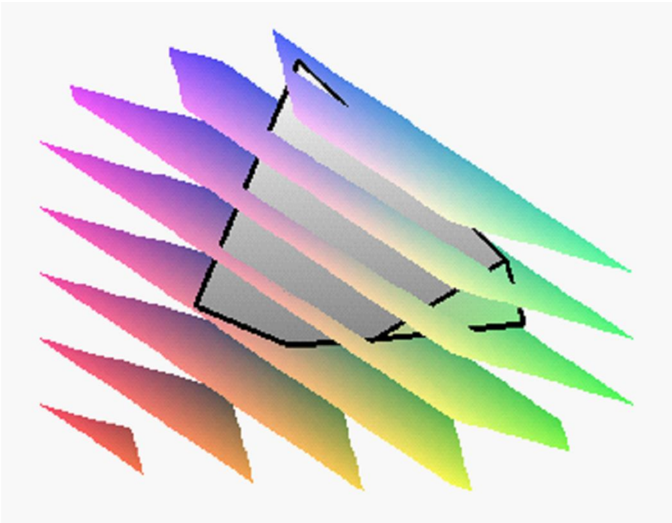


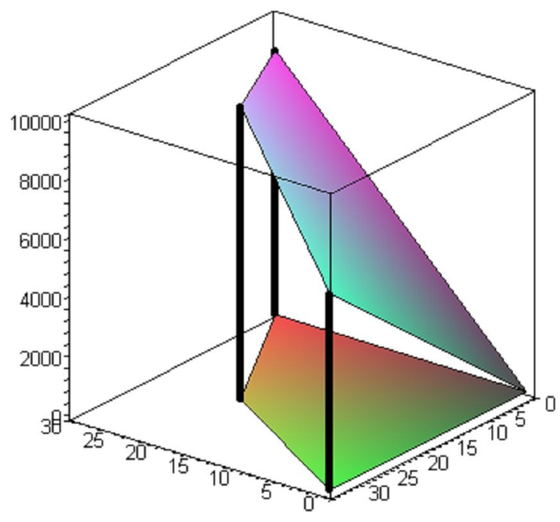
Wiskunde D

Keuzevak beslissen
onderdeel: optimaliseren

Samenstelling
Jan Essers ism Kerngroep Wiskunde D Eindhoven

bewerking van Ferdy van der Werf op 16 juli 2008

voorkennis: lineaire vergelijkingen en ongelijkheden onderbouw



Inhoud

1.1 Basisprobleem

Boer Boersma heeft 45 hectaren land; Er wordt koren en tarwe gezaaid.
Elke hectare beplant met koren draagt 300 euro bij aan de winst, elke hectare beplant met tarwe draagt 200 euro bij aan de winst. Er is 120 ton kunstmest beschikbaar, en er zijn 100 arbeidskrachten. Voor elke hectare koren zijn 2 arbeidskrachten nodig en 4 ton kunstmest. Voor elke hectare tarwe zijn 3 arbeidskrachten nodig, en 2 ton kunstmest.
Boersma streeft naar maximalisatie van de winst. Hoe moet hij gaan zaaien?

1.2 Basistheorie

Het basisprobleem - dat overigens niet heel realistisch is – gaat over graan en is een optimaliseringsprobleem. Er moet gezocht worden naar een maximum en er is sprake van allerlei voorwaarden.

We starten met een analyse van het probleem en kruipen in de huid van de boer. Zijn probleem is in wezen eenvoudig. Hij heeft 45 hectaren land en die mag hij inzaaien met koren of met graan. Als hij niet lang nadenkt en gewoon de helft van de oppervlakte met graan inzaait en de andere helft met koren dan is de winst eenvoudig te berekenen. Een hectare koren levert 300 Euro winst dus 22,5 hectaren koren levert 22,5 keer 300 is 6750 Euro op. De andere helft – 22,5 hectare tarwe – levert 22,5 keer 200 is 4500 Euro op.
In totaal is de winst dan 4000 + 6750 = 10750 Euro op. Dat is een mooi bedrag maar er moet wel gecontroleerd worden of dat kan. Voor 22,5 hectaren koren zijn namelijk 22,5 keer 2 is 45 arbeidskrachten nodig want voor 1 hectare zijn 2 arbeidskrachten nodig. Voor het zaaien en bewerken van de hectaren tarwe zijn ook nog eens 22,5 keer 3 = 67,5 arbeidskrachten nodig. In totaal zijn er dus 67,5 + 45 = 112,5 arbeidskrachten nodig! Omdat er slechts 100 arbeidskrachten zijn gaat dat dus niet lukken.

Je kunt nu het land op een andere manier verdelen en opnieuw nagaan of de hoeveelheid arbeidskrachten dan voldoende zijn.
Een aanpak die niet echt slim is want je moet ook nog rekening houden met de hoeveelheid kunstmest. Het is verstandiger om het probleem wiskundig aan te pakken. De onbekenden in dit probleem leg je niet vooraf vast maar maak je variabel.

Noem dus het aantal hectaren dat je inzaait met koren x en het aantal hectaren dat je inzaait met graan y . Deze variabelen heten de **beslissingsvariabelen.** Je kunt nu nagaan waaraan deze variabelen moeten voldoen.

In de eerste plaats moet er rekening gehouden worden met de hoeveelheid land. De totale oppervlakte is 45 hectare en dus mag de som van x en y niet groter zijn dan 45:

$$x + y \leq 45$$

Deze voorwaarde heet een **beperkende voorwaarde** of **restrictie**. Bij dit probleem zijn er nog meer beperkende voorwaarden omdat er slechts een beperkt aantal arbeidskrachten zijn en een beperkte hoeveelheid kunstmest is.

Wat geldt er voor de arbeidskrachten? Omdat je voor 1 hectaren koren 2 arbeidskrachten nodig hebt zijn er dus voor x hectaren koren $2x$ arbeidskrachten nodig. En omdat je voor elk y hectaren tarwe 3 arbeidskrachten nodig hebt, heb je ook nog $3y$ arbeidskrachten nodig. In totaal zijn er dus $2x+3y$ arbeidskrachten nodig. Omdat er maximaal 100 arbeidskrachten inzetbaar zijn moet dus gelden

$$2x+3y \leq 100$$

Voor 1 hectare koren is 4 ton kunstmest nodig dus voor x hectaren heb je $4x$ ton kunstmest nodig. Voor 1 hectare tarwe is 2 ton kunstmest nodig dus voor y hectaren tarwe heb je $2y$ ton kunstmest nodig. Het niet overschrijden van de totale hoeveelheid kunstmest van 120 ton levert dus een derde beperkende voorwaarde op

$$4x+2y \leq 120$$

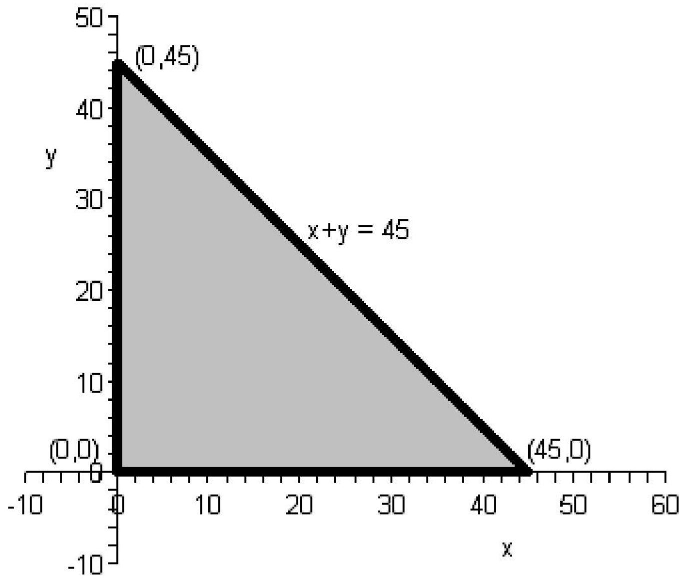
Deze drie voorwaarden beperken de keuzes voor de verdeling van het land. Uiteraard moeten de variabelen x en y niet-negatief zijn. Dus er geldt ook nog

$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

In totaal zijn er dus vijf voorwaarden. Onder elkaar gezet zijn het:

$$\begin{array}{ll} x+y \leq 45 & \text{(oppervlakte land)} \\ 2x+3y \leq 100 & \text{(arbeidskrachten)} \\ 4x+2y \leq 120 & \text{(kunstmest)} \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \end{array}$$

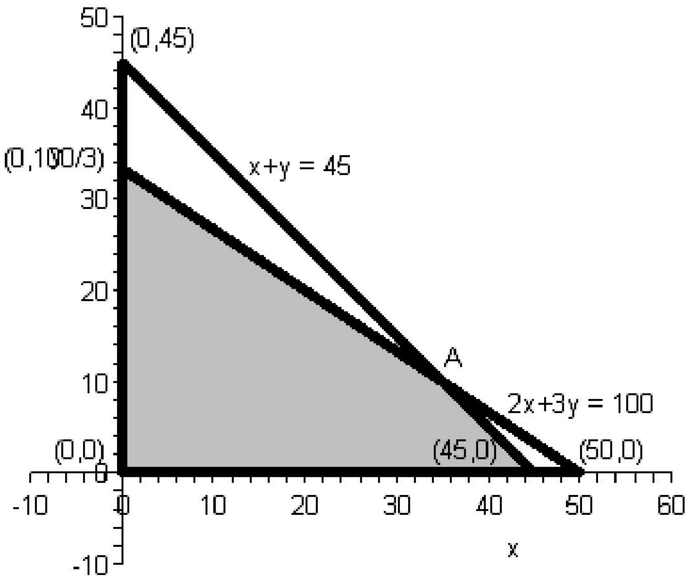
Omdat er slechts twee variabelen zijn, kun je deze verzameling tekenen in een *xy*-assenstelsel. De onderste twee voorwaarden $x \geq 0$ en $y \geq 0$ geven aan dat x en y positief zijn en dus hoef je alleen het gebied boven de x-as en rechts van de y-as te tekenen. Dat gebied heet het **eerste kwadrant** en wordt begrensd door de twee rechte lijnen $x=0$ en $y=0$. Ook bij de lineaire vergelijking $x+y=45$ hoort een rechte lijn. Die lijn gaat door de punten $(45,0)$ en $(0,45)$ en heeft helling -1 immers $y=-x+45$. Hieronder zie je die lijn in het eerste kwadrant.



Alle punten op die lijn aan de voorwaarde $x + y \leq 45$. De punten in het eerste kwadrant onder de lijn voldoen echter ook. Neem maar een willekeurig punt in dat gebied, bijvoorbeeld $(10,10)$. In dat punt geldt $x + y = 10 + 10 = 20$ en dus wordt er voldaan aan $x + y \leq 45$. Overigens had je dat nog sneller kunnen inzien met behulp van het punt $(0,0)$. Punten rechtsboven de lijn $x + y = 45$ voldoen echter niet.
Alle punten die voldoen aan de drie voorwaarden $x + y \leq 45, x \geq 0$ en $y \geq 0$ liggen daarom in de grijze driehoek. Het driehoekige gebied bezit drie hoekpunten.
Die hoekpunten zijn de onderlinge snijpunten van de drie lijnen die horen bij de voorwaarden $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 45$ en dat zijn dus $(0,0)$, $(0,45)$ en $(45,0)$.

De beperkende voorwaarde die hoort bij de arbeidskrachten levert ook een lijn in het figuur. Deze lijn heeft de vergelijking $2x + 3y = 100$ en gaat door de punten $(50,0)$ en $\left(0,33\frac{1}{3}\right)$. Ook nu moet je “onder” de lijn blijven. Dat kun je ook inzien als je bijvoorbeeld het punt $(0,0)$ bekijkt. Dat punt voldoet aan $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \leq 100$ en dus ligt $(0,0)$ in het gebied dat vastgelegd wordt door $2x + 3y \leq 100$.

In het volgende plaatje is deze lijn in het voorgaande plaatje erbij getekend.



In totaal zie je nu zes snijpunten. Namelijk $(0,0),(45,0),(50,0),\left(0,33\frac{1}{3}\right),(0,45)$ en het punt A. Dat punt A is het snijpunt van de lijnen met vergelijkingen $x+y=45$ en $2x+3y=100$. Die twee vergelijkingen wordt een stelsel vergelijkingen genoemd.
Dat snijpunt is eenvoudig te berekenen als je het stelsel vergelijkingen oplost. Dat gaat snel als je $x+y=45$ met 3 vermenigvuldigt en $2x+3y=100$ daarvan aftrekt.
Je krijgt dan $(3x+3y)-(2x+3y)=x=3\cdot 45-100=35$. Als je die waarde voor x weer in $x+y=45$ invult, volgt $y=45-35=10$. Het zesde snijpunt is dus $A=(35,10)$. Dit kun je ook als volgt aanpakken en noteren:

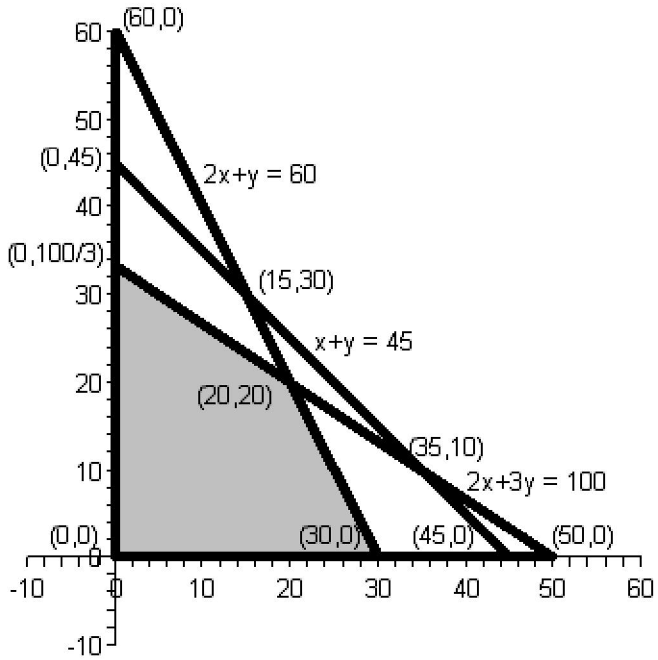
$$\begin{cases} x+y=45 \\ 2x+3y=100 \end{cases} \left|\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y=135 \\ 2x+3y=100 \end{cases} \underset{aftrekken}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=35 \\ 2x+3y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=35 \\ y=\dfrac{100-2\cdot 35}{3}=10 \end{cases}$$

Van die zes snijpunten zijn er slechts vier die in het gebied liggen dat aan alle voorwaarden voldoet. Dat is de vierhoek met hoekpunten $(0,0),(45,0),(35,10)$ en $\left(0,33\frac{1}{3}\right)$.
Tenslotte moet ook nog de voorwaarde bij de kunstmest verwerkt worden. De lijn die daarbij hoort, wordt gegeven door $4x+2y=120$ of vereenvoudigd door $2x+y=60$.
Ook nu moet er dus weer een lijn getekend worden. Omdat de snijpunten met alle andere lijnen van belang worden rekenen we die vooraf uit:

$$\begin{cases} 2x+y=60 \\ x+y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ x+y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=30 \end{cases} \qquad \text{snijpunt } (15,30)$$

$$\begin{cases} 2x+y=60 \\ 2x+3y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=60 \\ 2y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=20 \end{cases} \qquad \text{snijpunt } (20,20)$$

In het volgende plaatje zie je deze twee nieuwe snijpunten en de nieuwe lijn.



In totaal zie je nu tien snijpunten. Namelijk $(0,0),(30,0),(45,0),(50,0)$, $(0,100/3),(0,45),(0,60),(35,10),(20,20),(15,30)$. Van die tien snijpunten zijn er slechts vier die in het gebied liggen dat aan alle voorwaarden voldoet. Dat is de vierhoek met hoekpunten $(0,0),(30,0),(20,20)$ en $(0,100/3)$. Dit gebied dat bepaald wordt door lineaire ongelijkheden heet het **toegestane gebied** en de oplossing (x,y) van het probleem moet in dit probleem daarin liggen. Achteraf gezien was het dus verstandiger geweest om eerst alle lijnen te tekenen en het toegestane gebied vast te stellen en daarna pas de hoekpunten berekenen.

* *Maak nu opdracht 1 van de verwerkingsopdrachten op blz. 13.*

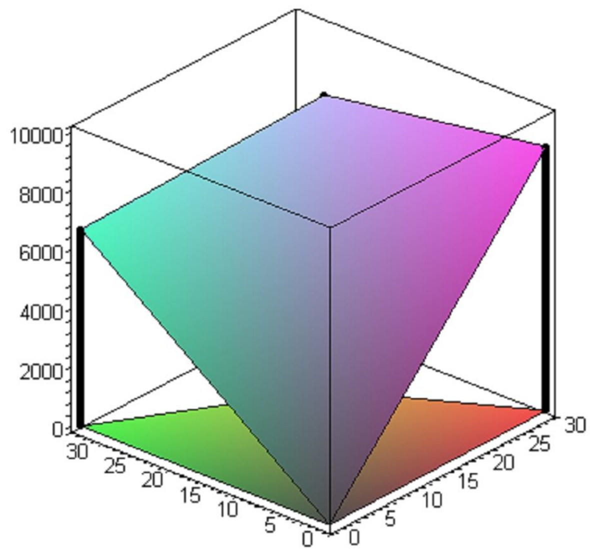
Dat brengt ons naar het modelleren van de winst want die moet maximaal zijn. Die winst wordt ook bepaald door de variabelen x en y. Elke hectare koren levert 300 Euro op dus x hectaren levert $300x$ Euro op. Samen met de $200y$ Euro winst voor de tarwe is de totale winst dus $300x+200y$.
De winst is dus een **functie van twee variabelen**. Het is dan gebruikelijk om die twee variabelen tussen de haakjes te schrijven $f(x,y)=300x+200y$. Vaak schrijft men ook gewoon een z vooraan. Deze functie heet de **doelfunctie** en in dit probleem moet die functie gemaximaliseerd worden.

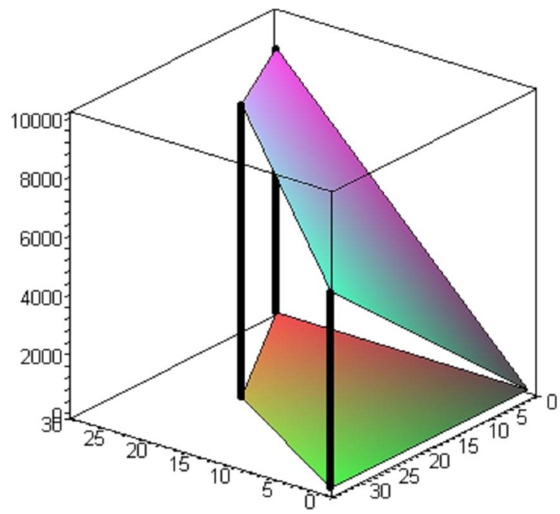
Het omzetten van het probleem naar een wiskundig probleem – het modelleren van het probleem – heeft uiteindelijk geleid naar het wiskundige probleem:

maximaliseer $z = 300x + 200y$
voorwaarden:
$x + y \le 45$ (oppervlakte)
$2x + 3y \le 100$ (arbeidskrachten)
$4x + 2y \le 120$ (kunstmest)
$x \ge 0, y \ge 0$

De doelfunctie is een lineaire functie. Een lineaire functie die van twee variabelen afhankelijk is. Als je een waarde voor die 2 variabelen kiest dan is de winst z vastgelegd. Als je bijvoorbeeld $x = y = 10$ kiest - een punt dat in het toegestane gebied ligt - dan is de winst $z = f(10,10) = 300 \cdot 10 + 200 \cdot 10 = 5000$ Euro. Voor een ander punt in het toegestane gebied bijvoorbeeld $x = 15$, $y = 10$ geldt $z = f(15,10) = 300 \cdot 15 + 200 \cdot 10 = 6500$ Euro.

In de onderstaande plaatjes zie je de grafiek die hoort bij $z = f(x, y) = 300x + 200y$ op het toegestane gebied. Dat gebied wordt ook wel het **domein** van de functie genoemd.





De grafiek is een gedeelte van een vlak en in de tekening zie je de oplossing. Het is het hoogste punt van het vlak want daar is de z het grootst en dat wordt bereikt boven het hoekpunt $(20, 20)$. Overigens zie je dat door vertekening niet eens echt goed in dat 3d-plaatje. De winst is in $(20, 20)$ dan gelijk aan $z = f(20, 20) = 300 \cdot 20 + 200 \cdot 20 = 10000$. Dat betekent dat de winst van de boer maximaal is als hij 20 hectare inzaait met koren en 20 hectaren met tarwe. Die oplossing voldoet aan alle voorwaarden.

controle:
$20 + 20 \le 45$ (oppervlakte)
$2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 100 \le 100$ (arbeidskrachten)
$4 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 120 \le 120$ (kunstmest)
$20 \ge 0$
$20 \ge 0$

Aan de ongelijkheden zie je dat alle arbeidskrachten ingezet moeten worden en dat alle kunstmest gebruikt wordt. Overigens wordt 45 – 40 = 5 hectare landbouwgrond niet gebruikt. Dat kan de boer voor andere doeleinden gebruiken.

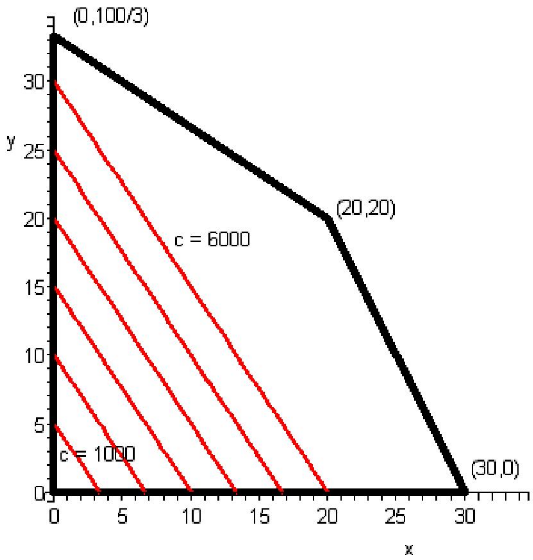
In het basisprobleem is de oplossing afgelezen uit de 3d-grafiek. Als je zo'n grafiek niet tot je beschikking hebt, dan kun je toch vrij eenvoudig de oplossing bepalen. Je berekent dan in elk hoekpunt de winst. Het hoekpunt waar de winst het grootst is, levert de oplossing. In dit voorbeeld zijn er vier hoekpunten en levert de volgende tabel ook de oplossing

Hoekpunt	$z = f(x,y) = 300x + 200y$
$(0,0)$	$300\cdot 0 + 200\cdot 0 = 0$
$(30,0)$	$300\cdot 30 + 200\cdot 0 = 9000$
$(20,20)$	$300\cdot 20 + 200\cdot 20 = 10000$
$\left(0,33\frac{1}{3}\right)$	$300\cdot 0 + 200\cdot\frac{100}{3} \approx 6667$

Deze methode heet de hoekpuntenmethode.

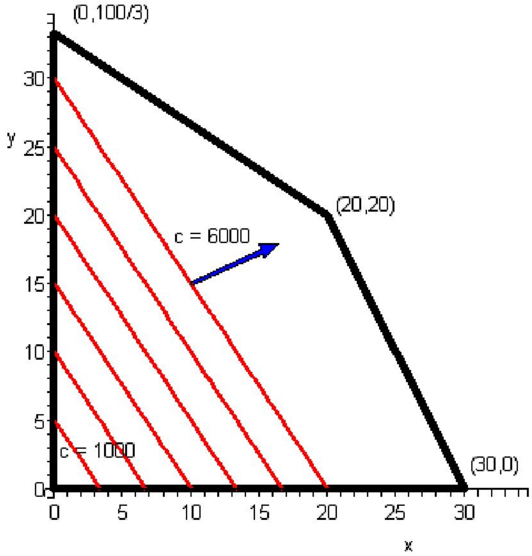
* *Maak nu verwerkingsopdracht 2 op blz. 13.*

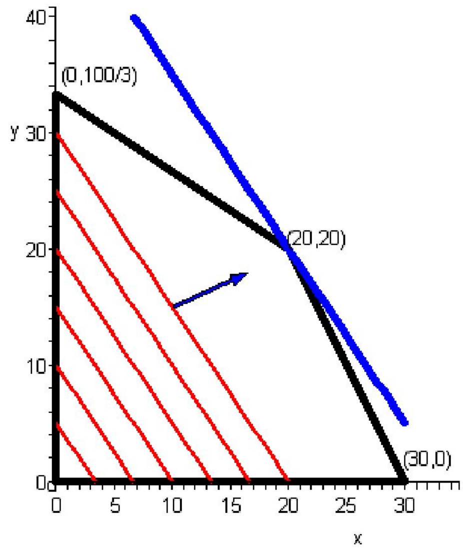
Als er zeer veel hoekpunten zijn, is die methode echter omslachtig. In dat geval is er nog een aanpak die snel resultaat geeft. Op elke hoogte c kun je de grafiek van f doorsnijden met een horizontaal vlak. De doorsnede is dan een lijn met voorschrift $300x + 200y = c$. Die lijn heet de **hoogtelijn** of **isolijn** bij de doelfunctie en kun je in het platte vlak op het toegestane gebied projecteren. Het voorschrift van die hoogtelijn is ook te schrijven als $y = \frac{c - 300x}{200} = \frac{c}{200} - 1{,}5x$. De lijn heeft dus – ongeacht de waarde van de hoogte c - altijd richtingscoëfficiënt -1,5.



In de onderstaande tekening zie je een aantal lijnen met richtingscoëfficiënt -1,5. Dat zie je het beste aan de derde lijn. De hoogtes c van de lijnen nemen naar rechts toe. Immers naar rechts nemen de waarden van x en y toe en dus de waarde van $300x + 200y$. De hoogte bij de meest linkse getekende lijn is $300 \cdot 0 + 200 \cdot 5 = 1000$, de hoogte van de zesde lijn is $300 \cdot 0 + 200 \cdot 30 = 6000$.

Het maximum vind je nu door net zo lang naar rechts te schuiven met de hoogtelijn tot je aan de rand van het toegestane gebied bent. Dat zie je in de volgende figuren.





Ook nu wordt duidelijk dat het maximum in het hoekpunt $(20, 20)$ wordt aangenomen en daar is de winst 10000 Euro.

* *Maak nu opgave 3, 4 en 5 van de verwerkingsopdrachten.*

Al met al levert de uitwerking van dit probleem ook een algemene aanpak voor een soortgelijk probleem waarbij doelfunctie en beperkende voorwaarden lineair zijn. In het algemeen noemt men dat type probleem **een lineair optimaliseringprobleem**.

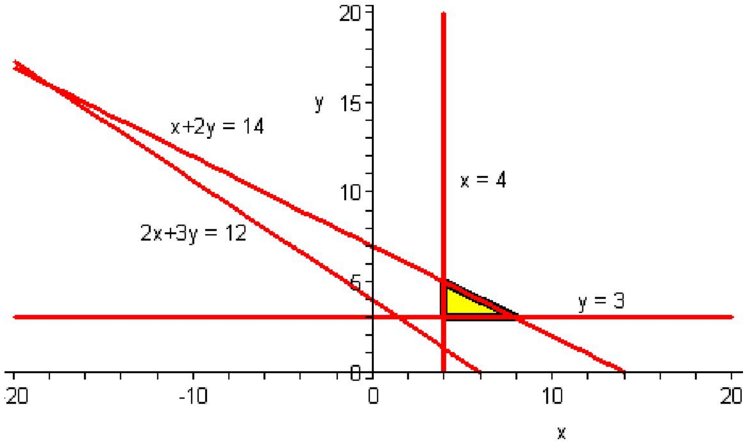
Plan van aanpak bij **twee beslissingsvariabelen**:

- Stel de doelfunctie $z = f(x, y) = ax + by$ en alle voorwaarden op
- Teken alle lijnen die bij de voorwaarden horen
- Bepaal het toegestane gebied
- **Hoekpuntenmethode**
  Bepaal alle hoekpunten, bereken in elk hoekpunt de functiewaarde $z = f(x, y)$ en bepaal de oplossing
  of
- **Schuifmethode**
  Teken een geschikte hoogtelijn $z = ax + by = c$ en “schuif” daarmee naar het “beste” hoekpunt , bereken dat hoekpunt en de functiewaarde in dat hoekpunt.

Ook voor minimaliseringsproblemen kun je zo te werk gaan. Je schuift dan naar het hoekpunt waar de laagste functiewaarde van de doelfunctie wordt aangenomen. Een voorbeeld waarbij het modelleren tot het volgende probleem heeft geleid:

minimaliseer $z = 2x + 3y$
voorwaarden:
$x + 2y \le 14$
$2x + 3y \ge 12$
$x \ge 4$
$y \ge 3$

Er zijn vier voorwaarden en dus moet je vier lijnen tekenen. De lijnen met vergelijking $x = 4$, $y = 3$, $x + 2y = 14$ en $2x + 3y = 12$. Deze vier lijnen snijden elkaar onderling in 6 snijpunten. In de onderstaande tekening zijn de lijnen en de snijpunten te zien. Het toegestane gebied is het gebied rechts van $x = 4$, boven $y = 3$, onder $x + 2y = 14$ en boven $2x + 3y = 12$.



Bij de voorwaarden hoort in dit geval dus een driehoek en slecht drie snijpunten zijn in dit voorbeeld van belang. De drie hoekpunten van het toegestane gebied vindt door de volgende drie stelsels op te lossen:

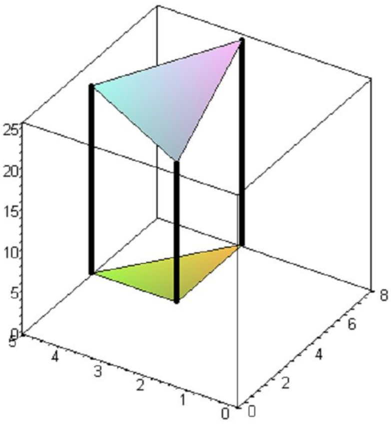
1) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$

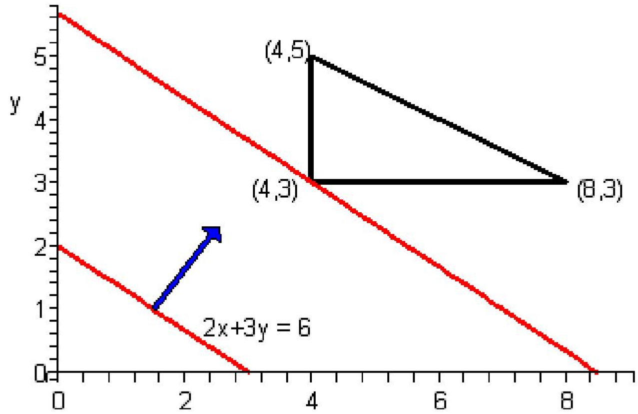
Het minimum van z is nu snel berekend:

Hoekpunt	$z = f(x, y) = 2x + 3y$
$(4,3)$	$2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$
$(4,5)$	$2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$
$(8,3)$	$2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 = 25$

Het minimum is dus 17 en die waarde wordt aangenomen als $x = 4$ en $y = 3$. Het maximum is trouwens 25 en dat wordt aangenomen voor $x = 8$ en $y = 3$.

In het linkerfiguur zie je het bijbehorende 3d-plaatje. Het laagste punt ligt inderdaad boven $(4,3)$. En in het rechterplaatje zie je hoe schuiven met hoogtelijnen ook naar het hoekpunt $(4,3)$ leidt.





De aanpak die beschreven is, kan worden uitgebreid naar problemen waarbij meer dan 2 beslissingsvariabelen een rol spelen Het oplossen van dit type optimaliseringsprobleem – ook wel lineair programmeringsprobleem geheten (LP-probleem) - komt neer op het bepalen van hoekpunten. Bij veel voorwaarden en beslissingsvariabelen een arbeidsintensieve klus. Gelukkig heeft men in de wiskunde slimme en snelle algoritmes bedacht waarmee dat snel kan en er bestaat veel software (zie literatuurverwijzingen) die alle rekenwerk voor je uit handen nemen. Na het invoeren van de doelfunctie en de voorwaarden geven die programma's snel de eindoplossing.

** Maak nu verwerkingsopdrachten 6 t/m 11.*

1.3 Verwerkingsopdrachten

Opdrachten

1 Extra oefening (Uit: Moderne Wiskunde editie 8 deel A2 vwo)

Gegeven zijn de volgende vergelijkingen:

$$\boxed{\begin{array}{l} x+2y\le 12 \\ x+2y\ge 3 \\ x\le 7 \\ x-2y\le 5 \\ x\ge -4 \\ y\le 7 \end{array}}$$

a) Geef het gebied aan dat voldoet aan deze ongelijkheden. (Tip: streep eerst de gebieden weg die **niet** bij het toegestane gebied horen) .
b) Bereken de coördinaten van alle hoekpunten

2 Extra oefening (Uit: Moderne Wiskunde editie 8 deel A2 vwo)

Het toegestane gebied wordt gegeven door de volgende ongelijkheden:

$$\boxed{\begin{array}{l} 5x+8y\le 40 \\ 3y-4x\le 12 \\ 7x+5y\le 35 \\ y\ge 0 \end{array}}$$

a) Geef het gebied aan dat hoort bij bovenstaande ongelijkheden.

De doelfunctie $D = x + y + 10$

b) Bepaal de coördinaten van het punt uit het toegestane gebied waar D maximaal is. Gebruik de hoekpuntenmethode.
c) In welk punt van het toegestane gebied is D minimaal? Welke waarde heeft D in dat punt?

3 Meer oplossingen?

Teken het toegestane gebied bij het onderstaande probleem

maximaliseer $z = 2x + y$
voorwaarden:
$8x + 2y \leq 17$
$4x + 2y \leq 13$
$x, y \geq 0$

Los het probleem op met behulp van de schuifmethode. Je zult dan merken dat er meer oplossingen zijn. Bepaal alle oplossingen.

4 Een niet-lineair probleem.

Bekijk nogmaals het toegestane gebied dat bij opgave 2 gegeven is.

voorwaarden:
$8x + 2y \leq 17$
$4x + 2y \leq 13$
$x, y \geq 0$

Als de doelfunctie lineair is dan is het maximum en het minimum in een hoekpunt te vinden. Is dat ook zo als de doelfunctie niet lineair is? Als voorbeeld nemen we de functie niet lineaire functie $z = f(x, y) = xy$.

a) Teken in het *xy*-vlak de hoogtelijn met hoogte 1. Teken dus de grafiek bij: $z = xy = 1$. Deze grafiek heet in de wiskunde hyperbool.
b) Is er een punt op de rand van het toegestane gebied dat op de hoogtelijn ligt? Zo ja, geef dan de coördinaten van dat punt.
c) Teken meer hoogtelijnen die voor een gedeelte met het toegestane gebied samenvallen.
d) Is er een punt waar de doelfunctie een maximum aanneemt? Zo ja, bereken dat maximum.
e) Wat kun je in concluderen over de relatie tussen hoekpunten en maximum (of minimum)?

5 **Koffie en thee** (Uit: Wageningse Methode)

Een kleine zakenman wil voor ten hoogste € 360 koffie en thee inkopen. Koffie kost € 3 per kg, thee € 4 per kg. De zakenman weet dat hij niet meer dan 100 kg koffie zal kunnen afzetten en niet meer dan 75 kg thee. Noem het aantal kg koffie dat de zakenman inkoopt x en het aantal kg thee y. Natuurlijk moet gelden: $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

a) Aan welke drie andere ongelijkheden moeten x en y voldoen als je let op het te besteden bedrag en de mogelijke afzet?
b) Geef in een assenstelsel het toelaatbare gebied aan.

Stel dat de zakenman € 1 winst maakt per kg koffie en € 2 per kg thee.

c) Druk de winst die de zakenman maakt uit in x en y.

De zakenman wil zoveel mogelijk winst maken. Hij wil dus de functie $x + 2y$, de doelfunctie, maximaliseren.

d) Teken enkele iso-winstlijnen.
e) Wat is het optimale inkoopplan, d.w.z. het plan dat de meeste winst oplevert?

6 **Biks en hooi** (Uit: Wageningse Methode)

In de stal van Jan Pol worden pony's gevoerd zoals het hoort. 's Winters wordt er hoofdzakelijk biks en hooi aan de dieren gegeven. De belangrijkste bestanddelen van dit voer zijn:

- koolhydraten (zetmeel en suiker), ruwvezel en vetten, die zorgen voor de energievoorziening,
- eiwitten, die van groot belang zijn voor de vorming van spieren, hoeven, bloed, enz.

Jasper is een pony die bij Jan op stal staat. Volgens het boekje heeft Jasper per dag 2100 gram zetmeel en 360 gram eiwit nodig. In één kg biks zit 600 gram zetmeel en 80 gram eiwit. In één kg hooi zit 300 gram zetmeel en 60 gram eiwit.
Jasper krijgt elke dag x kg biks en y kg hooi te eten.

a) Aan welke ongelijkheden moeten x en y voldoen?
b) Teken het toelaatbare gebied.

Een zak biks van 15 kg kost € 15; een baal hooi van 20 kg kost € 8.

c) Jan wil de kosten voor het voer zo laag mogelijk houden. Welke doelfunctie wil Jan minimaliseren?
d) Teken enkele iso-kostenlijnen.
e) Wat is het optimale (dus goedkoopste) voerplan?

7 Salontafels (Uit: Wageningse Methode).

Een timmerfabriekje maakt twee soorten salontafels: modern eiken en klassiek eiken. Per dag kunnen er van elke soort hoogstens vijf gemaakt worden. I.v.m. de opslagcapaciteit mogen er per dag niet meer dan zeven tafels in totaal worden gemaakt. Een moderne tafel kost één mandag werk, een klassieke tafel kost twee mandagen. In de fabriek werken elf mensen aan de productie van salontafels.
Stel dat er per dag x moderne tafels en y klassieke gemaakt worden.
a) Welke omstandigheden beperken de dagelijkse productie?
b) Aan welke vier ongelijkheden (behalve $x \geq 0$ en $y \geq 0$) moeten x en y voldoen?
c) Teken het toelaatbare gebied.

De winst op een moderne tafel is € 200 en op een klassieke tafel € 300. Het bedrijf wil de winst maximaliseren.
d) Wat is de doelfunctie?
e) Teken enkele iso-winstlijnen.
f) Bij welk productieschema is de winst het grootst?

Door een grote vraag naar moderne tafels was het mogelijk de prijs te verhogen. De winst die op een moderne tafel wordt gemaakt is nu € 300.
g) Wat is nu de doelfunctie?
h) Teken enkele iso-winstlijnen en bepaal bij welk productieschema de grootste winst wordt gemaakt.

8 Bungalowpark (Uit: Moderne Wiskunde editie 8 deel A2 vwo)

In een nieuw aan te leggen bungalowpark zullen twee typen bungalows worden gebouwd. Van de 250 hectare die het terrein groot is, mag maximaal 60 hectare voor de bouw van bungalows worden gebruikt. Voor een bungalow van het type C4 is 400 m^2 grond nodig. Voor de bungalows van type B6 is 750 m^2 grond nodig. De exploitant wil minimaal 750 bungalows laten bouwen. Van type C4 mogen er maximaal 800 komen en van type B6 moeten er minstens 350 komen. De exploitant verwacht op jaarbasis op type C5 een winst van € 2500 en op type B6 een winst van € 4000 te behalen.
Bereken het aantal te bouwen woningen van elk type om een zo groot mogelijke winst te bereiken.

9 **Een machinefabriek** (Uit: Moderne Wiskunde editie 8 deel A2 vwo)

In een machinefabriek worden machines geproduceerd: type N en type S. Voor een machine van type N is de benodigde arbeidstijd per week op afdeling A 15 uur en op afdeling B 20 uur. Voor een machine van type S zijn deze tijden achtereenvolgens 20 en 30 uur. Per week is op afdeling A 900 uur arbeidstijd beschikbaar en op afdeling B 1200 uur. Voor een machine van type N moet het bedrijf vooraf € 500 aan materiaalkosten uitgeven en voor een machine van type S € 1000. Per week wil men niet meer dan € 34500 aan materiaalkosten uitgeven. Op een machine van type N maakt men € 120 winst, op een machine van type S € 200. Men streeft naar maximale winst.

a) Neem de tabel hiernaast over en vul hem in.
b) Vertaal de beperkende voorwaarden in ongelijkheden en teken het toegestane gebied.

	type N	**type S**	**totaal**
afd A	15	…	900
afd B	20	…	…

c) Het toegestane gebied heeft vier randpunten. Bereken de coördinaten van die punten.
d) In één van de randpunten is de winst maximaal. Hoe groot is dan de maximale winst?
e) Door omstandigheden wordt er op een gegeven moment nog maar € 180 winst op machines van type S behaald. De winst op type N blijft € 120.
Onderzoek of de maximale winst verandert. Zo ja, met hoeveel?
f) Leg uit waarom in dit geval de maximale winst bij verschillende productieaantallen bereikt kan worden.
g) Ook de winst op type N dreigt te verminderen. Bij welke winstverwachting op type N is het verstandig de productie van N te staken en uitsluitend type S te maken?
Licht je antwoord toe met een tekening.

10 Bouwproject (uit vwo-examen wiskunde A 6 mei 2006)

De gemeente Vriesbergen wil woningen en winkels laten bouwen op een terrein van 1 000 000 m^2. De gemeentelijke planologische dienst gaat dit project ontwerpen. Dit project zal aan enkele voorwaarden moeten voldoen:

Verdeling
- Voor elke m^2 woonoppervlak moet 1 m^2 'tuin' extra gereserveerd worden voor de woningen. Dus voor elke m^2 woonoppervlak wordt 2 m^2 grond in gebruik genomen.
- Voor elke 50 m^2 winkeloppervlak moet 20 m^2 extra voor parkeerplaatsen worden bestemd.
- Om ruimte te hebben voor openbare groenvoorzieningen en wegen mag het totale grondoppervlak voor woningen (inclusief tuin) plus het totale grondoppervlak voor winkels (inclusief parkeerplaatsen) samen ten hoogste 60% van het totale oppervlak beslaan.

Verontreiniging
- Voor 1 m^2 woonoppervlak rekent men 40 eenheden verontreiniging en voor 1 m^2 winkeloppervlak rekent men 4 eenheden verontreiniging.
- In totaal is maximaal 3000000 eenheden verontreiniging toelaatbaar.

Regionale functie
Omdat het gebied een regionale winkelfunctie moet krijgen, eist de gemeente dat het aantal m^2 winkeloppervlak ten minste gelijk is aan 50000 m^2 plus vier maal het aantal m^2 woonoppervlak.

Noem het aantal m^2 woonoppervlak x en het aantal m^2 winkeloppervlak y. Naast de beperkende voorwaarden $x \geq 0$ en $y \geq 0$ gelden nu ook de voorwaarden:

(1) $2x + 1{,}4y \leq 600000$
(2) $y - 4x \geq 50000$
(3) $10x + y \leq 750000$

a) Laat zien hoe de voorwaarden (1), (2) en (3) uit bovenstaande gegevens volgen.

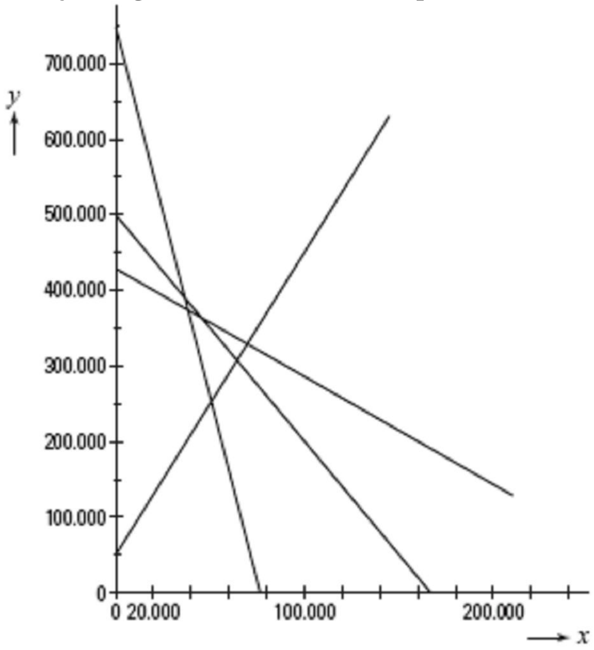
Nog een aspect van het project waar een voorwaarde uit voortvloeit, wordt gevormd door de kosten.

Kosten
1. Het hele project mag niet meer dan 400 miljoen euro kosten.
2. De bouw van 1 m^2 woonoppervlak kost 2400 euro.
3. De bouw van 1 m^2 winkeloppervlak kost 800 euro.

Op grond van de gegevens over de kosten kun je de beperkende voorwaarde (4) opstellen.

b) Stel deze beperkende voorwaarde op.

In onderstaand figuur zijn de grenzen van de vier beperkende voorwaarden getekend.



Met behulp van dit figuur is in te zien dat een van de vier beperkende voorwaarden eigenlijk overbodig is.

c) Welke van de vier beperkende voorwaarden is overbodig?

De gemeentelijke planologische dienst wil zo veel mogelijk m^2 woonoppervlak realiseren.

d) Onderzoek hoeveel m^2 het totale grondoppervlak voor woningen (inclusief tuin) plus het totale grondoppervlak voor winkels (inclusief parkeerplaatsen) in dat geval zal beslaan.

11 Een speelgoedfabriek (Ontleend aan CE VWO A12 2002 tweede tijdvak).

Een speelgoedfabriek maakt poppenhuizen en houten treinen. Voor het vervaardigen van speelgoed is drie soorten arbeid te onderscheiden: zagen, timmeren en verven. Het aantal minuten dat hiervoor nodig is staat in de tabel.

soort arbeid	**tijd (in minuten) nodig per poppenhuis**	**tijd (in minuten) nodig per trein**
zagen	24	15
timmeren	60	40
verven	40	10

Er is één personeelslid belast met het zagen, twee met het timmeren en één met het verven. Elk van deze personeelsleden kan maximaal 40 uur per week werken.
Ga ervan uit dat de kosten voor het maken van speelgoed bestaan uit materiaalkosten en arbeidskosten. Aan materiaal kost een poppenhuis € 17 en een trein ook € 17. Ieder personeelslid kost € 30 per gewerkt uur. Alleen voor gewerkte uren wordt het personeelslid betaald. Alle exemplaren die in een week worden gemaakt, worden diezelfde week verkocht, de poppenhuizen voor € 97 per stuk, de treinen voor € 58,50 per stuk.

a) Bereken de maximale winst die wekelijks gemaakt kan worden.

Waarschijnlijk heb je gemerkt dat onder de gegeven omstandigheden er nooit zoveel poppenhuizen en treinen gemaakt worden dat er voor de zager 40 uur werk is. De zager kan ook heel aardig verven. Hij doet dat net zo vlot als diegene die het normaal doet. Men besluit dat de zager een aantal uren beschikbaar moet zijn om te verven.. Gedurende die tijd is hij niet beschikbaar voor het zagen.

b) Is het mogelijk de zager zo lang te laten verven dat het aantal timmerlieden de enige beperkende factor wordt? Licht je antwoord toe.

1.4 Literatuur en verwijzingen

Applets lineair programmeren

1)
http://riot.ieor.berkeley.edu/riot/Applications/SimplexDemo/Simplex.html
Meer dan 2 beslissingsvariabelen. Niet grafisch. Na invoeren totaal aantal voorwaarden kun je model invoeren en na solve verschijnt oplossing.
2)
http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_waner/RealWorld/LPGrapher/lpg.html
Twee beslissingsvariabelen. Je kunt meerdere voorwaarden invoeren . Applet laat alle lijnen, beperkend gebied en optimale oplossing zien. Start met voorbeeld dan wijst rest zich van zelf.
3)
http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_waner/RealWorld/simplex.html
Zelfde invoer als bij 2) maar dit keer mag je meer variabelen invoeren. Wijst zich ook vanzelf na keuze voorbeeld.
4)
http://cgm.cs.mcgill.ca/~beezer/cs601/main.htm
Twee beslissingsvariabelen. Start met default. Dan verschijnt een model met plaatje en oplossingen. Je kunt ook zelf voorwaarden en doelfunctie invoeren.
5)
http://www.udel.edu/present/tools/lpapplet/lpapplet.html
Met deze applet kun je met vier lijnen schuiven. Optimale oplossing onduidelijk . Context ligt vast dus beperkt gebruikbaar.

1.5 Overzicht begrippen

1.6 Antwoorden

1
a) …
b) (-4,3½), (4,-½), (7,1), (7,2½), (-2,7), (-4,7)

2
a) …
b) (80/31,105/31)
c) (-3,0) $D_{min} = 7$

3
$Z_{max} = 6{,}5$ voor alle waarden van x en y met $4x + 2y = 13$ met $0 \leq x \leq 1$.

4
a) …
b) Ja, b.v. (2,½)
c) …
d) Ja, 169/32.
e) Er is geen relatie.

5
a) $3x + 4y \leq 360$, $x \leq 100$, $y \leq 75$
b) …
c) $W = x + 2y$
d) …
e) 20 kg koffie en 75 kg thee. Winst is dan € 170

6
a) $2x + y \geq 7$, $4x + 3y \geq 18$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
b) …
c) $K = x + 0{,}4y$
d) …
e) Alleen 7 kg hooi.

7
a) Maximaal aantal, opslag, arbeid.
b) $x \leq 5$, $y \leq 5$, $x + y \leq 7$, $x + 2y \leq 11$
c) …
d) $W = 200x + 300y$
e) …
f) (3,4)
g) $W = 300x + 300y$
h) (3,4), (4,3) en (5,2)

8
800 van type C4 en 373 van type B6

9
a) 20, 30, 1200
b) $n \geq 0$, $s \geq 0$, $15n + 20s \leq 900$, $20n + 30s \leq 1200$, $500n + 1000s \leq 34500$
c) (0,0), (60,0), (0,34½), (33,18)
d) In (33,18) is de winst maximaal 7560 euro
e) De winst daalt met 360 euro.
f) De isowinstlijnen zijn evenwijdig met één van de grenslijnen.
g) Minder dan 90 euro.

10
a) …
b) $3x + y \leq 500000$
c) $3x + y \leq 500000$
d) 50000 ha

11
a) 1296 euro
b) Nee