Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen

J. ter Heege
FIsme, Universiteit Utrecht

In dit artikel wordt nader ingegaan op de dissertatie van Kees Buijs, die daar vorig jaar op promoveerde. De dissertatie beschrijft zijn onderzoek waarin een programma voor het cijferend vermenigvuldigen wordt ontwikkeld. Daarbij wordt uitgegaan van progressief schematiseren volgens het gestileerde hoofdrekenen ofwel het kolomsgewijs rekenen. Het einddoel dat Buijs zich stelde was een efficiënte leergang volgens dit uitgangspunt. Tijdens het onderzoek kwamen 'cruciale leermomenten' in beeld, die het ontwerp richting gaven.

1 Inleiding

Op 19 mei van het vorig jaar verdedigde Kees Buijs aan de Universiteit Utrecht zijn proefschrift met de titel ‘Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen’, een onderwerp dat de laatste tijd in het centrum van de belangstelling staat. De promovendus schrijft in het voorwoord van zijn dissertatie - een bijdrage te leveren aan de ‘voortgaande ideevorming en discussie’ ten aanzien van deze leerstof. I
n dit artikel zal daarom niet alleen worden ingegaan op het onderzoek zelf, maar zal er ook aandacht worden geschonken aan de consequenties die het proefschrift zou kunnen hebben voor de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs.

Maar eerst een verduidelijking van de titel. Die duidt op vermenigvuldigopgaven als 23 × 56. Kinderen zullen dit type opgaven veelal ‘onder elkaar’,cijferend uitrekenen. In het traditionele rekenen van het midden van de vorige eeuw was de gestandaardiseerde cijferaanpak eigenlijk de enige oplossing die zij voor deze opgaven leerden. Maar sinds de realistische visie, geïnitieerd door Wiskobas,[1] in het Nederlandse onderwijs is ingevoerd, worden er andere oplossingen voor deze vermenigvuldigingen bepleit. Tot in de jaren tachtig van de vorige eeuw was ‘cijferend vermenigvuldigen’ de term waarmee deze leerstof werd aangeduid, maar allengs verschoof de eenzijdige didactiek van het cijferen naar een aanpak waarin ook niet-cijfermatige elementen centraal werden geplaatst. Deze komen neer op hoofdrekenstrategieën. Deze aanpak werd bekend onder de term ‘gestileerd hoofdrekenen’, ook wel ‘kolomsgewijs rekenen’ genoemd (zie Treffers e.a., 2000). In dit ‘speelveld’ deed Buijs, in een zestal scholen, zijn onderzoek.

2 Het theoretisch kader

Buijs beschrijft in het tweede hoofdstuk van zijn dissertatie globaal de ontstaansgeschiedenis van het realistisch rekenonderwijs, en vraagt aandacht voor de theoretische aspecten van de realistische visie. Dit realistisch rekenwiskundeonderwijs moet worden gezien als reactie op ongewenste ontwikkelingen in de jaren zestig, toen, ten gevolge van de tendens tot individualisering, een sterke verschraling van het onderwijs plaats vond. Het toenmalige Wiskobasproject had tot doel een antwoord te vinden op de vraag welke richting het rekenonderwijs in Nederland zou willen inslaan. Dit, met het oog op de zeer noodzakelijk geachte vernieuwing van het rekenonderwijs. In die tijd werden ook de eerste theoretische principes ontwikkeld, die in de decennia daarna werden uitgebreid en verdiept. Zo werd aandacht gevraagd voor informele oplossingen die leerlingen in het onderwijsleerproces van het cijferen inbrachten. Het Wiskobas-project ontwikkelde ook voorbeeldmaterialen voor het onderwijs, waarin de voorgestelde richting tot uitdrukking kwam. Ook voor het cijferen werden voorbeeldleergangen ontwikkeld, die werden opgebouwd volgens het principe van het ‘progressief schematiseren’. Dit principe wordt in de dissertatie met een citaat van Treffers uit 1979 toegelicht:

> De kinderen krijgen gelegenheid om de volledige cijferhandelingen steeds meer te schematiseren, te verkorten en te verinnerlijken, zodat het standaardalgoritme voor een belangrijk deel als het ware op een natuurlijke wijze door de kinderen zèlf wordt ontwikkeld. (pag.30)

In de loop van de jaren wordt het principe van het progressief schematiseren nader uitgewerkt, waarbij de ontwikkelaars de nadruk steeds meer leggen op het inkorten van rekenprocedures, via het handig rekenen.

Het accent komt daardoor meer en meer op het hoofdrekenen te liggen en minder op het direct toepassen van door de leraar in zijn onderwijs aangedragen cijferprocedures. De leerling krijgt, met andere woorden, zelf meer invloed op de oplossingsprocedures voor dit type vermenigvuldigingen.

Buijs sluit zich in zijn onderzoek aan bij de tendens om aan het cijfermatig rekenen in het curriculum een meer beperkte rol toe te kennen dan voorheen, in het traditionele rekenen, het geval was. Het gaat hierbij om een proces dat aan het eind van de jaren zeventig werd ingezet en in de decennia daarna in onderwijsmaterialen werd vast gelegd. Hij zou juist veel aandacht willen besteden aan het prille leerproces waarin het vermenigvuldigen met meercijferige getallen wordt verkend en waarin door de leerlingen informele vermenigvuldigstrategieën en notaties worden ontwikkeld, op weg naar een nog nader te bepalen vorm van gestileerd hoofdrekenen. In zijn promotieonderzoek beoogt Buijs een programma te ontwikkelen waarin dit gestileerde hoofdrekenen beter tot z'n recht komt. En passant wil hij de twee aanpakken van de progressieve schematisering - oplossingen via het kruispuntenmodel en via het herhaald optellen - analyseren en zich daarmee een gefundeerd oordeel vormen over hun waarde voor de onderwijspraktijk.

3 Het onderzoek

In de hoofdstukken 3 en 4 van de dissertatie staat de opzet van het onderzoek centraal. Allereerst wordt de vraag beantwoord wat onder 'hoofdrekenen' moet worden verstaan. Dit begrip heeft in de loop van de tijd verschillende betekenissen gekend en haar betekenis is nu anders dan in het traditionele rekenonderwijs het geval was. Hoofdrekenen is wel gezien als 'in het hoofd rekenen', waarbij notatie van tussenantwoorden niet gewenst wordt geacht. Daarmee werd er veel nadruk gelegd op de rol van het geheugen. Anderen meenden echter dat een zekere flexibiliteit kenmerkend moet worden geacht voor het hoofdrekenen. Inzicht in getallen speelt hierbij een voorname rol. Deze moderne opvatting heeft gaandeweg terrein gewonnen, concludeert Buijs. Op pagina 15 van het proefschrift stelt Buijs zijn onderzoeksvragen, die, zoals hij zelf zegt, als globaal vertrekpunt zullen fungeren van zijn ontwikkelingsonderzoek:

– Hoe kan een onderwijsleertraject rond het vermenigvuldigen van meercijferige getallen worden vormgegeven dat aansluit bij de eigen, informele strategieën van leerlingen op dit gebied en waarin deze strategieën gaandeweg worden uitgebouwd tot efficiënte, notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen?
– Hoe ontwikkelt zich binnen zo'n leergang het aanpakgedrag en het notatiegedrag van de leerlingen? En in hoeverre biedt deze leergang ook zwakke leerlingen voldoende houvast om tot de met het onderwijs beoogde, efficiënte strategieën te komen?
– Wat zijn de voornaamste elementen van een lokale onderwijstheorie die de grondslag van zo'n leergang vormt?

Vervolgens beschrijft Buijs de relatie tussen hoofdrekenen en cijferen, twee vormen van rekenen die in traditionele methoden meestal los van elkaar worden aangeboden. Sinds het eind van de jaren negentig is hierin verandering gekomen, omdat hoofdrekenen van die tijd af als 'grondslag voor al het rekenen' werd beschouwd. Daarbij baseert hij zich vooral op de betreffende TAL[2]-publicatie, maar dezelfde teneur is ook te herkennen in de internationale onderzoeksliteratuur. Buijs geeft er voorbeelden van en analyseert deze, om daar vervolgens de conclusie uit te trekken dat ze waardevolle elementen voor zijn onderzoek bevatten. Bijvoorbeeld gebaseerd op onderzoek dat is gedaan in Zuid Afrika (Murray e.a., 1994).
Als moderne Nederlandse methoden[3] voor reken-wiskundeonderwijs de nieuwe visie op het hoofdrekenen - en al die andere, soms daaraan te koppelen didactische vernieuwingen - bevatten, is de vraag welke resultaten er door leerlingen worden behaald in het meercijferig vermenigvuldigen. Die resultaten zijn af te leiden uit de PPON-gegevens van 1997 (Janssen, e.a., 1999) en 2004 (Janssen e.a., 2005). Uit analyse van de gegevens blijkt dat er sprake is van een dalende lijn in de prestaties van leerlingen op dit gebied. Het blijkt tevens dat van 1997 tot 2004 het aantal leerlingen dat een cijferstrategie volgt, sterk is verminderd en dat het aantal leerlingen dat een hoofdrekenstrategie volgt, toegenomen is. Dit geldt voor de leerlingen die geen gebruik maken van een steunbiedende tussennotatie, maar ook voor hen die dit wel doen (pag.98). En over de betekenis van een tussen- of hulpnotatie concludeert Buijs dat 'het onderwijs er kennelijk niet in slaagt de leerlingen met een dergelijke hulpnotatie vertrouwd te maken.' En hij voegt er aan toe:

> Dit gegeven roept des te meer vraagtekens op omdat het kunnen gebruiken van zulke tussennotaties een essentieel leerdoel is van de realistische onderwijsbenadering, zoals die in de kerndoelen is opgenomen. (pag.99)

4 Een leergang ontwikkelen

In hoofdstuk 5 wordt de ontwikkeling van de leergang beschreven. Buijs schrijft dat de kern van het probleem ligt in het feit dat het tot op heden niet is gelukt om een leergang voor meercijferig vermenigvuldigen te ontwikkelen die voldoende aansluit bij informele ideeën en stra-

tegieën van leerlingen. En waarin deze strategieën gaandeweg worden uitgebouwd tot efficiënte, door adequate notaties ondersteunde hoofdrekenstrategieën in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen (pag.132). Zijn einddoel is dus een efficiënte leergang van gestileerd hoofdrekenen te ontwikkelen, wat als een uitbreiding, althans een voortzetting, van de realistische onderwijsbenadering mag worden beschouwd. Maar aansluitend is het de bedoeling een bijdrage te leveren aan de domeinspecifieke theorie met betrekking tot het realistisch reken-wiskundeonderwijs.
Vervolgens beschrijft Buijs de ontwikkeling van de door hem beoogde leergang, die aan de bovenvermelde criteria voldoet. Deze bestaat uit concreet onderwijsleermateriaal: werkbladen en lesbeschrijvingen, toetsmateriaal en leerlijnbeschrijvingen. Hij geeft aan welke situaties aanleiding geven, of kunnen geven, tot vermenigvuldigen met meercijferige getallen en welke strategieën kinderen daarbij (kunnen) volgen en komt tot een indeling van strategieën in drie categorieën (pag.138):

– herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken;
– redeneren op basis van decimaal splitsen van getallen;
– redeneren op basis van andere getalrelaties en bewerkingseigenschappen.

In een vooronderzoek, bestaande uit drie ‘onderzoekjes’ met een klein aantal leerlingen op een school, neemt Buijs een voorschot op de feitelijke ontwikkeling van zijn beoogde leergang. Hij doet met zijn prille ontwerp ervaring op in verschillende scholen en analyseert deze, met het oog op ‘een tweede ronde’. Zo blijk in dit vooronderzoek dat leerlingen een neiging vertonen opgaven in eerste aanleg op formeel niveau op te lossen, zonder gebruik te maken van de informatie die er in de opgaven uit ondersteunende tekeningetjes af te leiden is. Dat leerlingen gebruik gaan maken van de 10-keer strategie in hun oplossingen, is een belangrijk ander gegeven uit het vooronderzoek. De vooronderzoekjes leidden tot een globale opzet van de leergang, waarin drie parameters bepalend zijn (pag.152):

– de strategieën die achtereenvolgens aan de orde komen;
– de situaties waarin de opgaven ingebed zijn;
– de schematiseringen en notatievormen die leerlingen gebruiken.

Naar aanleiding van zijn ervaringen in de vooronderzoekjes spreekt Buijs zijn verwachtingen uit over het resultaat. Welke progressie zullen leerlingen als gevolg van de experimentele leergang die hij ontwikkelt maken?

> Het lijkt aannemelijk dat er, indien het voorgaande goeddeels z’n beslag heeft gekregen, in de tweede en derde fase van het onderwijsleerproces gaandeweg een zekere homogenisering zal optreden waarbij steeds meer leerlingen op een betrekkelijk hoog niveau gebruik zullen maken van de 10-keer-strategie en verkorte vormen daarvan, terwijl sommige leerlingen daarnaast andere vormen van decimaal splitsen, alsmede varia-strategieën zoals compenseren, als strategie zullen hanteren. (pag. 165)

In de eerste fase van het onderwijsleerproces ligt de nadruk op situaties die aanleiding vormen tot een oplossing met een vermenigvuldiging, in de tweede en derde fase ligt de nadruk op de ontwikkeling van strategieën. Leerlingen zullen gaandeweg steeds meer routine krijgen. ‘Dit zou ertoe kunnen leiden dat de behoefte aan een gestandaardiseerde vorm van gestileerd hoofdrekenen steeds sterker wordt ervaren.’ Dit zou kunnen worden aangegrepen om een standaardprocedure te introduceren, meent Buijs. Het is er het geschikte moment voor.

5 Cruciale leermomenten

Zijn er momenten in het leerproces die cruciaal moeten worden geacht en wanneer en hoe komen die in het onderzoek naar voren? Buijs verstaat onder cruciale leermomenten de momenten die aanwijzingen opleveren voor het al dan niet uitkomen van zijn verwachtingen. Voldoen ze aan de verwachtingen, dan geven ze aanwijzingen voor de opzet van het beoogde onderwijsleertraject. Zo niet, dan zullen ze tot heroverwegingen of bijstellingen leiden (pag.172). Tijdens deze cruciale leermomenten speelt het didactisch handelen van de leraar een belangrijke rol, bijvoorbeeld ten aanzien van de vraag op welke wijze en in welke mate de leraar sturing aanbrengt in het onderwijsleerproces en daarin bepaalde momenten van bewustwording tot stand probeert te brengen. Dat gebeurt bijvoorbeeld als leerlingen in een fase waarin dit handig is, de nulregel niet gebruiken - een geval dat Buijs met een voorbeeld uitwerkt. In het onderzoek blijkt dat er zeven van dergelijke momenten zijn, die stuk voor stuk uitvoerig de revue passeren, omdat - zoals gezegd - ze bepalend zijn voor het beoogde onderwijsleertraject. De zeven zijn (pag.177):

1 introductie van het groeperend rekenen;
2 overzicht leren houden over de werkwijze van leerlingen;
3 de basale rekenvaardigheid als voorwaardelijke kennis, zoals de elementaire optellingen en aftrekkingen alsmede de elementaire vermenigvuldigingen;
4 het leren werken met groepjes van 10; de nul-regel;
5 de ontwikkeling van adequate hulpnotaties;
6 de ontwikkeling van inzichtelijk distributief redeneren - waarbij leerlingen inzien dat een splits-oplossing als $35 \times 48 = 30 \times 40 + 5 \times 8$ onjuist is;
7 de ontwikkeling van voortgaande schematisering.

Veel van deze punten kwamen aan het licht doordat mankementen of foutieve redeneringen konden worden gesignaleerd. Bijvoorbeeld naar aanleiding van het niet uit zichzelf groeperen door leerlingen:

> (...) is ook het idee dat groepjes van 10 handig zijn omdat je 10 keer een hoeveelheid of bedrag makkelijk kunt uitrekenen, bij sommige kinderen bepaald nog geen gemeengoed. (pag.189)

Speciale aandacht zal dan ook de zogenoemde nul-regel moeten krijgen, zoals 10 × 45 = 450 (wat door verdubbeling bijvoorbeeld tot 20 × 45 = 900 kan leiden).

6 Conclusies uit het onderzoek

Welke conclusies trekt Buijs uit zijn onderzoek? In het laatste hoofdstuk, het negende, dat de titel ‘bevindingen, discussie en aanbevelingen’ draagt, komen die aan de orde. In de door hem beoogde en experimenteel genoemde leergang, die in het vijfde hoofdstuk wordt beschreven, zijn dus drie aandachtspunten van belang:

– een betere aansluiting van activiteiten op informele strategieën van leerlingen;
– beter bij de ontwikkeling van leerlingen passende notatievormen;
– een voor leerlingen natuurlijker en meer logisch proces van verkorting van de vermenigvuldigschema’s.

Als einddoel van de leergang staat hem een meer efficiënte vorm van gestileerd rekenen voor ogen, die past binnen de theoretische kaders, zoals die binnen de ontwikkeling van het realistisch reken-wiskundeonderwijs gestalte hebben gekregen.

Tijdens zijn onderzoek blijkt de moeilijkheid die leraren hebben om de essentie van enkele cruciale kwesties in de ontworpen leergang te begrijpen en in hun onderwijs te effectueren (Van Eerde, 2008). Zo zien sommige leraren niet hoe belangrijk het is bepaalde activiteiten aan te bieden die kunnen leiden tot wat Buijs ‘perspectief rijke strategieën’ noemt, strategieën dus die er sterk toe bijdragen de ontwikkeling van het leerproces in de gewenste richting te ondersteunen. Hij heeft dan vooral het ‘groeperend rekenen’ op het oog, waarin de leerlingen met groepjes werken en daarbij, zo nodig, de steun van een tekening of schema gebruiken. Het groeperend rekenen is zo belangrijk omdat het aansluit bij eigen, informele aanpakken van kinderen.

Het blijkt ook dat leerlingen de verkeerd-splitsen strategie (zoals in 42 × 36 = 40 × 30 + 2 × 6) vaker hanteren en dat die strategie tevens hardnekkiger is dan verwacht. Ook de nulregel, die stelt dat je een nul achter een getal mag plaatsen als dat getal met 10 vermenigvuldigd wordt, blijkt veel meer moeite te kosten om in te zien en toe te passen dan van te voren was ingeschat. Dit heeft ertoe geleid dat in het programma meer, en ook explicieter, aandacht aan die regel moest worden geschonken dan in eerste instantie de bedoeling was.

7 Nabeschouwing

Er komen verschillende verrassende uitkomsten uit het onderzoek naar voren, voor de onderzoeker zelf, die van deze uitkomsten dankbaar gebruik maakt om zijn ontwerp van een leergang aan te scherpen, maar ook voor de geïnteresseerde lezer. Het valt bijvoorbeeld op dat de nulregel veel meer problemen blijkt op te leveren dan verwacht. Men zou denken dat deze regel behoort tot de reeds aanwezige kennis van leerlingen, die zij hebben verworven bij het leren van de elementaire vermenigvuldigingen. Zoals het geval is bij 10 × 7 = 70, 7-met-een-nul-erachter (Oonk, 2007). Maar kennelijk is dit niet het geval. De nul-regel vloeit voort uit het maken van groepjes, waarbij vooral het samenstellen van groepjes van 10 van cruciaal belang is. Buijs stelt voor kinderen te leren het eerste getal te splitsen. Dus 27 × 34 = 20 × 34 + 7 × 34, om vervolgens de nulregel te kunnen toepassen op het eerste deel van deze vermenigvuldiging. Hij kiest hier voor omdat een tweede model, het rechthoekmodel, niet voldoet, zo zijn de ervaringen in het onderzoek.

Ze leiden gemakkelijk tot fouten als de volgende: 27 × 34 = 20 × 30 + 7 × 4, Fouten die te veel voorkomen en hardnekkig blijken te zijn. Maar dit rechthoekmodel heeft in het voorafgaande onderwijs in vermenigvuldigen een duidelijke functie, namelijk om de omkeereigenschap (4 × 6 = 6 × 4) visueel duidelijk te maken.

Het laatste punt in deze nabeschouwing betreft de sinds enige tijd oplaaiende discussie over de vermeende teruggang van de leerlingenprestaties in het rekenen. Juist op het gebied waar de pijlen van de critici van het realistisch reken-wiskundeonderwijs zich op richten, geeft het proefschrift van Buijs antwoorden, namelijk het vermenigvuldigen met meercijferige getallen, een belangrijk onderdeel van het cijferend rekenen. In dit verband is stelling 4 bij het proefschrift interessant en relevant. Deze stelling luidt: ‘De discussie over de mogelijke achteruitgang van de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs wordt vertroebeld door het feit dat te weinig rekening gehouden wordt met veranderende opvattingen over wat zinvol en maatschappelijk relevant om te leren voor de leerlingen is.’ Eigenlijk staat hier in het kort wat de betekenis van de dissertatie is in de huidige discussie over de realistische aanpak in het reken-wiskundeonderwijs. Die houdt namelijk in dat er door discussianten veel aandacht wordt geschonken aan het eindproduct van het leerproces in het vermenigvuldigen met meercijferige getallen, maar dat er van hen uit weinig oog blijkt te zijn voor de weg die leerlingen afleggen om tot deze kennis en vaardigheid te geraken.

Noten

1 Wiskobas: het onderwijsontwikkelproject voor het basisonderwijs dat van 1971 tot 1981 heeft gelopen.
2 TAL staat voor Tussendoelen Annex Leerlijnen - publiceerde voor en na het jaar 2000 enkele belangwekkende publicaties, die mede richting gaven aan het moderne reken-wiskundeonderwijs. In een van deze boekjes, met de titel Hele getallen Bovenbouw Basisschool (2000), schreef Buijs het hoofdstuk Hoofdrekenen.
3 Buijs heeft zelf een belangrijk aandeel gehad in de ontwikkeling van de moderne reken-wiskundemethode 'Wis en Reken' (uitgegeven bij Bekadidact in Baarn).

Literatuur

Buijs, K. (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen.* Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education.

Eerde, H.A.A. van (2008). Tussen droom en daad – op zoek naar een repertoire van leraren voor interactief georiënteerd reken-wiskundeonderwijs. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 27* (3/4), 48-58.

Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het eind van de basisschool 4.* Arnhem: Cito.

Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemker & N. Verhelst (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3.* Arnhem: Cito.

Murray, H., A. Olivier & P. Human (1994). Fifth graders multidigit multiplication and division strategies after five years' problem-centered learning. *Proceedings of the Eighteenth International Conference of the Psychology of Mathematics Education, 4*, 399-406.

Oonk, W. (2007). Kenmerken van vakdidactische theorie – implicaties voor de pabo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26* (3), 19-32.

Treffers, A. (ed.) (1979). *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden.* Utrecht: IOWO.

Treffers, A., A. Noteboom & E. de Goeij (2000). Kolomsgewijs rekenen en cijferen. In M. van den Heuvel- Panhuizen, K. Buys & A. Treffers (eindred.) (2000). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen Bovenbouw Basisschool.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

The thesis of K. Buijs, which he defended on May 19 of last year, is about the development of an efficacious program for algorithmical multiplication. His starting point was the approach of 'progressive schematisation' (progressieve schematisering), developed in the tradition of realistic mathematics education. From classroom observations Buijs derived sevencrucial instruction moments. The thesis has an extensive summary in English.