een orthonormale basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.

Het verband tussen de lengte van de vector en de lengtes van de ontbondenen is de stelling van Pythagoras

$$|\vec{b}|^2 = |b_x \cdot \vec{e}_x|^2 + |b_y \cdot \vec{e}_y|^2$$

Bewijs

$$|\vec{b}|^2 = \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$$

definitie norm vector

$$= b_x b_x + b_y b_y = b_x^2 + b_y^2$$

laatste stelling vorige paragraaf

Verder

$$|b_x \cdot \vec{e}_x|^2 = \langle b_x \cdot \vec{e}_x, b_x \cdot \vec{e}_x \rangle$$

definitie norm vector

$$= b_x^2 \langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle$$

behoud schaling

$$= b_x^2 \cdot 1 = b_x^2$$

normaliteit basisvector

Vergelijkbaar geldt

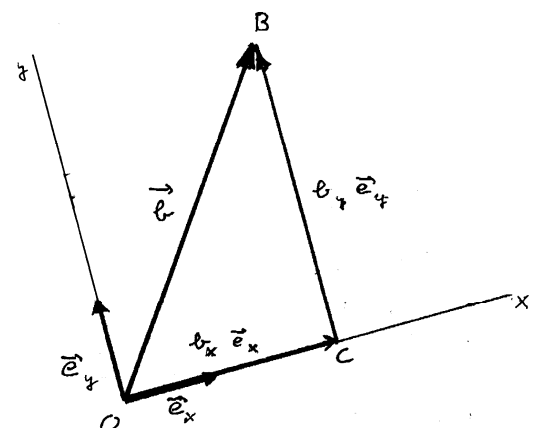
$$|b_y \cdot \vec{e}_y|^2 = b_y^2$$

□

Opmerking over de definitie van de rechte hoek

In de figuur rechts wordt de optelling $\vec{b} = b_x \cdot \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y$ volgens de kop-staart methode gegeven. Voor de lengtes van de zijden in $\triangle OCB$ geldt $OC = |b_x \vec{e}_x| = |b_x|$,

$CB = |b_y \vec{e}_y| = |b_y|$ en $OB = |\vec{b}|$. Volgens de stelling geldt dus



$OB^2 = OC^2 + CB^2$. Dus in $\triangle OCB$ geldt de stelling van Pythagoras.

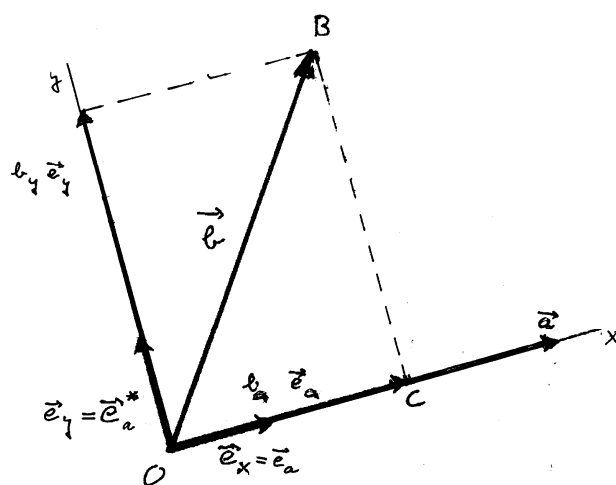
Vanwege deze stelling is het in overeenstemming met onze meetkundige kennis dat we de hoek $\angle OCB$ definiëren als rechthoekig.

Omdat $\overrightarrow{OC} = b_x \vec{e}_x$ en $\vec{e}_x$ volgens eenzelfde lijn gericht zijn en ook $\overrightarrow{CB} = b_y \vec{e}_y$ en $\vec{e}_y$ zijn gericht volgens eenzelfde lijn, betekent deze stelling ook dat we de hoek tussen $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ moeten definiëren als 90° . De stelling van Pythagoras betekent derhalve dat orthonormale vectoren meetkundig gezien onderling loodrecht staan. Ook vanuit de hieronder te geven algemene algebraïsche definitie van de hoek tussen twee vectoren vanuit het inproduct zullen we tot de conclusie komen dat de hoek tussen $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ gelijk moet zijn aan 90° .

Om meer meetkundig inzicht te krijgen in het inwendig product $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ leggen we een *orthonormaal* assenstelsel (x, y) aan waarbij de x -as volgens de vector $\vec{a}$ is gericht.

De vector $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ is de eenheidsvector in de richting

van de vector $\vec{a}$. Door de keuze van de x -as geldt $\vec{e}_x = \vec{e}_a$ en we kiezen als basisvector van de y -as de nevenvector van $\vec{e}_a$, dus $\vec{e}_y = \vec{e}_a^*$.



Opmerking over de notatie

Als de x -as volgens de vector $\vec{a}$ gericht is zullen we vaak in plaats van de onderindex x de onderindex a kiezen en omgekeerd.

Bijvoorbeeld bij de vector $\vec{a}$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= |\vec{a}| \vec{e}_a \\ &= |\vec{a}| \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y\end{aligned}$$

en bij de ontbondenen van de vector $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{b} &= b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y \\ &= b_a \vec{e}_a + b_y \vec{e}_y\end{aligned}$$

In het bijzonder zullen we in dit geval voor het kental b_x van de vector $\vec{b}$ langs de x -as vaak de notatie b_a gebruiken.

De keuze van de x -as volgens de vector $\vec{a}$ leidt direct tot de zogenoemde projectiestelling van het inproduct. De meetkundige betekenis ervan wordt direct na de stelling besproken.

Projectiestelling

Voor het inproduct $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| b_a$$

We geven twee bewijzen, die in feite op hetzelfde neerkomen.

1^e bewijs:

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \langle |\vec{a}| \vec{e}_a, \vec{b} \rangle \\
 &= |\vec{a}| \langle \vec{e}_a, \vec{b} \rangle && \text{behoud schaling} \\
 &= |\vec{a}| b_a && \text{stelling kentallen van } \vec{b}
 \end{aligned}$$

□

2^e bewijs:

Volgens de laatste stelling uit de vorige paragraaf geldt

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= a_x b_x + a_y b_y \\
 &= |\vec{a}| b_a + 0 b_y = |\vec{a}| b_a
 \end{aligned}$$

□

Opmerkingen over de meetkundige betekenis van de projectiestelling

- 1) In een plat vlak wordt vanuit een punt P een loodlijn neergelaten op een lijn k . Het punt R op de lijn k is het zogenoemde voetpunt van deze loodlijn.

De afbeelding $P \xrightarrow{\mathcal{P}_k} R$ wordt de (loodrechte) projectie

van punt P op de lijn k genoemd.

We bekijken ook de loodrechte projectie $Q \xrightarrow{\mathcal{P}_k} S$ van

punt Q op de lijn k . Er ontstaat aldus een (loodrechte) projectie van de verplaatsingsvector $\overrightarrow{PQ}$ op de lijn k

$$\overrightarrow{PQ} \xrightarrow{\mathcal{P}_k} \overrightarrow{RS}$$

De vector $\overrightarrow{RS}$ heet de *geprojecteerde* van de vector $\overrightarrow{PQ}$ op de lijn k .

- 2) In $\vec{b} = b_a \vec{e}_a + b_y \vec{e}_y$ heet vector $b_a \vec{e}_a$ de (loodrechte) projectie van de vector $\vec{b}$ op de vector $\vec{a}$. Het kental b_a noemt men ook het *kental* van de

(loodrechte) projectie van de vector $\vec{b}$ op de vector $\vec{a}$.

Meetkundig kan men deze projectie $b_a \vec{e}_a$ langs de vector $\vec{a}$

verkrijgen door de staarten van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ aan

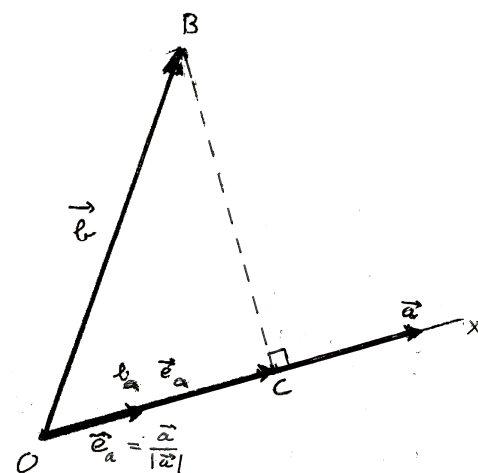
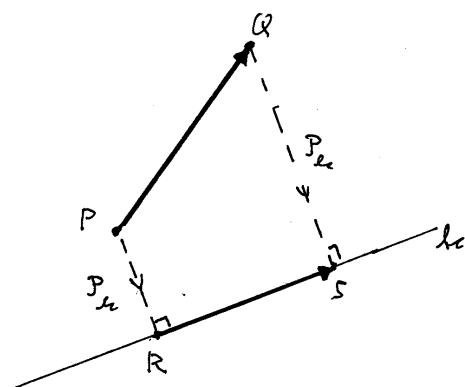
elkaar te leggen en vanuit de kop van de vector $\vec{b}$ een loodlijn neer te laten op de vector $\vec{a}$. Het resultaat is hier rechts getekend.

Niet alleen $b_a \vec{e}_a$ wordt loodrechte projectie van de vector

$\vec{b}$ op de vector $\vec{a}$ genoemd, ook het kental b_a noemt men

wel de loodrechte projectie van de vector $\vec{b}$ op de vector $\vec{a}$. Er geldt dat de lengte van de vector $b_a \vec{e}_a$ gelijk is aan de absolute waarde van het kental b_a , dus $|b_a \vec{e}_a| = |b_a|$.

In woorden is er volgens de projectiestelling gevonden:



$$\begin{pmatrix} \text{inproduct van} \\ \text{twee vectoren} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{lengthe van de} \\ \text{eerste vector} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{kental projectie van de tweede} \\ \text{vector langs de eerste vector} \end{pmatrix}$$

Hiermee is het *inproduct meetkundig geïnterpreteerd* in termen van *loodrechte projectie van de ene vector langs de andere*.

Voorbeeld

Gegeven: De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gevraagd: De kentallen van de projectie van de vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$ langs de vector $\vec{a}$

Oplossing

Er geldt $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 12 \cdot 12 + 5 \cdot 5 = 169 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = 13$

$$b_a = \langle \vec{e}_a, \vec{b} \rangle = \frac{1}{|\vec{a}|} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} (12 \cdot 4 + 5 \cdot 6) = 6$$

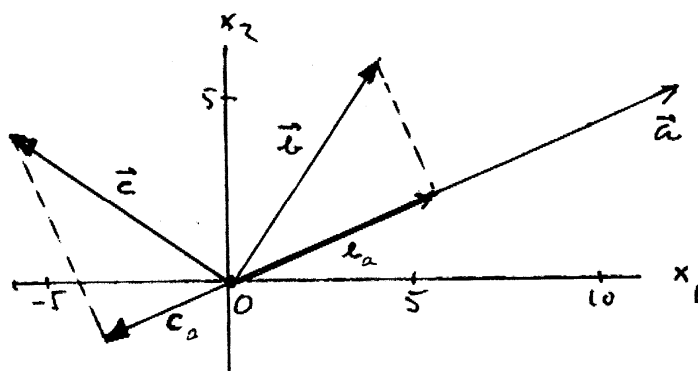
$$c_a = \langle \vec{e}_a, \vec{c} \rangle = \frac{1}{|\vec{a}|} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} (12 \cdot (-6) + 5 \cdot 4) = -4$$

Opmerking

Uit het voorbeeld blijkt:

Zijn de vector $\vec{a}$ en de projectie langs deze vector $\vec{a}$ *gelijk gericht*, zoals bij de projectie van de vector $\vec{b}$, dan is het *kental* van de *projectie positief*. Verder is dan de hoek tussen de vectoren *scherp*, d.w.z. $0^\circ \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$

Zijn de vector $\vec{a}$ en de projectie langs deze vector $\vec{a}$ *tegengesteld gericht*, zoals bij de projectie van de vector $\vec{c}$, dan is het *kental* van de *projectie negatief*. Bovendien is de hoek tussen de vectoren dan *stomp*, d.w.z. $90^\circ < \angle(\vec{a}, \vec{c}) \leq 180^\circ$



Opmerkingen over de ingesloten hoek in samenhang met de projectiestelling

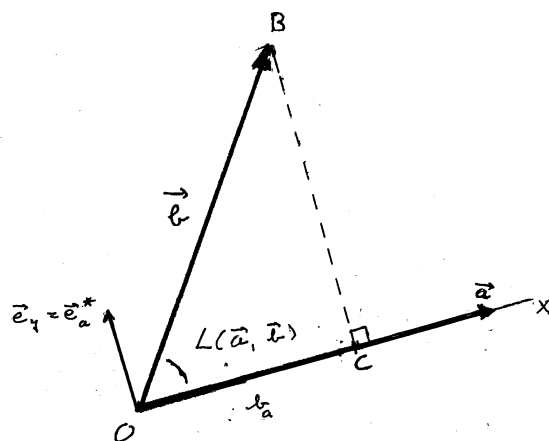
- 1) We bekijken het geval dat het kental b_a van de projectie van de vector $\vec{b} \neq \vec{0}$ op de vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ positief is, dus het geval dat $b_a > 0$.

In dat geval zijn de geprojecteerde vector $b_a \vec{e}_a$ en de vector $\vec{a}$ *gelijk gericht*.

Kiest men de x -as langs de vector $\vec{a}$ dan geldt

$\vec{OC} = b_a \vec{e}_x$, waarbij $b_a \vec{e}_a = b_x \vec{e}_x$. Volgens de

opmerking volgend na de stelling van Pythagoras voor een vector geldt dat ook in $\triangle OCB$ de stelling van Pythagoras van toepassing is: $OB^2 = OC^2 + CB^2$.



Dit betekent dat $\angle OCB = 90^\circ$ moet zijn en dat verder geldt

$$\cos \angle BOC = \frac{OC}{OB}$$

Nu is $\angle OCB$ de ingesloten hoek $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en geldt $OC = b_a$ en $OB = |\vec{b}|$. Gevolg

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{b_a}{|\vec{b}|} \Rightarrow b_a = |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

In woorden

$$\left(\begin{array}{l} \text{kental van de projectie van de} \\ \text{tweede vector op de eerste vector} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{lengte van de} \\ \text{tweede vector} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{cosinus van de} \\ \text{ingesloten hoek} \end{array} \right)$$

2) In combinatie met de projectiestelling $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| b_a$ levert dit

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

In woorden

$$\left(\begin{array}{l} \text{inproduct van} \\ \text{twee vectoren} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{lengte van de} \\ \text{eerste vector} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{lengte van de} \\ \text{tweede vector} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{cosinus van de} \\ \text{ingesloten hoek} \end{array} \right)$$

Het is juist dit resultaat dat betekent dat de volgende *algebraïsche definitie van de hoek tussen twee vectoren* in overeenstemming is met onze meetkundige inzichten. Zoals al eerder is gezegd vormt de rechtvaardiging van deze definitie het centrale doel van deze paragraaf.

Definitie van de hoek tussen twee vectoren

De hoek $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ tussen twee vectoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ en $\vec{b} \neq \vec{0}$ in $\mathbb{R}^2$ is een hoek $\geq 0^\circ$ en $\leq 180^\circ$ die wordt vastgelegd door de formule

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Opmerkingen

- 1) Deze definitie van de ingesloten hoek van twee vectoren gaat geheel uit van het inproduct omdat per definitie de norm van de resp. vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ volgens $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ en $|\vec{b}| = \sqrt{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}$ wordt gegeven door het inproduct.
- 2) In aanhangsel 2, over de definitie van cosinus en sinus, komt aan de orde dat ook voor een stompe hoek, dus als $90^\circ < \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$, de cosinus kan worden gedefinieerd. Deze blijkt dan negatief te zijn. Ook zal dit worden nader toegelicht na het volgende voorbeeld, waarin de hoek wordt berekend vanuit de cosinus met behulp van de rekenmachine.

Voorbeeld

Gegeven: de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ uit het voorgaande voorbeeld

Gevraagd: de hoeken $\angle(\vec{a}, \vec{b})$, $\angle(\vec{a}, \vec{c})$ en $\angle(\vec{b}, \vec{c})$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}}{13 \cdot \sqrt{52}} = \frac{78}{13 \cdot \sqrt{52}} \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 33,7^\circ \\ \cos \angle(\vec{a}, \vec{c}) &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}}{13 \cdot \sqrt{52}} = \frac{-52}{13 \cdot \sqrt{52}} \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{c}) = 123,7^\circ \\ \cos \angle(\vec{b}, \vec{c}) &= \frac{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{52}} = \frac{0}{52} = 0 \Rightarrow \angle(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ\end{aligned}$$

Opmerking

Volgens de opmerking na het voorbeeld, dat voorafgaat aan dit voorbeeld, geldt dat als de hoek $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ scherp is het kental van de projectie van de vector $\vec{b}$ langs de vector $\vec{a}$ positief moet zijn. Volgens de projectiestelling is het inproduct dan positief en dus is volgens de definitie van de hoek tussen twee vectoren de cosinus van deze scherpe hoek positief. Verder geldt volgens deze eerdere opmerking dat als de hoek $\angle(\vec{a}, \vec{c})$ stomp is het kental van de projectie van de vector $\vec{c}$ langs de vector $\vec{a}$ negatief moet zijn. Het inproduct is dan negatief volgens de projectiestelling en dus is volgens de definitie van de hoek tussen twee vectoren de cosinus van deze stompe hoek negatief.

Dit alles betekent dus dat de cosinus van een scherpe hoek positief is en de cosinus van een stompe hoek negatief moet zijn.

De rekenresultaten van het laatste voorbeeld bevestigen dit. Wanneer de cosinus positief is dan wel negatief komt nader in aanhangsel 2 aan de orde en meer uitgebreid bij de wiskunde B lessen.

Een direct gevolg van de algebraïsche definitie van de hoek tussen twee vectoren met behulp van het inproduct is:

Stelling

Twee vectoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ en $\vec{b} \neq \vec{0}$ in $\mathbb{R}^2$ staan dan en slechts dan onderling loodrecht als hun inproduct gelijk is aan nul. Dus

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Bewijs

We gebruiken $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, met $0^\circ \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

Dit levert voor de implicatie naar rechts ($\Rightarrow$):

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Rightarrow \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

en voor de implicatie naar links ($\Leftarrow$):

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Rightarrow \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

□

Opmerking

Volgens de vorige paragraaf zijn twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ orthogonaal als hun inproduct nul is. De hier gegeven definitie van de hoek tussen twee vectoren leidt dus tot het volgende:

Twee vectoren $\neq \vec{0}$ in $\mathbb{R}^2$ zijn dan en slechts dan orthogonaal als hun onderlinge hoek 90° is.

Ten slotte bewijzen we in de volgende stelling een formule waarbij de loodrechte projectie in $\mathbb{R}^2$ van een vector $\vec{b}$ op een lijn k door de oorsprong snel kan worden berekend. Ook deze stelling wordt een projectiestelling genoemd.

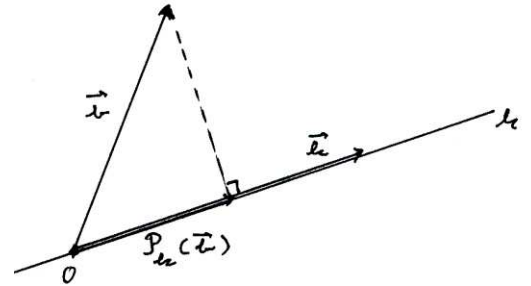
Het beeld van $\vec{b}$ bij deze projectie wordt genoteerd als $\mathcal{P}_k(\vec{b})$.

Deze geprojecteerde vector is gelijk aan $b_k \vec{e}_k$, waarbij

$\vec{e}_k = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ de eenheidsvector is in de richting van een vector $\vec{k}$

langs deze lijn k en $b_k = \langle \vec{e}_k, \vec{b} \rangle$ het kental van deze projectie.

Op zich is wat hier wordt gesteld voldoende om $\mathcal{P}_k(\vec{b})$ te berekenen, maar de volgende stelling, die met behulp van dit alles wordt bewezen, werkt eenvoudiger.



Tweede projectiestelling

Laat k een lijn in een vlak zijn door de oorsprong van een standaard assenstelsel en $\vec{k}$ een vector in $\mathbb{R}^2$ gericht volgens deze lijn.

Voor de loodrechte projectie in $\mathbb{R}^2$ van een vector $\vec{b}$ op deze lijn geldt

$$\mathcal{P}_k(\vec{b}) = \frac{\langle \vec{k}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle} \vec{k}$$

Bewijs

Voor de projectie van $\vec{b}$ langs de lijn k geldt $\mathcal{P}_k(\vec{b}) = b_k \vec{e}_k$, waarbij $\vec{e}_k = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ en $b_k = \langle \vec{e}_k, \vec{b} \rangle$

Substitutie van de uitdrukking voor b_k in de uitdrukking voor $\mathcal{P}_k(\vec{b})$ levert

$$\mathcal{P}_k(\vec{b}) = \langle \vec{e}_k, \vec{b} \rangle \vec{e}_k$$

Vervolgens levert de substitutie van de uitdrukking voor $\vec{e}_k$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(\vec{b}) &= \left\langle \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \vec{b} \right\rangle \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \\ &= \frac{\langle \vec{k}, \vec{b} \rangle}{|\vec{k}|^2} \vec{k} && \text{behoud schaling bij inproduct} \\ &= \frac{\langle \vec{k}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle} \vec{k} && \text{definitie norm volgens inproduct} \end{aligned}$$

□

Voorbeeld

Gegeven: De lijn $k: x_2 = 2x_1$

Gevraagd: Het beeld $\mathcal{P}_k(\vec{b})$ van de vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bij loodrechte projectie op de lijn k .

Oplossing: Maak zelf een tekening van de situatie.

$\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vector langs de lijn k omdat als $x_1 = 1$ dan is volgens de formule $x_2 = 2$.

Aldus

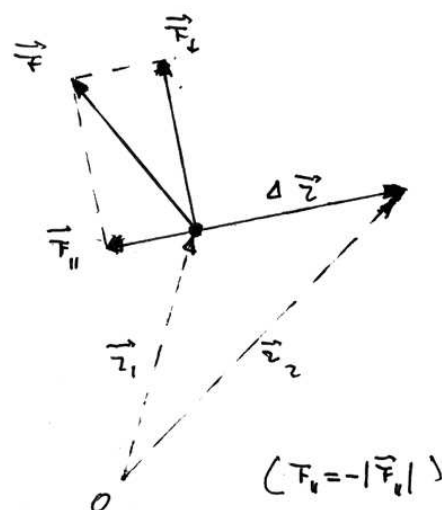
$$\mathcal{P}_k(\vec{b}) = \frac{\langle \vec{k}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle} \vec{k} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{1^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{22}{5} \end{pmatrix}$$

Aanhangsel 1: Opmerking over het inproduct in de natuurkunde

Een belangrijke toepassing van het inproduct in de natuurkunde vormt het begrip *arbeid van een kracht*. Een direct hiermee samenhangend begrip is het *vermogen van een kracht*.

Stel $\vec{F}$ is één van de krachten die op een puntdeeltje werkt. Stel verder dat het deeltje zich rechtlijnig verplaatst van een positie vastgelegd door de positievector $\vec{r}_1$ naar een positie vastgelegd door de positievector $\vec{r}_2$. De verplaatsingsvector van de eerdere positie naar de latere positie is dan $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Neem verder aan dat deze kracht $\vec{F}$ tijdens de verplaatsing van het deeltje constant is qua grootte en qua richting. Deze kracht op het deeltje wordt ontbonden naar een vector $\vec{F}_{\parallel}$ langs de verplaatsing en een vector $\vec{F}_{\perp}$ loodrecht op de verplaatsing. Er geldt dus $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$.



Verder wordt er een scalar $F_{\parallel}$ gedefinieerd, waarvoor geldt $F_{\parallel} = |\vec{F}_{\parallel}|$ als de kracht $\vec{F}_{\parallel}$ in de richting is van de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ en waarvoor geldt $F_{\parallel} = -|\vec{F}_{\parallel}|$ als de kracht $\vec{F}_{\parallel}$ tegengesteld gericht is aan de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$.

De *arbeid* W van de kracht $\vec{F}$ bij deze verplaatsing wordt gedefinieerd door

$$W = F_{\parallel} |\Delta\vec{r}|$$

De arbeid W is dus positief als de kracht $\vec{F}_{\parallel}$ en de verplaatsing $\Delta\vec{r}$ gelijk gericht zijn en deze arbeid is negatief als de kracht $\vec{F}_{\parallel}$ en de verplaatsing $\Delta\vec{r}$ tegengesteld gericht zijn.

In deze *definitie van de arbeid* herkennen we de *projectiestelling voor het inproduct van de krachtvector $\vec{F}$ op het deeltje met de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$* van het deeltje:

$$W = \langle \vec{F}, \Delta\vec{r} \rangle$$

Wiskundigen zullen vaak deze inproductformule nemen als definitie voor de arbeid van een kracht, terwijl in de natuurkunde de projectieformule $W = F_{\parallel} |\Delta\vec{r}|$ veelal de definitie is

waarvan wordt uitgegaan. Uiteindelijk maakt het niet uit welke definitie als uitgangspunt wordt gekozen.

Als er een orthonormaal assenstelsel (x, y) is aangelegd dan kunnen krachtvector en verplaatsingsvector uitgedrukt worden in kentallen ten opzichte van de bijbehorende basis

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y \quad \text{en} \quad \Delta \vec{r} = \Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y$$

en dan geldt voor de arbeid

$$W = F_x \Delta x + F_y \Delta y$$

Een met de arbeid van een kracht direct samenhangend begrip is het *vermogen* P van een kracht $\vec{F}$ op een puntdeeltje met snelheid $\vec{v}$. In termen van het inproduct is het vermogen

$$P = \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle$$

Als er een orthonormaal assenstelsel (x, y) is aangelegd

$$\text{dan} \quad \vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y \quad \text{en} \quad \vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$$

en dus

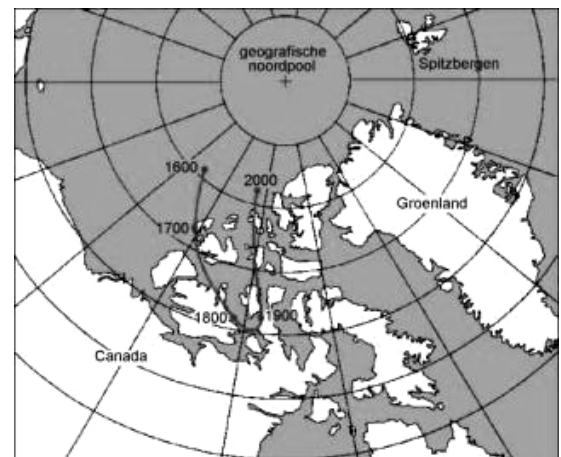
$$P = F_x v_x + F_y v_y$$

Aanhangsel 2: Definitie van cosinus en sinus met behulp van radiële lijnen

Op de kaart rechts, waarop de plaatsverandering van de magnetische Noordpool in de loop van de afgelopen 400 jaar staat aangegeven, zijn halve lijnen getekend die in feite moeten beginnen in de geografische Noordpool. Dergelijke halve lijnen heten *radiële lijnen* (“radieel” betekent “uitstralend vanuit een punt”).

We zullen aan de hand van dergelijke radiële lijnen de cosinus en de sinus definiëren voor andere hoeken als de positieve scherpe hoeken in een rechthoekige driehoek.

We beginnen met een wiskundige definitie van het begrip radiële lijn in een plat vlak. (Het gedeelte van de aarde in de figuur is nog min of meer vlak.)



Definitie

De halve rechte lijnen in een plat vlak die beginnen in een punt van dat vlak heten de *radiële lijnen* van dat punt. Het punt zelf heet het *centrum* van deze halve rechte lijnen.

Verder heet de afstand van een punt op een radiële lijn tot het centrum de *straal* of de *radius* van dat punt (met betrekking tot de radiële lijnen).

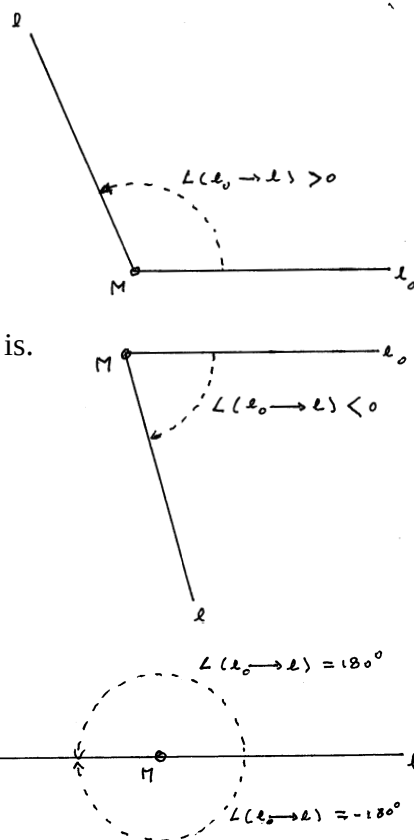
Opmerking

Punten op verschillende radiële lijnen, behorend bij één centrum, met dezelfde radius liggen op een cirkel met als middelpunt dat centrum.

Om de *richting* van een radiële lijn vast te leggen wordt gewerkt met de zogenoemde *richtinghoek*. Om deze hoek te kunnen definiëren kiezen we één van de radiële lijnen als *radiële nullijn*. (Op de kaart is de radiële lijn pal naar rechts de meridiaan van Greenwich, die de internationaal gebruikelijke radiële nullijn is.)

Definitie

Als l een radiële lijn is bij een centrum M en l_0 de gekozen radiële nullijn dan is de grootte van de *richtinghoek* van l , notatie $\angle(l_0 \rightarrow l)$, gelijk aan de kleinste hoek tussen l_0 en l . De richtinghoek is positief, dus $\angle(l_0 \rightarrow l) > 0$, als de draaiing om M over deze hoek van l_0 naar l positief is. De richtinghoek is negatief, dus $\angle(l_0 \rightarrow l) < 0$, als de draaiing om M over deze hoek van l_0 naar l negatief is.



Opmerkingen

- Is de radiële lijn l tegengesteld gericht aan de radiële nullijn l_0 dan zijn er twee richtinghoeken mogelijk en wel $\angle(l_0 \rightarrow l) = 180^\circ$ en $\angle(l_0 \rightarrow l) = -180^\circ$. De hoeken heten dan *gestrekt*. Buiten dit is er niet meer dan één richtinghoek per radiële lijn.
- De richtinghoek van een radiële lijn kan de waarden aannemen van -180° tot en met 180° . De richtinghoek heet *scherp* als de grootte ervan tussen 0° en 90° ligt, dus als $0^\circ < \angle(l_0 \rightarrow l) < 90^\circ$ of als $-90^\circ < \angle(l_0 \rightarrow l) < 0^\circ$. De richtinghoek heet *stomp* als de grootte ervan tussen 90° en 180° ligt, dus als $90^\circ < \angle(l_0 \rightarrow l) < 180^\circ$ of als $-180^\circ < \angle(l_0 \rightarrow l) < -90^\circ$. Verder heet de richtinghoek *recht* als $\angle(l_0 \rightarrow l) = 90^\circ$ of als $\angle(l_0 \rightarrow l) = -90^\circ$.
- Iedere keer als er over 360° wordt gedraaid om het centrum in positieve of negatieve richting komen we weer op dezelfde radiële lijn uit. Telt men bij de richtinghoek nul of meer keren 360° op, of trekt men één of meer keren 360° af, dan ontstaat een zogenoemde *draaihoek*. In de wiskunde B wordt hiermee gewerkt, maar binnen het kader van dit hoofdstuk over vectoren maken we geen gebruik van deze hoeken.

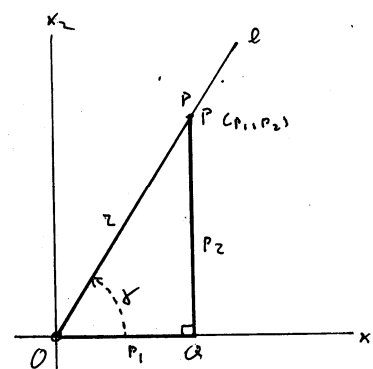
In het vervolg laten we de *centrum* van de poollijnen samenvallen met de *oorsprong* van het standaard assenstelsel en als *radiële nullijn* kiezen we de *positieve* x_1 -as.

Voor een radiële lijn binnen het *eerste kwadrant* levert dit een figuur als hier rechts. De radiële lijn l heeft een positieve scherpe richtinghoek γ en het punt P op de radiële lijn poollijn heeft positieve coördinaten (p_1, p_2) en de radius r (waarbij dus geldt $r = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$).

Volgens de definitie van cosinus en sinus in een rechthoekige driehoek

$$\text{geldt} \quad \cos \gamma = \frac{OQ}{OP} = \frac{p_1}{r}$$

$$\text{en} \quad \sin \gamma = \frac{QP}{OP} = \frac{p_2}{r}$$



Hiermee zijn cosinus en sinus van de richtinghoek uitgedrukt in de standaard coördinaten van een punt op de radiële lijn en de radius van dat punt. Dit resultaat wordt gebruikt om ook de cosinus en de sinus te definiëren voor de richtinghoeken van radiële lijnen buiten het eerste kwadrant.

Definitie

De *cosinus* en de *sinus* van een *richtinghoek* behorend bij een radiële lijn worden gedefinieerd met behulp van een punt op die radiële lijn.

$$\cos(\text{richtinghoek}) = \frac{\text{eerste coördinaat punt op radiële lijn}}{\text{radius van dat punt}}$$

$$\sin(\text{richtinghoek}) = \frac{\text{tweede coördinaat punt op radiële lijn}}{\text{radius van dat punt}}$$

Voorbeeld en opmerking

- 1) Rechts is een radiële lijn in het vierde kwadrant getekend. De richtinghoek γ is hier scherp en negatief. In dit

kwadrant is $\cos \gamma = \frac{p_1}{r}$ positief, omdat voor de eerste

coördinaat van punt P geldt $p_1 > 0$. Voor de tweede

coördinaat van punt P geldt in dit kwadrant $p_2 < 0$ en

dus is $\sin \gamma = \frac{p_2}{r}$ negatief. Vergelijkbare beschouwingen

- 2) Het punt op een radiële lijn met *radius* 1 zal een centrale rol gaan spelen bij onze beschouwingen over de vector als verplaatsing in een vlak en de vector als een grootte die tevens een richting heeft. (Zie §I.8.)

In de laatste figuur is $E(u_1, u_2)$ zo'n punt, waarvoor dus geldt $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$.

Er geldt nu $\cos \gamma = u_1$

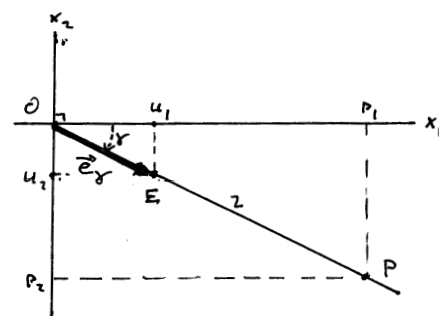
$$\sin \gamma = u_2$$

De positievector $\overrightarrow{OE}$ heet de *eenheidsvector* behorend bij de richtinghoek γ , die wordt genoteerd als $\vec{e}_\gamma$.

Uit $\vec{e}_\gamma = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ en de formules voor sinus en cosinus volgt

$$\vec{e}_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}$$

Het is deze *formule voor de eenheidsvector behorend bij een richtinghoek γ* die gebruikt zal worden bij de beschouwingen over het verband tussen vector als verplaatsing en vector als grootte met richting. (Zie §I.8.)



Opgaven

I.6.1 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Maak een tekening van de situatie
- Bereken de ingesloten hoek van deze vectoren in graden nauwkeurig met behulp van het inproduct van deze vectoren.
- Bereken het kental van de projectie van de vector $\vec{b}$ op de vector $\vec{a}$ met behulp van dit inproduct.

I.6.2 Gegeven zijn de lijnen $k: x_2 = -\frac{1}{2}x_1$ en $m: x_2 = 3x_1$

- Geef een vector $\vec{k}$ gericht volgens de lijn k en een vector $\vec{m}$ gericht volgens de lijn m .
- Bereken met behulp van het inproduct van de vectoren $\vec{k}$ en $\vec{m}$ de hoek tussen de lijnen k en m .

I.6.3 Gegeven de lijnen $k: x_2 = -x_1$ en $m: x_2 = \sqrt{3} \cdot x_1$

- De lijn k maakt een hoek van -45° met de positieve x_1 -as van het standaard assenstelsel. Leg dit uit aan de hand van een figuur
- Waarom is de vector $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ gericht langs de lijn m ? Bereken de lengte van deze vector. Teken vervolgens deze vector in een standaard assenstelsel. Verklaar met behulp van deze figuur waarom de lijn m een hoek van 60° maakt met de positieve x_1 -as.
- Wat is daarom de hoek tussen de lijnen k en m ?
- Bereken de hoek tussen de lijnen k en m net als in opgave I.6.2.

I.6.4 Vat de hoofdzaak van deze en de vorige paragraaf samen door op te schrijven:

- De definitie van het inproduct
- De definitie van de norm van een vector vanuit het inproduct
- De eerste projectiestelling en de betekenis ervan in woorden
- De definitie van de hoek tussen twee vectoren
- De tweede projectiestelling

I.6.5 Uit de commutativiteit van het inproduct $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ en de projectiestellingen $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}|b_a$ en $\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = |\vec{b}|a_b$ volgt

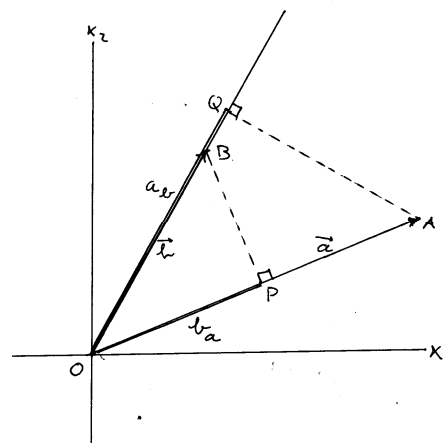
$$|\vec{a}|b_a = |\vec{b}|a_b$$

Dit laatste valt ook met behulp van gelijkvormigheid in te zien met behulp van de figuur hiernaast, waarin de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in het eerste kwadrant liggen

- Bewijs dat de driehoeken $\triangle OBP$ en $\triangle OAQ$ gelijkvormig zijn:

$$\triangle OBP \sim \triangle OAQ$$

- Bewijs dat uit deze gelijkvormigheid volgt $\frac{b_a}{a_b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ en dat uit deze formule de bovenstaande formule volgt



I.6.6 Gegeven de lijn $k: x_2 = -\frac{4}{3}x_1$ en de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Maak een tekening van de situatie en teken ook de projectievector $\mathcal{P}_k(\vec{a})$ van de vector $\vec{a}$ langs de lijn k .

- b) Bereken de kentallen van de projectievector $\mathcal{P}_k(\vec{a})$ van de vector $\vec{a}$ langs de lijn k .

I.6.7 Gegeven een richtinghoek $\kappa = 30^\circ$, een vector $\vec{b}$ met lengte $|\vec{b}| = 4$ en richtingshoek $\beta = 60^\circ$ en een vector $\vec{c}$ met lengte $|\vec{c}| = 4$ en richtingshoek $\gamma = 150^\circ$.

- Maak een figuur van de situatie, met ook een lijn k die een hoek $\kappa = 30^\circ$ met de x_1 -as maakt
- Teken ook $\mathcal{P}_k(\vec{b})$ en $\mathcal{P}_k(\vec{c})$ in de figuur.
- Geef de exacte kentallen van de vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$ ten opzichte van de standaard basis. Geef ook de exacte kentallen van een vector $\vec{k}$ die gericht is langs de lijn k .
Aanwijzing: Teken afzonderlijk voor elk van deze vectoren een rechthoekige driehoek met 30° en 60° in een standaard assenstelsel.
- Bereken de exacte kentallen van $\mathcal{P}_k(\vec{b})$ en $\mathcal{P}_k(\vec{c})$ met behulp van de tweede projectiestelling.
- Hoe blijkt uit de antwoorden bij d) dat de lijn k een hoek van $\kappa = 30^\circ$ met de x_1 -as maakt?

I.6.8 Met het inproduct zijn hoeken en lengtes van in driehoeken snel te berekenen en veel eigenschappen van driehoeken zijn met het inproduct snel af te leiden. Deze opgave vormt hiervan een eerste voorbeeld.

Gegeven: de driehoek $\triangle OBC$.

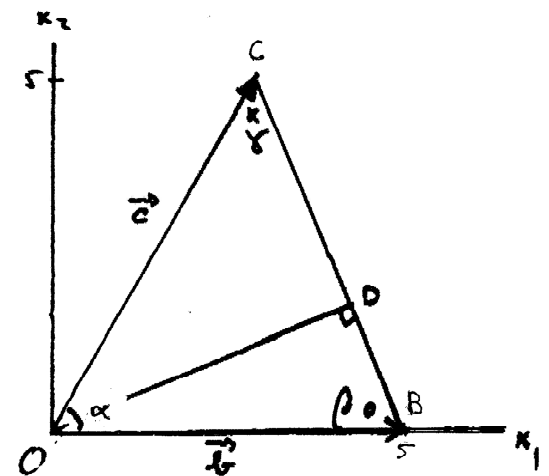
De vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ is de positievector van het punt B

en de vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ is de positievector van het punt

C . Verder is OD een hoogtelijn in deze driehoek

- Geef de kentallen van de vector $\overrightarrow{CB}$ en bereken de lengte van de zijde BC .
- Bereken ook de lengte van de zijde OC en de lengte van de zijde OB .
- Bereken met behulp van het inproduct van $\overrightarrow{CO}$ en $\overrightarrow{CB}$ in graden nauwkeurig de hoek γ in de driehoek.
- Bereken ook met behulp van het inproduct in graden nauwkeurig de hoeken α , β in de driehoek
- Leg uit waarom $\overrightarrow{DB}$ de projectie is van de vector $\vec{b}$ op de zijde BC . (Teken een figuur waarin de vector $\vec{b}$ met zijn staart naar het punt D is verplaatst.)
- Bereken exact de vector $\overrightarrow{DB} = \mathcal{P}_{BC}(\vec{b})$ met behulp van de tweede projectiestelling
- Volgens de kop-staart methode geldt voor de vector $\overrightarrow{OD}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \vec{b} - \mathcal{P}_{BC}(\vec{b})\end{aligned}$$



Bereken hiermee exact de lengte van de hoogtelijn OD .

- h) E is een punt op de lijn OC zodanig dat BE hoogtelijn is in $\triangle OBC$. Bereken analoog e) en f) met behulp van de vector $\mathcal{P}_{OC}(\vec{b})$ de lengte van deze hoogtelijn.

I.6.9 $\mathcal{P}_a(\vec{b})$ is de loodrechte projectie van de vector $\vec{b}$ langs de vector $\vec{a}$.

- a) Maak een figuur van de situatie. Leg uit dat de vectoren $\vec{b}$ en $\mathcal{P}_a(\vec{b})$ hetzelfde kental b_a van loodrechte projectie op de vector $\vec{a}$ hebben
- b) Leg aan de hand van de eerste projectiestelling uit dat moet gelden:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \mathcal{P}_a(\vec{b}) \rangle$$

- c) Ook behulp van de tweede projectiestelling valt dit te bewijzen. Volgens deze stelling geldt

$$\mathcal{P}_a(\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a}$$

en dus

$$\langle \vec{a}, \mathcal{P}_a(\vec{b}) \rangle = \langle \vec{a}, \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a} \rangle$$

Maak het bewijs af door bij het rechterlid de scalar $\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ buiten de haken van het inproduct te plaatsen (behoud schaling).

I.7 Het Grassmann product en de determinant van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$

Naast het inproduct waarmee lengtes en hoeken worden berekend is er in de lineaire algebra een centrale rol weggelegd voor de zogenoemde *Grassmann product* van vectoren. Nauw met dit product samenhangend is de *determinant*.

In $\mathbb{R}^2$ kan met dit Grassmann product, en ook met de determinant, de oppervlakte worden berekend van het parallellogram opgespannen door twee vectoren en tevens de georiënteerde hoek tussen deze vectoren. Ook legt dit product, en daarmee de determinant, van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ vast of deze vectoren al of niet een onafhankelijk stelsel vormen.

We beginnen deze paragraaf met de algebraïsche definitie van het Grassmann product in $\mathbb{R}^2$, vervolgens bewijzen we de algemene eigenschappen van dit Grassmann product, daarna gaan we in op het meetkundige verband tussen dit product en de oppervlakte opgespannen door twee vectoren. Ook bespreken we het verband tussen de Grassmann product en de sinus van de georiënteerde hoek tussen twee vectoren. Ten slotte definiëren we de determinant en geven we het verband daarvan met het Grassmann product.

In §I.9 zal het verband tussen determinant en afhankelijkheid van vectoren aan de orde komen.

Definitie

In $\mathbb{R}^2$ is het *Grassmann product* van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, notatie $D(\vec{a}, \vec{b})$, het inproduct van de nevenvector van $\vec{a}$ met de vector $\vec{b}$:

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle$$

Opmerking

In $\mathbb{R}^3$ wordt het Grassmann product voor een drietal vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ gedefinieerd en genoteerd als $D(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

In $\mathbb{R}^n$ wordt het Grassmann product voor een n -tal vectoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ gedefinieerd en genoteerd als $D(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$.

Verder zijn deze Grassmann producten een bijzonder geval van de zogenoemde Grassmann algebra.

Het valt helaas ver buiten het bestek van deze tekst om hierop in te gaan.

De algemene algebraïsche eigenschappen van het Grassmann product van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ lijken sterk op die van het inproduct van twee vectoren, op de *anticommutativiteit* na.

Stelling

Voor alle vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^2$ en voor iedere scalar λ geldt voor de determinant

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = -D(\vec{b}, \vec{a}) \quad \text{anticommutativiteit}$$

$$D(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = D(\vec{a}, \vec{b}) + D(\vec{a}, \vec{c}) \quad \text{behoud optelling}$$

$$D(\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda D(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{behoud schaling}$$

Bewijs

Om de *anticommutativiteit* te bewijzen drukken we het Grassmann product uit in de kentallen van de vectoren.

Laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ dan

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -a_2 b_1 + a_1 b_2$$

en analoog $D(\vec{b}, \vec{a}) = -b_2 a_1 + b_1 a_2$

Omdat $-a_2 b_1 + a_1 b_2 = -(-b_2 a_1 + b_1 a_2)$ volgt hieruit de anticommutativiteit

Uit de *lineariteit* van het inproduct volgt

$$D(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \langle \vec{a}^*, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{c} \rangle = D(\vec{a}, \vec{b}) + D(\vec{a}, \vec{c}) \quad \text{behoud optelling}$$

$$D(\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \langle \vec{a}^*, \lambda \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = \lambda D(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{behoud schaling}$$

□

Opmerkingen

- 1) Het Grassmann product in $\mathbb{R}^2$ is ook lineair naar de eerste vector vanwege de anticommutativiteit

$$D(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = -D(\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}) = -(D(\vec{c}, \vec{a}) + D(\vec{c}, \vec{b})) = -D(\vec{c}, \vec{a}) - D(\vec{c}, \vec{b}) = D(\vec{a}, \vec{c}) + D(\vec{b}, \vec{c})$$

$$D(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = -D(\vec{b}, \lambda \vec{a}) = -(\lambda \cdot D(\vec{b}, \vec{a})) = \lambda \cdot (-D(\vec{b}, \vec{a})) = \lambda D(\vec{a}, \vec{b})$$

Dus ook de Grassmann product in $\mathbb{R}^2$ is een *bilineaire vorm*.

- 2) Een direct gevolg de anticommutativiteit is dat het Grassmann product van een vector $\vec{a}$ met zichzelf is gelijk nul.

Verwisseling levert voor dit geval

$$D(\vec{a}, \vec{a}) = -D(\vec{a}, \vec{a}) \Rightarrow D(\vec{a}, \vec{a}) + D(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Rightarrow D(\vec{a}, \vec{a}) = 0$$

De definitie van het Grassmann product leidt rechtstreeks tot dit resultaat (zie opgave I.7.5), maar het is van belang om in te zien dat zodra er anticommutativiteit bestaat bij een bilineair product van twee grootheden dit altijd betekent dat het product van een grootheid met zichzelf gelijk moet zijn aan nul.

- 3) De nuleigenschap van het inproduct, $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$, is daarom niet mogelijk bij anticommutativiteit omdat ook voor vectoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ geldt $D(\vec{a}, \vec{a}) = 0$. Zoals we echter gezien hebben is het inproduct niet anticommutatief, maar commutatief.
- 4) Zoals in het aanhangsel 1 van deze paragraaf zal worden aangetoond hangt de nog te definiëren determinant direct samen met deze algemene eigenschappen van anticommutativiteit en bilineariteit.

We gaan nu in op de *meetkundige betekenis van het Grassmann product* in $\mathbb{R}^2$ als *oppervlakte*. Dit zal worden bewezen met behulp van de meetkundige eerste projectiestelling voor het inproduct. We definiëren hiertoe eerst het meetkundige begrip *parallellogram* opgespannen door twee vectoren.

Definitie

Laat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ zijn. Leg de staarten van deze vectoren tegen elkaar en teken door de kop van $\vec{a}$ een lijn evenwijdig aan $\vec{b}$ en teken door de kop van $\vec{b}$ een lijn evenwijdig

aan $\vec{a}$. Aldus ontstaat het *parallelogram opgespannen door de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$* . De oppervlakte van dit *parallelogram* wordt genoteerd als $O(\vec{a}, \vec{b})$

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ is de oppervlakte $O(\vec{a}, \vec{b})$ van het *parallelogram opgespannen door twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$* gelijk aan het Grassmann product van de vector $\vec{a}$ met de vector $\vec{b}$, op het teken na. Er geldt bij positieve oriëntatie van de vector $\vec{a}$ naar vector $\vec{b}$, dus als $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) > 0$:

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = +O(\vec{a}, \vec{b})$$

Er geldt bij negatieve oriëntatie van de vector $\vec{a}$ naar vector $\vec{b}$, dus als $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) < 0$:

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = -O(\vec{a}, \vec{b})$$

Het teken van het Grassmann product en het teken van de oriëntatie zijn dus hetzelfde.

Bewijs

We leggen een orthonormaal assenstelsel (x, y) waarbij de x -as volgens de vector $\vec{a}$ is gericht en de y -as volgens de nevenvector van $\vec{a}$.

De vector $\vec{e}_x = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ is de eenheidsvector in de richting van de

vector $\vec{a}$, dus volgens de x -as, en de nevenvector $\vec{e}_y = \vec{e}_x^*$ is gericht volgens de y -as.

De vector $\vec{b}$ wordt nu ontbonden langs dit assenstelsel volgens

$$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$$

Nu is $b_y \vec{e}_y$ de projectie van de vector $\vec{b}$ op $\vec{a}^*$ en volgens de

projectiestelling voor het inproduct betekent dit $D(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = |\vec{a}^*| b_y$. Omdat ook geldt

$|\vec{a}^*| = |\vec{a}|$ leidt dit tot

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| b_y$$

Het is dit resultaat van projectie dat tot de stelling leidt.

In de eerste figuur geldt $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) > 0$ en ook $b_y > 0$. Verder is de basis $OA = |\vec{a}|$ van het *parallelogram OACB* en $DB = b_y$ de hoogte ten opzichte van deze basis. Dit betekent daarom voor de oppervlakte van het *parallelogram*

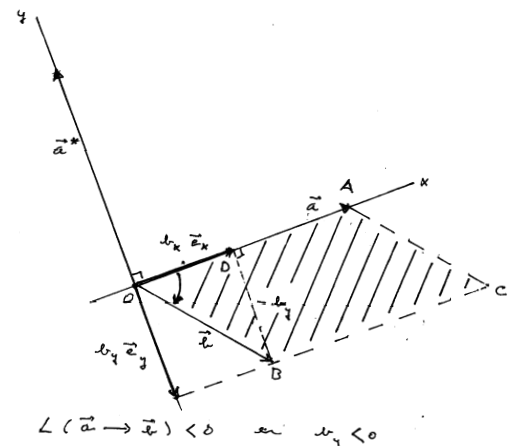
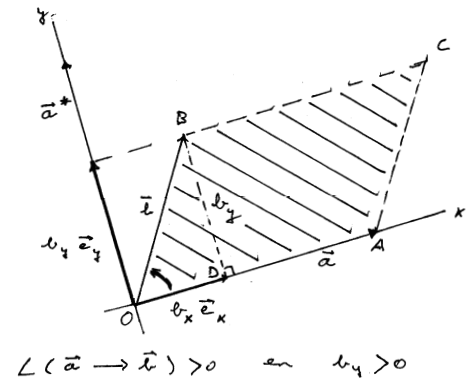
$$O(\vec{a}, \vec{b}) = O(OACB) = OA \cdot DB = |\vec{a}| b_y = D(\vec{a}, \vec{b})$$

In de tweede figuur geldt $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) < 0$ en ook $b_y < 0$.

Opnieuw is de basis $OA = |\vec{a}|$, maar voor de hoogte geldt

$DB = -b_y$. Met als resultaat

$$O(\vec{a}, \vec{b}) = O(OACB) = OA \cdot DB = |\vec{a}| (-b_y) = -D(\vec{a}, \vec{b})$$



□

Voorbeeld

Gegeven: De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix}$

- Gevraagd: a) De oppervlakte $O(\vec{a}, \vec{b})$ van het parallellogram opgespannen door de twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$
b) De oppervlakte $O(\vec{a}, \vec{c})$ van het parallellogram opgespannen door de twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{c}$
c) De oppervlakte $O(\vec{b}, \vec{c})$ van het parallellogram opgespannen door de twee vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$

Oplossing

$$\text{a)} \quad D(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -5 \cdot 4 + 12 \cdot 6 = 52$$

$$\text{Dus} \quad O(\vec{a}, \vec{b}) = 52$$

$$\text{b)} \quad D(\vec{a}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix} = (-5) \cdot (-8) + 12 \cdot (-12) = -104$$

$$\text{Dus} \quad O(\vec{a}, \vec{c}) = 104$$

$$\text{c)} \quad D(\vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix} = (-6) \cdot (-8) + 4 \cdot (-12) = 0$$

$$\text{Dus} \quad O(\vec{b}, \vec{c}) = 0$$

Opmerking

In het geval c) van het voorbeeld geldt $\vec{c} = -2\vec{b}$. De vectoren liggen dus langs dezelfde lijn. In zo'n geval is de oppervlakte van het parallellogram dat de vectoren opspannen gelijk aan 0. Als twee vectoren langs dezelfde lijn liggen dan vormen beide een afhankelijk stelsel. Volgens §1.9 geldt dit laatste alleen dan als het Grassmann product van de twee vectoren nul is. De berekening hier bevestigt dit.

De volgende stelling geeft aan dat evenals het bij inproduct van twee vectoren ook bij het Grassman product $\mathbb{R}^2$ er een verband bestaat tussen de hoek tussen twee vectoren en dit product.

Stelling

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ zijn dan geldt voor het verband tussen de

determinant en de georiënteerde hoek $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b})$

$$\sin \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = \frac{D(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Bewijs

We bekijken het geval $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) > 0$.

Net als in het voorafgaande bewijs leggen we een orthonormaal assenstelsel (x, y) waarbij de x -as volgens de vector $\vec{a}$ is gericht en de y -as volgens de nevenvector van $\vec{a}$.

Uit de figuur rechts blijkt

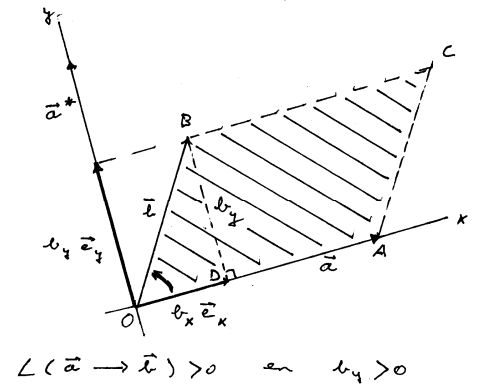
$$\sin \angle DOB = \frac{DB}{OB}$$

dus
$$\sin \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = \frac{b_y}{|\vec{b}|}$$

Vermenigvuldigen van teller en noemer met $|\vec{a}|$ levert

$$\sin \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = \frac{|\vec{a}| b_y}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{D(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

□



Voorbeeld

Gegeven: De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ uit het vorige voorbeeld

Gevraagd: $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b})$ in graden nauwkeurig.

Oplossing:

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13, \quad |\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

en
$$\sin \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = \frac{D(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}}{13 \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{(-5) \cdot 4 + 12 \cdot 6}{26\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Gevolg
$$\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = 34^\circ \quad (\text{rekenmachine})$$

Opmerkingen

- 1) In de vorige paragraaf kwam naar voren dat volgens $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ de cosinus

zowel positief kan zijn als negatief. Het bleek dat de cosinus van een scherpe hoek positief is en de cosinus van een stompe hoek negatief.

Volgens $\sin \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = \frac{D(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ kan ook de sinus zowel positief zijn als negatief,

want $D(\vec{a}, \vec{b})$ kan zowel positief zijn als negatief.

Uit de stelling over het verband tussen het Grassmann product en de oppervlakte opgespannen door twee vectoren volgt:

Als $D(\vec{a}, \vec{b}) > 0$ dan is $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) > 0$ en als $D(\vec{a}, \vec{b}) < 0$ dan is $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) < 0$.

Ook geldt dat $-180^\circ \leq \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) \leq 180^\circ$.

Kennelijk geldt hierbij dat als de sinus positief is dan is de hoek positief en als de sinus negatief dan is de hoek negatief.

Dit is in overeenstemming met de definities voor cosinus en sinus zoals die zijn gegeven in aanhangsel 2 van de vorige paragraaf.

- 2) Bij bovenstaand rekenvoorbeeld is er een belangrijke zaak buiten beschouwing gelaten. De vergelijking $\sin \gamma = \frac{2}{\sqrt{13}}$ heeft *niet één positieve oplossing* tussen -180° en 180° , *maar twee!*

Er is niet alleen de oplossing $\gamma = \sin^{-1}(\frac{2}{\sqrt{13}}) = 34^\circ$ van de rekenmachine, maar ook de

oplossing $\gamma = 180^\circ - \sin^{-1}(\frac{2}{\sqrt{13}}) = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$.

(Ga zelf op de rekenmachine na dat $\sin 34^\circ$ en $\sin 146^\circ$ hetzelfde opleveren.)

De rekenmachine blijkt voor de vergelijking $\sin \gamma = q$ alleen de oplossing voor γ te geven met een scherpe hoek of een rechte hoek. Voor positieve q is deze oplossing positief, voor negatieve q is deze oplossing negatief.

De tweede oplossing van de vergelijking, die van de stompe hoek, wordt gevonden door de oplossing met de rekenmachine af te trekken van 180° bij positieve hoek en van -180° bij negatieve hoek.

Dit wordt bewezen in aanhangsel 2 van deze paragraaf

- 3) De rekenmachine levert voor de vergelijking voor de cosinus, dus voor $\cos \gamma = p$, alleen positieve hoeken of hoek nul als oplossing. Voegen we een min-teken toe aan een positieve oplossing volgens rekenmachine dan krijgen we de tweede oplossing, en wel die met de negatieve hoek.

Het volgende schema geeft een overzicht voor de oplossing met de rekenmachine en hoe met behulp hiervan de tweede deze oplossing kan worden gevonden. Hierbij geldt dat $-180^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$.

(De mogelijke waarden -1, 0 en 1 voor p en voor q zijn hierbij buiten beschouwing gelaten; die leveren de rechte hoek, de hoek nul en de gestrekte hoek.)

Vergelijking	Waarden	Oplossing rekenmachine		Tweede oplossing	
$\cos \gamma = p$	$0 < p < 1$ positief	$\gamma = \cos^{-1} p$	$0^\circ < \gamma < 90^\circ$ scherp/positief	$\gamma = -\cos^{-1} p$	$-90^\circ < \gamma < 0^\circ$ scherp/negatief
	$-1 < p < 0$ negatief		$90^\circ < \gamma < 180^\circ$ stomp/positief		$-180^\circ < \gamma < 90^\circ$ stomp/negatief
$\sin \gamma = q$	$0 < q < 1$ positief	$\gamma = \sin^{-1} q$	$0^\circ < \gamma < 90^\circ$ scherp/positief	$\gamma = 180^\circ - \sin^{-1} q$	$90^\circ < \gamma < 180^\circ$ stomp/positief
	$-1 < q < 0$ negatief		$-90^\circ < \gamma < 0^\circ$ scherp/negatief	$\gamma = -180^\circ - \sin^{-1} q$	$-180^\circ < \gamma < 90^\circ$ stomp/negatief

Het bewijs van het bestaan van de tweede oplossing, zoals zou gelden volgens dit schema, wordt gegeven in aanhangsel 2 van deze paragraaf.

Voorbeeld

Gegeven: De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix}$

Gevraagd: $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{c})$ in graden nauwkeurig met behulp van de formule voor de sinus..

Oplossing:

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13, \quad |\vec{c}| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2} = 4\sqrt{13}$$

En

$$\begin{aligned} \sin \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{c}) &= \frac{D(\vec{a}, \vec{c})}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix}}{13 \cdot 4\sqrt{13}} \\ &= \frac{(-5)(-8) + 12(-12)}{52\sqrt{13}} = \frac{-2}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Gevolg

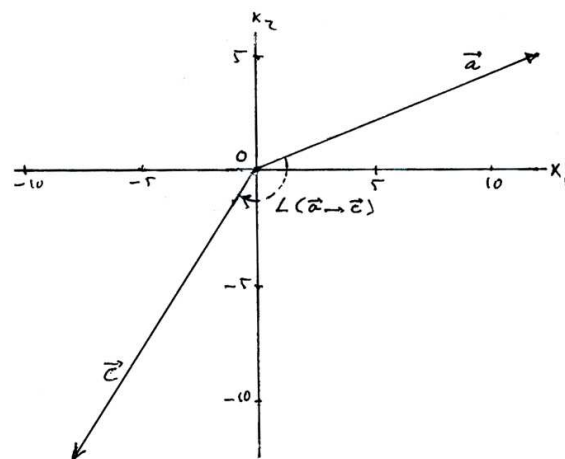
$$\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{c}) = -34^\circ$$

rekenmachine

of

$$\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{c}) = -180^\circ - (-34^\circ) = -146^\circ$$

tweede mogelijkheid



Uit de figuur blijkt dat de tweede mogelijkheid, met de stompe hoek, de oplossing is.

Opmerking

Zouden we zijn uitgegaan van $\cos \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|}$ om $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{c})$ te berekenen dan levert de

rekenmachine $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 146^\circ$ (zie opgave I.8.1).

De rekenmachine levert met de cosinus altijd direct of de hoek tussen twee vectoren nul, scherp, recht, stomp of gestrekt is, maar niet het teken van de georiënteerde hoek. Omdat $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{c}) = \pm \angle(\vec{a}, \vec{c})$ kan zowel gelden $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{c}) = 146^\circ$ als $\angle(\vec{a} \rightarrow \vec{c}) = -146^\circ$. Ook hier geeft een figuur uitsluitsel over de goede oplossing.

Ter afsluiting van deze paragraaf de definitie van de determinant

Definitie

In $\mathbb{R}^2$ wordt de *determinant* van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, notatie $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, gegeven

door het getal

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Opmerking

Er is hier sprake van *kruislings vermenigvuldigen*: Van linksboven naar rechtsonder, dus van a_1 naar b_2 met een + teken; van rechtsonder naar linksboven met een - teken. Vervolgens wordt er opgeteld.

Stelling

Het Grassmann product in $\mathbb{R}^2$ van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ met de vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is gelijk aan de determinant van deze vectoren

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Bewijs

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -a_2 b_1 + a_1 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

□

Opmerkingen

- 1) De stellingen in deze paragraaf kunnen ook in termen van de determinant worden geformuleerd. Zo geldt in $\mathbb{R}^2$ voor de sinus van de georiënteerde hoek van de vector

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ naar de vector } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\sin \angle(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

- 2) Hier is het bewijs van het verband tussen determinant en Grassman product geleverd vanuit de definities van beide grootheden.
In §III.4 over de zogenoemde lineaire transformaties en determinanten wordt uitgegaan van de algemene algebraïsche eigenschappen van het Grassmann product om een verband met de determinant te vinden. Dit wordt ook gedaan in het aanhangsel van deze paragraaf.
- 3) Vanwege de gelijkheid in $\mathbb{R}^2$ van Grassman product en determinant zullen we regelmatig ook voor het Grassmann product de benaming determinant gebruiken.

Aanhangsel 1: De determinant via de algemene algebraïsche eigenschappen van de Grassmann product

Bij het bewijs van de volgende stelling zal blijken dat de anticommutativiteit en het bilineair zijn van het Grassmann product voldoende zijn om de determinant op te leveren.

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ geldt voor het verband van het Grassmann product van de vectoren $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ en $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$ met het Grassmann product van vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ van de standaardbasis

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot D(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

Bewijs

$$\begin{aligned}
 D(\vec{a}, \vec{b}) &= D(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) \\
 &= D(a_1\vec{e}_1, b_1\vec{e}_1) + D(a_1\vec{e}_1, b_2\vec{e}_2) + D(a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1) + D(a_2\vec{e}_2, b_2\vec{e}_2) \quad \text{behoud optelling} \\
 &= a_1b_1D(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_1b_2D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_2b_1D(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_2b_2D(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \quad \text{behoud schaling} \\
 &= a_1b_1 \cdot 0 + a_1b_2D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) - a_2b_1D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_2b_2 \cdot 0 \quad \text{anticommutativiteit} \\
 &= (a_1b_2 - a_2b_1)D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad \text{definitie determinant}
 \end{aligned}$$

□

Opmerking

Omdat voor de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door de vectoren van de standaardbasis geldt $D(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = O(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$ volgt de voorlaatste stelling uit deze stelling.

Aanhangsel 2: Verschillende richtinghoeken bij dezelfde cosinus en bij dezelfde sinus (Vervolg op aanhangsel 2 uit §I.6)

Bij welke richtinghoeken van radiële lijnen in verschillende kwadranten de *cosinus hetzelfde* blijft kan worden beredeneerd met behulp van *spiegelingen ten opzichte van x_1 -as*.

Bij welke richtinghoeken van radiële lijnen in verschillende kwadranten de *sinus hetzelfde* blijft kan worden beredeneerd met behulp van *spiegelingen ten opzichte van x_2 -as*.

In onderstaande figuur zijn k, l, n en m radiële lijnen binnen resp. het eerste, tweede, derde en vierde kwadrant van het standaard assenstelsel, en met resp. richtinghoeken κ, λ, ν en μ .

Er is hierbij sprake van *spiegeling ten opzichte van de x_1 -as*

$$\begin{array}{ccc}
 k & \xrightarrow{\mathcal{S}_{x_1}} & m \\
 l & \xrightarrow{\mathcal{S}_{x_1}} & n
 \end{array}$$

en *spiegeling ten opzichte van de x_2 -as*

$$\begin{array}{ccc}
 k & \xrightarrow{\mathcal{S}_{x_2}} & l \\
 m & \xrightarrow{\mathcal{S}_{x_2}} & n
 \end{array}$$

Op de radiële lijnen k, l, n en m zijn de resp. punten K, L, N en M genomen, ieder met dezelfde radius r , dus alle liggend op dezelfde cirkel om de oorsprong. Voor deze punten gelden dezelfde spiegelingen als voor de overeenkomstige radiële lijnen.

In de figuur zijn de coördinaten van deze punten bij de assen aangegeven.

We beginnen met de gevolgen van de spiegelingen ten opzichte van de x_1 -as. Bij deze spiegeling verandert de eerste coördinaat van een punt op de cirkel niet.

Er geldt voor de radiële lijnen k en m : $\cos \kappa = \frac{k_1}{r}$ en $\cos \mu = \frac{m_1}{r}$, met $k_1 = m_1$.

Gevolg $\cos \mu = \cos \kappa$

Verder geldt hierbij

$$\mu = -\kappa$$

Bij de radiële lijnen l en n geldt: $\cos \lambda = \frac{l_1}{r}$ en $\cos \nu = \frac{n_1}{r}$,

met $l_1 = n_1$.

Gevolg

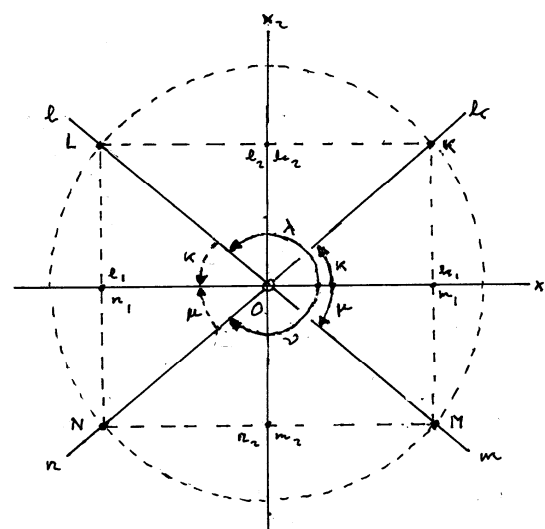
$$\cos \nu = \cos \lambda$$

Verder geldt hierbij

$$\nu = -\lambda$$

In beide gevallen is de conclusie:

Als een richtinghoek van teken verandert dan blijft de cosinus hetzelfde.



Bij spiegelingen ten opzichte van de x_2 -as verandert de tweede coördinaat van een punt op de cirkel niet.

Er geldt voor de radiële lijnen k en l : $\sin \kappa = \frac{k_2}{r}$ en $\sin \lambda = \frac{l_2}{r}$, met $k_2 = l_2$.

Gevolg

$$\sin \lambda = \sin \kappa$$

Verder geldt hierbij

$$\kappa + \lambda = 180^\circ \Rightarrow \lambda = 180^\circ - \kappa$$

Er geldt voor de radiële lijnen m en n : $\sin \mu = \frac{m_2}{r}$ en $\sin \nu = \frac{n_2}{r}$, met $m_2 = n_2$.

Gevolg

$$\sin \nu = \sin \mu$$

Verder geldt hierbij

$$\mu + \nu = -180^\circ \Rightarrow \nu = -180^\circ - \mu$$

Dit leidt tot de conclusie:

De sinus van een positieve richtinghoek is hetzelfde voor een richtinghoek die samen met deze hoek 180° is.

De sinus van een negatieve richtinghoek is hetzelfde voor een richtinghoek die samen met deze hoek -180° is.

Opgaven

I.7.1 Toon door berekening aan dat in het laatste voorbeeld uit $\cos \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{c}|}$

volgt $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 146^\circ$.

I.7.2 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Maak een tekening van de situatie
- Bereken de normen $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ en $|\vec{c}|$ van deze resp. vectoren
- Bereken met behulp van het Grasmann product $O(\vec{a}, \vec{b})$, $O(\vec{a}, \vec{c})$ en $O(\vec{b}, \vec{c})$
- Beargumenteer aan de hand van c) dat
 - de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{c}$ afhankelijk zijn
 - de vector $\vec{b}$ positief is georiënteerd ten opzicht van de vector $\vec{c}$.

I.7.3 Ten opzichte van een het standaard assenstelsel in een plat vlak geldt voor de coördinaten van drie punten $A(2,1)$, $B(7,4)$ en $C(5,8)$.

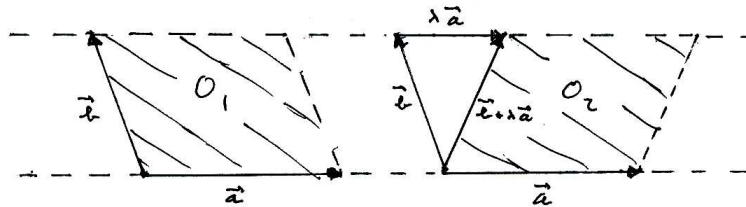
- Maak een tekening van de situatie.
- Geef de kentallen van de vectoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{BC}$.

- c) Bereken exact de lengtes van de zijden van de driehoek $\triangle ABC$.
- d) Bereken exact via de verplaatsingsvectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$ de oppervlakte $O(ABC)$ van de driehoek met behulp van het Grassmann product $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- e) Laat $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ en $\gamma = \angle BCA$. Bereken in graden nauwkeurig de hoek α met behulp van de determinant en de hoek β met behulp van het inproduct $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle$.

I.7.4 Ten opzichte van het standaard assenstelsel in een plat vlak geldt voor de coördinaten van de hoekpunten van een vierhoek $A(-5, -6)$, $B(3, -4)$, $C(5, 5)$ en $D(-7, 7)$.

- a) Maak een tekening van de situatie.
- b) Bereken exact $O(ABCD)$.

I.7.5 a) Bewijs vanuit de definitie van het Grassmann product dat geldt $D(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ en geef een meetkundige toelichting op dit resultaat.



In bovenstaande figuur geldt voor de gearceerde oppervlakten

$$O_1 = O(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{en} \quad O_2 = O(\vec{a}, \vec{b} + \lambda \vec{a})$$

- b) Verklaar meetkundig dat geldt $O_1 = O_2$.
- c) Bewijs met behulp van de lineariteit van het Grassmann product dat geldt $D(\vec{a}, \vec{b} + \lambda \vec{a}) = D(\vec{a}, \vec{b})$

Waarom verklaart ook dit het resultaat uit b) ?

I.7.6 Bewijs de volgende stelling

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ geldt voor het verband van het Grassmann product van de vectoren

$\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ en $\vec{b} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$ met het Grassmann product van de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ van een niet-standaard basis

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \cdot D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

I.8 Grootte en richting van vectoren in $\mathbb{R}^2$

In de *wiskunde* wordt een *vector* in $\mathbb{R}^2$ *algebraïsch* gezien als een *kolom kentallen*. *Meetkundig* kan een *vector* dan worden opgevat als een *verplaatsing* van een punt naar een ander punt. Het eerste kental geeft aan wat deze verplaatsing inhoudt langs x_1 -richting van het standaard assenstelsel en het tweede kental geeft aan hoe deze verplaatsing is volgens de x_2 -richting.

In de *natuurkunde* wordt een *vector* allereerst gezien als een object dat een *grootte* heeft en een *richting*. Ook dit is een *meetkundige benadering* van het begrip *vector*. Een belangrijk voorbeeld vormen de krachten op een puntdeeltje. Ieder van de krachten op zo'n deeltje heeft een grootte en een richting en is daarom een vector.

In deze paragraaf houden we ons bezig met het verband tussen deze twee meetkundige visies op een vector.

De *eenheidsvector* speelt de verbindende rol tussen de wiskundig meetkundige visie en de natuurkundig meetkundige visie. Enerzijds bestaat er de eenheidsvector die in dezelfde richting staat als de vector als verplaatsing, zoals reeds in voorgaande paragrafen aan de orde is gekomen, anderzijds zal de eenheidsvector direct in verband blijken te staan met de zogenoemde richtinghoek.

In het aanhangsel wordt ingegaan op het merkwaardige gegeven hoe juist bij de natuurkunde deze richtinghoek meestal wordt vermeden.

Om de richting van een vector in $\mathbb{R}^2$ vast te leggen het volgende

Definitie

Onder de *richtinghoek* van een vector $\vec{a}$ ($\neq \vec{0}$) in $\mathbb{R}^2$ verstaat men de *georiënteerde hoek* $\angle(\vec{e}_1 \rightarrow \vec{a})$ van de vector $\vec{e}_1$ uit de standaard basis naar de vector $\vec{a}$.

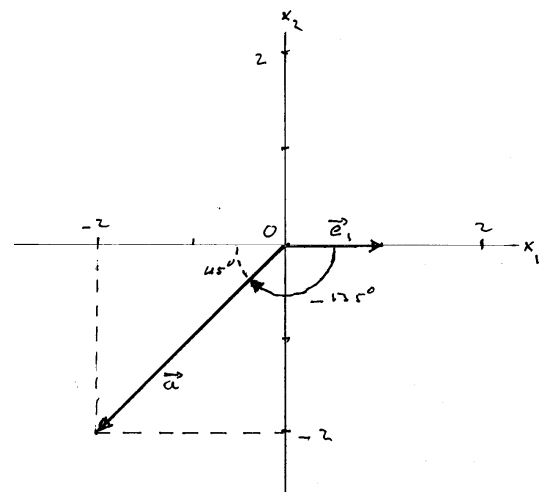
Voorbeeld en opmerkingen

- 1) Laat $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. De hoek van $\vec{a}$ met de negatieve x_2 -as

is 45° . De georiënteerde hoek van de basisvector $\vec{e}_1$ naar de vector $\vec{a}$ is -135° , dus $\angle(\vec{e}_1 \rightarrow \vec{a}) = -135^\circ$.

De richtinghoek van -135° legt de richting van de vector $\vec{a}$ vast. Als positievector ligt $\vec{a}$ in het derde kwadrant.

- 2) - De richtinghoeken in het *derde kwadrant* variëren van -180° (in de richting van de negatieve x_2 -as) tot en met -90° (in de richting van de negatieve x_1 -as)
- In het *vierde kwadrant* varieert de richtinghoek van -90° (in de richting van de negatieve x_2 -as) tot en met 0° (in de richting van de positieve x_1 -as)
- In het *eerste kwadrant* varieert de richtinghoek van 0° (in de richting van de positieve x_1 -as) tot en met 90° (in de richting van de positieve x_2 -as)



- In het *tweede kwadrant* varieert de richtinghoek van 90^0 (in de richting van de positieve x_2 -as) tot en met 180^0 (in de richting van de negatieve x_1 -as)
- 3) De hier gedefinieerde richtinghoek stemt overeen met degene die is besproken in hert aanhangsel 2 van §I.6, dat de definitie van cosinus en sinus als onderwerp heeft.
- 4) De eenheidsvector met richtinghoek α wordt genoteerd als $\vec{e}_\alpha$.

Het volgende verband tussen eenheidsvector en richtinghoek wordt hier afgeleid als oefening met de vectoriële formules uit de paragrafen I.6 en I.7. voor cosinus en sinus. Het is echter mogelijk de formule in deze stelling langs een andere weg af te leiden. Dit komt in de opmerkingen na de stelling aan de orde.

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ geldt voor de kentallen van de eenheidsvector $\vec{e}_\alpha$ met richtingshoek α

$$\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Bewijs

Stel $\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan geldt $|\vec{e}_\alpha|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$.

Volgens de definitieformule van de hoek volgens het inproduct geldt

$$\cos \alpha = \cos \angle(\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_\alpha) = \frac{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_\alpha \rangle}{|\vec{e}_1| |\vec{e}_\alpha|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = u_1$$

Volgens de determinant geldt

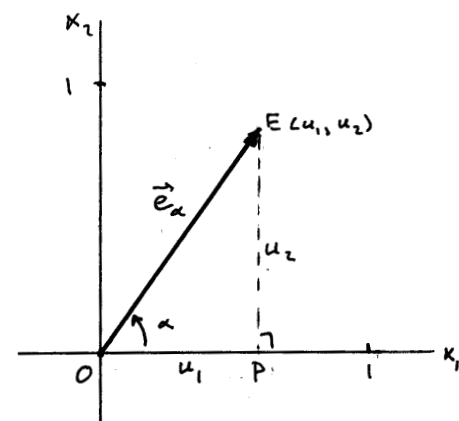
$$\sin \alpha = \sin \angle(\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_\alpha) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & u_2 \end{vmatrix}}{|\vec{e}_1| |\vec{e}_\alpha|} = \frac{1 \cdot u_2 - 0 \cdot u_1}{1 \cdot 1} = u_2$$

Invullen in de formule voor $\vec{e}_\alpha$ levert de formule in de stelling.

□

Opmerkingen

- 1) De formule in de stelling is ook afgeleid vanuit de definitie van cosinus en sinus in aanhangsel 2 van §I.6. Het is echter mogelijk om direct vanuit de eenheidsvector de cosinus en de sinus te definiëren.
- 2) We bekijken eerst het geval dat $\vec{e}_\alpha$ als positievector zijn richting *binnen het eerste kwadrant* heeft, dus het geval dat voor de richtinghoek geldt $0^0 < \alpha < 90^0$. In dat geval kunnen we de definities van cosinus en sinus voor scherpe positieve hoeken in een rechthoekige driehoek gebruiken. Deze definities leveren voor de figuur



$$\cos \alpha = \frac{OP}{OE} = \frac{u_1}{|\vec{e}_\alpha|} = u_1$$

$$\sin \alpha = \frac{PE}{OE} = \frac{u_2}{|\vec{e}_\alpha|} = u_2$$

We zien dat net als in de stelling geldt: De cosinus van een richtinghoek is gelijk aan de x_1 -component van de eenheidsvector bij die hoek en de sinus van de richtinghoek is gelijk aan de x_2 -component van de eenheidsvector bij die hoek.

- 3) Volgens opmerking 2) levert de definitie van sinus en cosinus voor een positieve scherpe richtinghoek α in een rechthoekige driehoek dus:

Gegeven is in $\mathbb{R}^2$ de eenheidsvector $\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ met richtinghoek α .

De cosinus en de sinus van deze hoek zijn dan

$$\cos \alpha = u_1$$

$$\sin \alpha = u_2$$

Ligt de eenheidsvector in een *ander kwadrant*, dus een voor een richtinghoek die niet scherp of niet positief is, dan kan *dit resultaat* worden gebruikt als *definitie van de cosinus en van de sinus* van een richtinghoek.

- 4) *Binnen het tweede kwadrant* geldt bijvoorbeeld: De richtinghoek is stomp en positief, dus $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Van de vector $\vec{e}_\alpha$ is het eerste kental dan negatief, dus $u_1 < 0$, en het tweede kental positief, dus $u_2 > 0$. Dus volgens de in opmerking 2) gegeven definitie

$$\cos \alpha < 0$$

$$\sin \alpha > 0$$

Dus is voor een *stompe positieve richtinghoek* de *cosinus negatief* en de *sinus positief*.

De rekenmachine kan deze conclusie bevestigen (doe dit maar!).

Analoog geldt (zie opgave I.8.4)

Binnen het derde kwadrant: $-180^\circ < \alpha < -90^\circ$ (stomp en negatief)

$$\cos \alpha < 0$$

$$\sin \alpha < 0$$

Binnen het vierde kwadrant: $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$ (scherp en negatief)

$$\cos \alpha > 0$$

$$\sin \alpha < 0$$

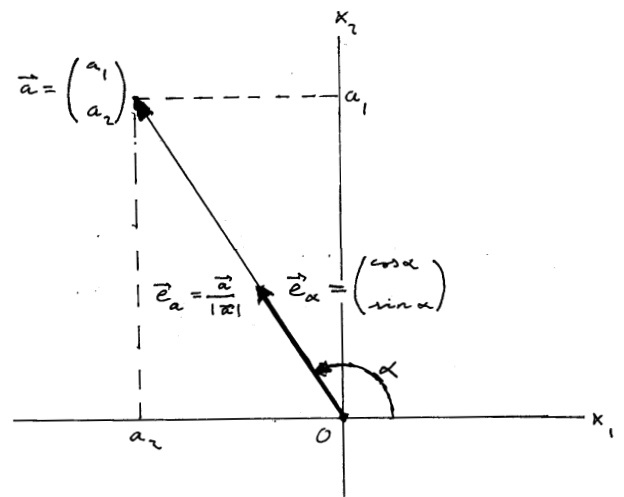
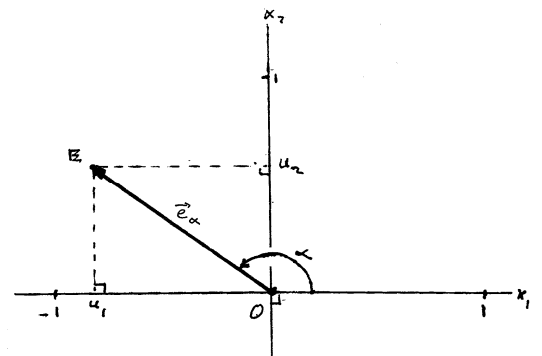
Heeft een vector $\vec{a}$ richtinghoek α dan zijn de

eenheidsvector $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ in de richting van $\vec{a}$ en de

eenheidsvector $\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ met richtinghoek α aan

elkaar gelijk

$$\vec{e}_a = \vec{e}_\alpha$$



Het is deze gelijkheid van de eenheidsvectoren die wordt gebruikt om over te gaan van het wiskundig meetkundige beeld van een vector als verplaatsing naar het natuurkundig meetkundige beeld van een vector als een object dat een grootte en een richting heeft, en omgekeerd.

Voorbeelden

- 1) *Gegeven:* De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ dus de richting van $\vec{a}$ is in het vierde kwadrant.

Gevraagd: De norm $|\vec{a}|$ en de richtinghoek α van deze vector $\vec{a}$.

Oplossing: Voor de grootte van $\vec{a}$ geldt $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Voor de eenheidsvector $\vec{e}_a$ in de richting van $\vec{a}$ geldt:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Deze vector is gelijk aan de vector $\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ met richtinghoek α , dus

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

De rekenmachine levert voor $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ de oplossing $\alpha = 53^\circ$. Behalve de oplossing van de rekenmachine is ook de oplossing $\alpha = -53^\circ$ mogelijk. Omdat de richting van $\vec{a}$ in het vierde kwadrant ligt (ga na met een tekening!), levert de laatste oplossing de goede richtinghoek voor $\vec{a}$.

Resultaat: $|\vec{a}| = 5$ en $\alpha = -53^\circ$

- 2) *Gegeven:* De vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ heeft als grootte $|\vec{a}| = 37,2$ en als richtinghoek $\alpha = 253^\circ$.

Gevraagd: De kentallen van de vector $\vec{a}$ in één decimaal.

Oplossing:

Er geldt: $\vec{e}_{253^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 253^\circ \\ \sin 253^\circ \end{pmatrix}$

Deze vector is gelijk aan de eenheidsvector $\vec{e}_a$ in de richting van $\vec{a}$. Gevolg

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_a = |\vec{a}| \vec{e}_{253^\circ} = 37,2 \begin{pmatrix} \cos 253^\circ \\ \sin 253^\circ \end{pmatrix} = 37,2 \begin{pmatrix} -0,292 \\ -0,956 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10,9 \\ -35,6 \end{pmatrix}$$

- 3) Voor de richtinghoeken als 30° , 45° en 60° zijn de *kentallen* van de bijbehorende *eenheidsvector exact* te bepalen, dus *niet alleen als benaderde waarden* via decimalen. Bijvoorbeeld:

Gegeven: De vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

- Gevraagd:*
- De kentallen van de eenheidsvector $\vec{e}_a$ in de richting van $\vec{a}$.
 - Beargumenteer aan de hand van een figuur dat voor de richtinghoek van deze vector $\vec{a}$ geldt $\alpha = 30^\circ$.

c) Toon aan $\vec{e}_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

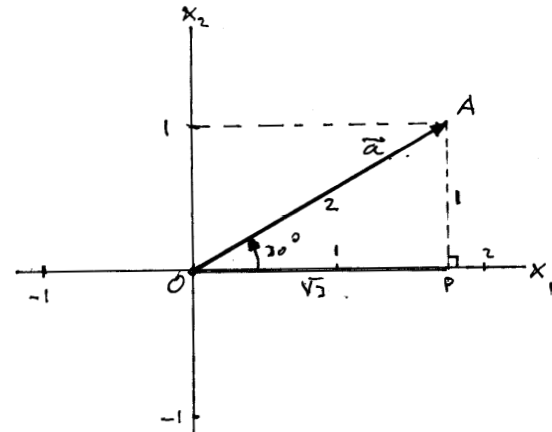
d) Wat zijn derhalve de exacte waarden voor $\cos 30^\circ$ en $\sin 30^\circ$?

Oplossing:

a) Er geldt $|\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Dus:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) In de figuur is de vector getekend als positievector van de oorsprong O naar het punt A . Voor de afstand van deze punten geldt $OA = |\vec{a}| = 2$. Verder is de rechthoekszijde PA in $\triangle OPA$ gelijk aan de helft van de schuine zijde OA omdat $PA = a_2 = 1$. Volgens de stelling over de rechthoekige driehoek met scherpe hoeken van 30° en 60° betekent dit dat de hoek tegenover de zijde PA gelijk is aan 30° . Dus voor de richtinghoek van de vector $\vec{a}$ geldt $\alpha = 30^\circ$.



c) Uit b) volgt $\vec{e}_a = \vec{e}_{30^\circ}$ en in combinatie met a) levert dit

$$\vec{e}_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

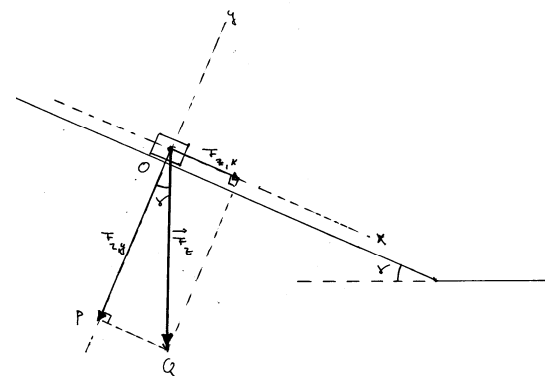
d) Omdat ook geldt $\vec{e}_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix}$

betekent c) $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

Aanhangsel 1): Opmerking over richtinghoeken in de natuurkunde

In de *natuurkunde* wordt bij krachten *zelden* gewerkt met *richtinghoeken*. Men werkt meestal met een rechthoekig driehoek waarin met de *grootte* van een hoek wordt gewerkt, die in zo'n driehoek groter of gelijk 0° is en kleiner of gelijk 90° , en dus niet met de richtinghoek. Een *voorbeeld* levert de natuurkundige uitwerking van een vraag naar de zwaartekracht op een puntdeeltje op een rechte helling.

Gegeven: Een puntmassa met $m = 5,33$ kg ligt op een helling met hellinghoek $\gamma = 22^\circ$. Langs de helling is de x -as van een assenstelsel (x, y) gekozen en de y -as staat loodrecht op de helling.



Gevraagd: De kentallen van de zwaartekracht $\vec{F}_z$ op dit puntdeeltje in dit assenstelsel

Oplossing:

Voor de valversnelling op aarde geldt $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ en dus is de grootte van de zwaartekracht op het deeltje

$$|\vec{F}_z| = m \cdot g = 5,33 \cdot 9,81 = 52,3 \text{ N}$$

De hellinghoek γ is ook de hoek tussen de zwaartekracht $\vec{F}_z$ en de negatieve y-as

In $\triangle OPQ$ valt af te lezen

$$\sin \gamma = \frac{PQ}{OQ} = \frac{F_{z,x}}{|\vec{F}_z|} \Rightarrow F_{z,x} = |\vec{F}_z| \sin \gamma = 52,3 \sin 22^\circ = 19,6 \text{ N}$$

$$\cos \gamma = \frac{OP}{OQ} = \frac{-F_{z,y}}{|\vec{F}_z|} \Rightarrow F_{z,y} = -|\vec{F}_z| \cos \gamma = -52,3 \cos 22^\circ = -48,5 \text{ N}$$

Resultaat:
$$\vec{F}_z = \begin{bmatrix} 19,6 \text{ N} \\ -48,5 \text{ N} \end{bmatrix}$$

- Merk op:**
- 1) De hoek γ is geen richtinghoek omdat γ een positieve scherpe hoek is tussen $\vec{F}_z$ en de negatieve y-as en niet de negatieve richtinghoek van $\vec{F}_z$ met de positieve x-as
 - 2) Om de kolomnotatie voor de kentallen van de zwaartekracht $\vec{F}_z$ in het orthonormale assenstelsel (x, y) te onderscheiden van de kentallen in het standaard assenstelsel (x_1, x_2) zijn de haken rond de kentallen niet afgerond genomen maar recht.

Aanhangsel 2): Definitie van de draaihoek

Voor de volledigheid gaan we hier in op hoe vanuit de richtinghoek de zogenoemde draaihoek kan worden gedefinieerd, hoewel we hiervan geen gebruik maken in dit hoofdstuk over vectoren.

Draait men over een hoek van 360° dan komt men uitgaande van de vector $\vec{a}$ opnieuw in de vector $\vec{a}$.

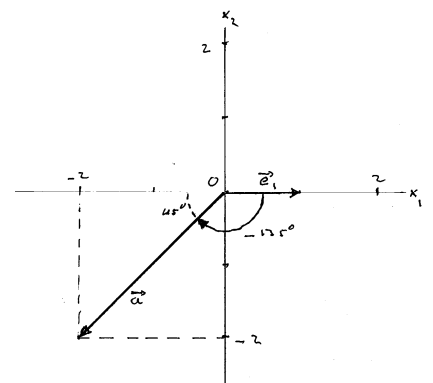
Dus
$$\vec{a} \xrightarrow{\mathcal{R}_{360^\circ}} \vec{a}$$

Uitgaande van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ met richtinghoek van -135°

levert dit een hoek α van met de positieve x_1 -as (dus met de basisvector $\vec{e}_1$) van:

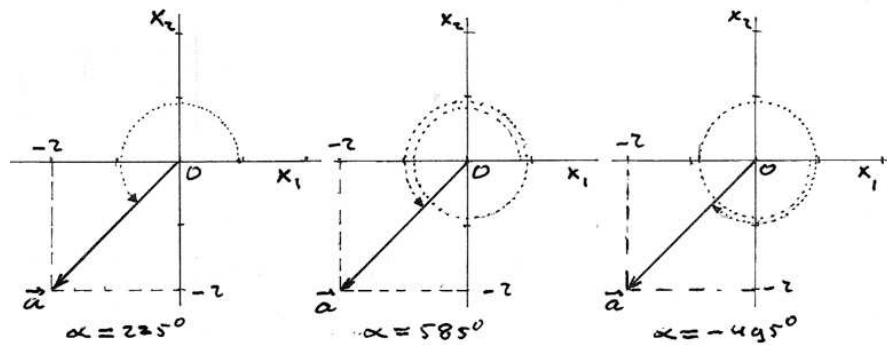
Eén keer 360° draaien	$\alpha = -135 + 360 = 225^\circ$
Twee keer 360° draaien	$\alpha = -135 + 2 \cdot 360 = 585^\circ$
Eén keer 360° terugdraaien	$\alpha = -135 - 360 = -495^\circ$
Enz.	

De hier berekende hoeken α heten *draaihoeken* van de vector $\vec{a}$.



Een draaihoek van een vector is dus gelijk aan de richtingshoek van die vector op een geheel aantal keren 360° na.

Al deze draaihoeken leggen dezelfde richting vast.



Het bovenstaande leidt tot het volgende:

Definitie

In $\mathbb{R}^2$ wordt de richting van iedere vector $\vec{a}$ ($\neq \vec{0}$) vastgelegd door een *draaihoek* α waarvoor geldt $\alpha = \angle(\vec{e}_1 \rightarrow \vec{a}) + k \cdot 360^\circ$, waarbij k een geheel getal is.

Opgaven

I.8.1 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vector $\vec{a}$ met norm $|\vec{a}| = 15$ en richtingshoek $\alpha = 72^\circ$, de vector $\vec{b}$ met norm $|\vec{b}| = 2,7$ en richtingshoek $\beta = 140^\circ$ en de vector $\vec{c}$ met norm $|\vec{c}| = 0,33$ en richtingshoek $\gamma = -132^\circ$

- In welk kwadrant is de richting van de vector $\vec{a}$? En in welk kwadrant is de richting van de vector $\vec{b}$? En in welk kwadrant is de richting van de vector $\vec{c}$?
- Bereken de kentallen van $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.

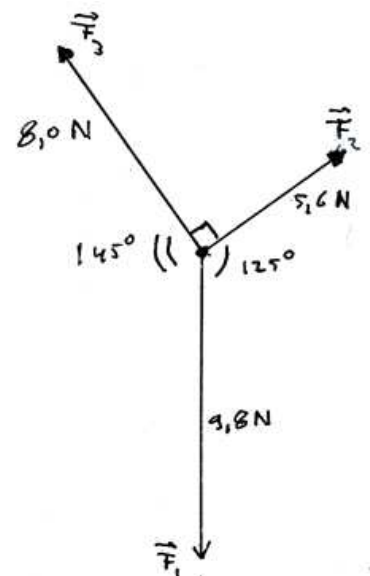
I.8.2 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 8 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bereken van elk van deze vectoren de norm en, mede met behulp van de rekenmachine, de richtingshoek.

I.8.3 Bij een natuurkundige meting zijn de drie krachten $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$ op een stilstaande “punt” massa gemeten. Deze krachten liggen in één vlak.

Voor de resp. groottes ervan is bij deze meting gevonden

$$|\vec{F}_1| = 9,8 \text{ N}, \quad |\vec{F}_2| = 5,6 \text{ N} \text{ en } |\vec{F}_3| = 8,0 \text{ N}.$$

Verder bleek bij de meting voor de onderlinge hoeken van deze krachtvectoren te gelden $\angle(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 125^\circ$, $\angle(\vec{F}_2, \vec{F}_3) = 90^\circ$ en $\angle(\vec{F}_1, \vec{F}_3) = 145^\circ$.



- a) Leg een geschikt assenstelsel aan en bereken in één decimaal de componenten van deze drie krachtvectoren $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$ ten opzichte van dit assenstelsel.
- b) Toon vervolgens algebraïsch aan dat binnen één decimaal geldt

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

(Natuurkundig betekent dit dat de krachten elkaar opheffen bij stilstand van een puntdeeltje.)

I.8.4 Beargumenteer aan de hand van een figuur en de definitie

Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de eenheidsvector $\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ met richtinghoek α .

De cosinus en de sinus van deze hoek zijn dan

$$\cos \alpha = u_1$$

$$\sin \alpha = u_2$$

dat geldt

- a) Binnen het derde kwadrant: $-180^\circ < \alpha < -90^\circ$ (stomp en negatief)

$$\cos \alpha < 0$$

$$\sin \alpha < 0$$

- b) Binnen het vierde kwadrant: $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$ (scherp en negatief)

$$\cos \alpha > 0$$

$$\sin \alpha < 0$$

I.8.5 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) Wat is de richtinghoek van deze vector?

- b) Toon aan $\vec{e}_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- c) Geef de exacte waarde van

$$\cos 45^\circ \quad \text{en} \quad \sin 45^\circ$$

I.8.6 Gegeven in $\mathbb{R}^2$ de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

- a) Wat zijn de exacte kentallen van de eenheidsvector $\vec{e}_a$ in de richting van $\vec{a}$?

- b) Beargumenteer aan de hand van een figuur dat voor de richtinghoek van deze vector $\vec{a}$ geldt $\alpha = 60^\circ$.

- c) Toon aan $\vec{e}_{60^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

- d) Geef de exacte waarde van

$$\cos 60^\circ \quad \text{en} \quad \sin 60^\circ$$

I.8.7 Door draaiing over 90° ontstaat uit de richtinghoek α de draaihoek $\alpha + 90^\circ$, dus

$$\alpha \xrightarrow{\mathcal{R}_{90^\circ}} \alpha + 90^\circ$$

Met als gevolg voor de eenheidsvectoren bij deze hoeken

$$\vec{e}_{\alpha+90^\circ} = \mathcal{R}_{90^\circ}(\vec{e}_\alpha)$$

- a) Verklaar dat geldt $\vec{e}_{\alpha+90^\circ} = \vec{e}_\alpha^*$
 - b) Bereken met behulp van a) de exacte kentallen van $\vec{e}_{120^\circ}$, $\vec{e}_{135^\circ}$ en $\vec{e}_{150^\circ}$ vanuit resp. $\vec{e}_{30^\circ}$, $\vec{e}_{45^\circ}$ en $\vec{e}_{60^\circ}$.
 - c) Maak van elk van deze vectoren uit b) een figuur met de draaihoek en de kentallen langs de standaard assen.
 - d) Verklaar dat geldt $\vec{e}_{\alpha-90^\circ} = -\vec{e}_\alpha^*$
 - e) Bereken met behulp van d) de exacte kentallen van $\vec{e}_{-60^\circ}$, $\vec{e}_{-45^\circ}$ en $\vec{e}_{-30^\circ}$ vanuit resp. $\vec{e}_{30^\circ}$, $\vec{e}_{45^\circ}$ en $\vec{e}_{60^\circ}$.
 - f) Bereken ook de kentallen van $\vec{e}_{-60^\circ}$, $\vec{e}_{-45^\circ}$ en $\vec{e}_{-30^\circ}$ vanuit $\vec{e}_{120^\circ}$, $\vec{e}_{135^\circ}$ en $\vec{e}_{150^\circ}$
 - g) Maak van elk van deze vectoren uit e) en f) een figuur met de draaihoek en de kentallen langs de standaard assen.
 - h) Bereken verder de exacte kentallen van $\vec{e}_{-120^\circ}$, $\vec{e}_{-135^\circ}$ en $\vec{e}_{-150^\circ}$.
Maak van elk van deze vectoren een figuur met de draaihoek en de kentallen langs de standaard assen.
- I.8.8
- a) Beargumenteer aan de hand van figuren het verband tussen de eenheidsvectoren met resp. richtinghoeken 0° , 90° , 180° , -90° en -180° , en de vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ van de standaard basis in $\mathbb{R}^2$.
 - b) Geef de waarden van de cosinus en de sinus van de hoeken 0° , 90° , 180° , -90° en -180° .

I.9 Determinant en afhankelijkheid van stelsels vectoren

In deze paragraaf komt het verband tussen determinanten en afhankelijkheid van een stelsel vectoren aan de orde. We zullen hierbij ook voor het Grassmann product het woord determinant gebruiken.

Het eerste resultaat is het volgende

Stelling

In $\mathbb{R}^2$ zijn twee vectoren dan en slechts dan afhankelijk als hun determinant gelijk 0 is.

Dus $\vec{a}$ en $\vec{b}$ afhankelijk $\Leftrightarrow D(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

Bewijs

Stel $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn afhankelijk.

De vectoren zijn dan gericht volgens dezelfde lijn. Het oppervlakte $O(\vec{a}, \vec{b})$ van het parallellogram dat zij opspannen is dan gelijk 0 en omdat $D(\vec{a}, \vec{b}) = \pm O(\vec{a}, \vec{b})$ betekent dit

$$D(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

Stel $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn onafhankelijk.

De vectoren zijn dan gericht volgens twee lijnen die een hoek met elkaar maken.. Het oppervlakte $O(\vec{a}, \vec{b})$ van het parallellogram dat zij opspannen is daarom ongelijk 0 en omdat $D(\vec{a}, \vec{b}) = \pm O(\vec{a}, \vec{b})$ betekent dit $D(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$.

□

Volgens §I.5 is in $\mathbb{R}^2$ iedere vector afhankelijk van twee gegeven onafhankelijk vectoren (de gegeven basis). Ook deze afhankelijkheid kan worden uitgedrukt met behulp van determinanten.

Stelling (regel van Cramer)

Als in $\mathbb{R}^2$ de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ onafhankelijk zijn dan is iedere vector $\vec{a}$ een lineaire combinatie van deze vectoren

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$$

waarbij voor de kentallen λ_1 en λ_2 geldt

$$\lambda_1 = \frac{D(\vec{a}, \vec{v}_2)}{D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)} \quad \text{en} \quad \lambda_2 = \frac{D(\vec{v}_1, \vec{a})}{D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$$

Bewijs

Bij een gegeven vector $\vec{a}$ is er sprake van de vectorvergelijking

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$$

met onbekenden λ_1 en λ_2 .

De onbekende λ_1 wordt gevonden door het inproduct met de nevenvector van $\vec{v}_2$

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_2^*, \vec{a} \rangle &= \langle \vec{v}_2^*, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \rangle \\ &= \langle \vec{v}_2^*, \lambda_1 \vec{v}_1 \rangle + \langle \vec{v}_2^*, \lambda_2 \vec{v}_2 \rangle \quad \text{behoud optelling} \\ &= \lambda_1 \langle \vec{v}_2^*, \vec{v}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{v}_2^*, \vec{v}_2 \rangle \quad \text{behoud schaling} \\ &= \lambda_1 \langle \vec{v}_2^*, \vec{v}_1 \rangle + \lambda_2 0 \quad \vec{v}_2^* \perp \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Dus

$$D(\vec{v}_2, \vec{a}) = \lambda_1 D(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$$

Gevolg

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{D(\vec{v}_2, \vec{a})}{D(\vec{v}_2, \vec{v}_1)} = \frac{-D(\vec{a}, \vec{v}_2)}{-D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)} && \text{anticommutativiteit} \\ &= \frac{D(\vec{a}, \vec{v}_2)}{D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}\end{aligned}$$

Op een vergelijkbare manier (opgave I.9.1) wordt de formule voor λ_2 gevonden via het inproduct met de nevenvector van $\vec{v}_1$.

□

Opmerkingen

- 1) Uit de formules voor λ_1 en λ_2 blijkt dat het noodzakelijk is dat $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ onafhankelijke vectoren zijn. Immers de noemers moeten ongelijk 0 zijn, d.w.z. $D(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq 0$. De onafhankelijkheid volgt uit de vorige stelling.
- 2) De formules voor λ_1 en λ_2 kunnen als volgt onthouden worden.

Bekijk
$$\frac{D(\dots, \dots)}{D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$$

Om λ_1 te vinden zetten we de vector $\vec{a}$ op de plaats boven $\vec{v}_1$ en de vector $\vec{v}_2$ op de plaats boven $\vec{v}_2$.

Aldus
$$\lambda_1 = \frac{D(\vec{a}, \vec{v}_2)}{D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$$

Om λ_2 te vinden zetten we de vector $\vec{a}$ op de plaats boven $\vec{v}_2$ en de vector $\vec{v}_1$ op de plaats boven $\vec{v}_1$.

Aldus
$$\lambda_2 = \frac{D(\vec{v}_1, \vec{a})}{D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$$

Voorbeeld

Gegeven: De vectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vormen een basis in $\mathbb{R}^2$.

- Gevraagd:**
- a) Toon met behulp van de determinant aan dat de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ onafhankelijk zijn
 - b) Bereken de kentallen λ_1 en λ_2 van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix}$ ten opzichte van de basis $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$

Oplossing

a)
$$D(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2(-3) = 8$$

Dus $D(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq 0$ en daarom zijn $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ onafhankelijk volgens de eerste stelling in deze paragraaf.

$$b) \quad D(\vec{a}, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -9 \cdot 2 - (-2)(-3) = -24$$

$$\text{Dus} \quad \lambda_1 = \frac{D(\vec{a}, \vec{v}_2)}{D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)} = \frac{-24}{8} = -3$$

$$D(\vec{v}_1, \vec{a}) = \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - 2(-9) = 16$$

$$\text{Dus} \quad \lambda_2 = \frac{D(\vec{v}_1, \vec{a})}{D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)} = \frac{16}{8} = 2$$

Opmerking over de vorming van matrices uit vectoren

In $\mathbb{R}^2$ kan uit de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, een zogenoemde *matrix*, notatie [...], worden gevormd

$$[\vec{a}] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad 2 \times 1 \text{ matrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \text{ matrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3 \text{ matrix}$$

enz.

Een 2×1 matrix heet ook wel een *kolommatrix*.

Een 2×2 matrix heet ook wel een *vierkante matrix*.

Dergelijke matrices, dus dergelijke getallentabellen, zullen vanaf hoofdstuk III worden gebruikt bij de lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$.

In $\mathbb{R}^2$ heet $D(\vec{a}, \vec{b})$ de determinant behorend bij de vierkante matrix $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Dus $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ is de *determinant* behorend bij de matrix $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Determinanten van vierkante matrices zullen vanaf hoofdstuk IV een belangrijke rol gaan spelen.

Aanhangsel: Meetkundige afleiding van de regel van Cramer

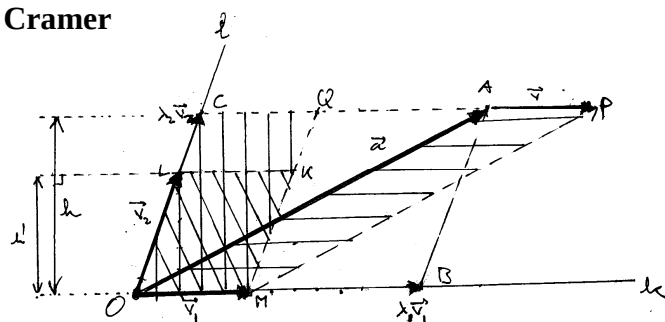
In de figuur rechts vormen de vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ een basis in $\mathbb{R}^2$.

Een willekeurige andere vector $\vec{a}$ is een lineaire combinatie van deze basis

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$$

We gaan uit van het oppervlak opgespannen

door de basisvectoren, dus van $O(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = O(OMKL) = h' \cdot |\vec{v}_1|$



Schaal vervolgens de vector $\vec{v}_2$ met een factor λ_2 dan ontstaat uit dit oppervlak het oppervlak opgespannen door $\vec{v}_1$ en $\lambda_2 \vec{v}_2$, dus $O(\vec{v}_1, \lambda_2 \vec{v}_2) = O(OMQC) = h \cdot |\vec{v}_1|$. Omdat $h = \lambda_2 \cdot h'$ is het verband tussen beide oppervlaktes

$$O(\vec{v}_1, \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_2 O(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Schuift men vervolgens evenwijdig aan $\vec{v}_1$ van de kop van vector $\lambda_2 \vec{v}_2$ naar de kop van vector $\vec{a}$ dan verandert de oppervlakte niet omdat de hoogte h niet verandert.

Meer precies: omdat $O(\vec{v}_1, \vec{a}) = O(OMPA) = h \cdot |\vec{v}_1|$ geldt ook

$$O(\vec{v}_1, \vec{a}) = O(\vec{v}_1, \lambda_2 \vec{v}_2)$$

Dit combinerend
$$\lambda_2 O(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = O(\vec{v}_1, \vec{a}) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{O(\vec{v}_1, \vec{a})}{O(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$$

Het verband tussen oppervlakte en determinant levert vervolgens de regel van Cramer.

Opgaven

I.9.1 Bewijs algebraïsch met behulp van de nevenvector van $\vec{v}_1$ dat bij de laatste stelling

$$\text{geldt } \lambda_2 = \frac{D(\vec{v}_1, \vec{a})}{D(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$$

I.9.2 De vectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ vormen een basis in $\mathbb{R}^2$. Verder is

de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeven.

a) Bereken $O(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

b) Bereken de kentallen λ_1 en λ_2 bij $\vec{a} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$

I.9.3 Gegeven de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Men noteert de determinant bij de matrix A ook als $|A|$.

Bereken $|A|$.

I.9.4 Bewijs aan de hand van een vergelijkbare figuur als in het aanhangsel

$$\text{meetkundig dat geldt } \lambda_1 = \frac{O(\vec{a}, \vec{v}_2)}{O(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}.$$