Zoals eenvoudig valt in te zien ......

L. Streefland.

Summary

In one of his textbooks an author on physics stated: "As you can see easily, the area below the graph corresponds to the distance covered." Our contribution is concerned with that statement. Analysis of speed-time situations, their graphs, and the mathematical and physical concepts, involved shows that the relation is not as easily seen as the author suggests.
What about speed? It is a complicated concept, not only because it is a compound magnitude, but also because of the great variety of personal experiences that might influence the pupils' view on speed, and their interpretation of it. More trouble might arise from the concept of area, which in fact has been applied in an indirect way in this particular case.
Finally the problem of the area below speed-time graphs is analysed. Many suggestions have been made in favour of a totally qualitative approach of this educational topic. Other suggestions aim at a didactical sequence in this field.
Our main point is one should not neglect the notions pupils have already acquired on speed and related topics before education in mathematics and physics starts to pay attention to this subject matter.

Inleiding

"Zoals eenvoudig valt in te zien stemt de oppervlakte onder de kromme overeen met de afgelegde afstand", hield een schoolboekauteur zijn leerlingen eens voor. Deze geruststelling stond in het hoofdstuk 'Kinematica'. Het boekje was bestemd voor 3-HAVO. De auteur behandelde afstand, tijd, hun samen opgaan in snelheid en naar ik meen – zeker weet ik het niet meer – enkele verschillend geaarde bewegingen, zoals de eenparige beweging en de eenparig versnelde. De opzet maakte een deductieve indruk: definiëring en afleiding van formules gepaard met de nodige grafieken, vanwege de concreetheid. Omdat ik het niet meer precies wist ging ik op zoek. Mijn pogingen om bedoeld boekje in een gespecialiseerde bibliotheek te achterhalen, liepen op niets uit. Wel vond ik er 'Natuurkunde op corpusculaire grondslag'. Ik dacht bij mezelf: "Tot wie zouden de auteurs zich richten met zo'n titel?" Over deze natuurkundemethode wil ik het echter niet hebben en over de andere evenmin.

Terug naar het gegist citaat "De oppervlakte onder de kromme". U hebt inmiddels natuurlijk allang begrepen dat het om een snelheid-tijd-grafiek gaat. 'De afgelegde afstand stemt overeen met de oppervlakte onder de kromme'. Slordig gezegd, maar voldoende duidelijk voor iedereen die (al) weet waarover het gaat. De vraag is echter, of het echt wel zo eenvoudig is in te zien. Welk inzicht vraagt dat van de leerlingen? Van de geciteerde uitspraak gaat de suggestie uit dat het voorafgaande onderwijs (volgens dit boekje) garant staat voor het vereiste inzicht. Het is *eenvoudig* in te zien. Dus kan de doorbraak naar volledig inzicht nauwelijks nog inspanning kosten.

Of richtte de auteur zich wellicht even tot zijn collega, net als die andere auteurs met hun voor leerlingen duistere titel? Bedoelde hij met een knipoog naar de docent te zeggen:

"Jô, op het interval $[t_0,t_1]$ integreer je gewoon de snelheid als functie van de tijd ($t \rightarrow v(t)$) en dan ben je er: $\int v(t)dt$. Dat is immers precies de oppervlakte onder de kromme op het interval $[t_0, t_1]$. (fig. 1)

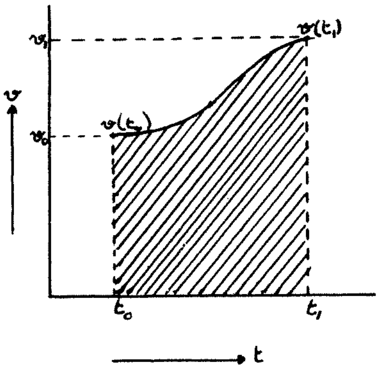

fig. 1

Als bevestiging hiervan kan er dan omgekeerd nog bijgedacht worden dat de eerste afgeleide functie van afstand als (continu, respectievelijk differentiëerbare) functie van de tijd overeenstemt met de snelheid. Evenwel, de uitspraak was bedoeld voor leerlingen van 3-HAVO. Die zijn aan differentiëren en integreren nog niet toe, als ze dat al ooit komen. (Aan integreren zeker niet, omdat het niet tot het programma behoort). Voor de leerlingen kan de auteur dit dus niet verondersteld hebben.

Overigens is het wèl zo dat snelheid en versnelling – historisch gezien – aanleiding gegeven hebben tot de ontwikkeling van de differentiaalrekening. Met name bij Newton (1642-1727) – één van de grondleggers van de differentiaalrekening – was deze materie verbonden met beweging en snelheid. Ook voor de

Oppervlakte onder de kromme en afstand.

Ik kom nu toe aan de kern van mijn betoog. 'Wat eenvoudig valt in te zien' is immers tot nu toe nog nauwelijks aan bod geweest. Bij de didactische opbouw van de 'oppervlakte kwestie' ligt een start met de eenparige beweging voor de hand, althans in schoolboeken gebeurt het zo nog al eens. In geval van een beweging met constante snelheid valt de afgelegde afstand bij gegeven duur eenvoudig vast te stellen. Oppervlakte onder de 'kromme' als maat voor de afgelegde weg dringt zich als vanzelf op. 'Oppervlakte is lengte keer breedte' en 'weg is snelheid keer tijd' zijn visueel hetzelfde geworden (fig. 6).

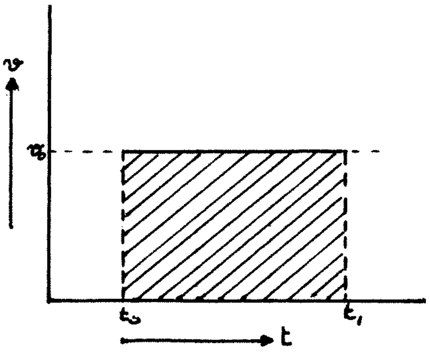

fig. 6

De vraag is of een dergelijke benadering wel helemaal past bij de suggesties tot nu toe en of een wat ruimere opstelling ook in deze niet de voorkeur verdient. Stellig is de associatie afstand-oppervlakte in dit specifieke geval overtuigend genoeg. Maar, is daarmee eveneens een opening geboden naar het postvatten van het besef van meer algemene geldigheid? Bovendien kenmerkte onze uitlijning zich tot nu toe door verscherping van wiskundige middelen om op de geëxploreerde snelheidsverschijnselen greep te krijgen. De instap was globaal, de wiskundige beschrijving kwalitatief. Daarom mochten en konden de grafieken nog 'buitenmodel' zijn, met al hun grilligheid recht doend aan snelheidsverloop, zoals het zich in de werkelijkheid kan voordoen. Wel werd gesuggereerd dat verscherping van de toegepaste wiskundige werktuigen – zoals numerieke beschrijving, het specificeren van de grafieken, het vastleggen van opvallende verbanden in formules – niet zou mogen uitblijven. Ook bij deze kwestie verdient een kwalitatieve benadering met grilliger gevallen in beginsel de voorkeur.

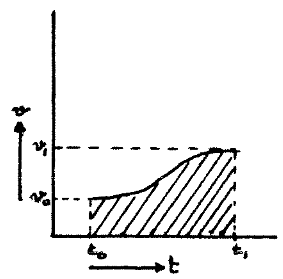

fig. 7a

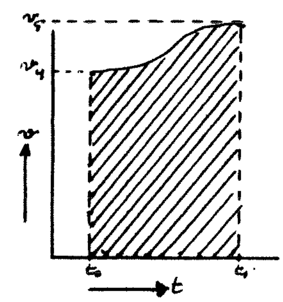

fig. 7b

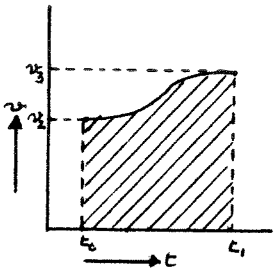

fig. 7c

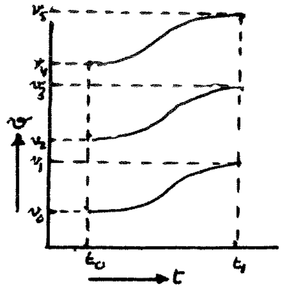

fig. 7d

Bijvoorbeeld bij de drie gegeven snelheidsgrafiekjes (fig. 7) – vanzelfsprekend ontlokt aan een motiverende probleemstelling – het nagaan van overeenkomsten en verschillen en het ordenen van de drie gevallen naar afgelegde weg.

Het identieke snelheidsverloop is natuurlijk opvallend. In een eerder stadium is mogelijk al ter sprake geweest dat bij snelheden met constant verschil, de grafieken 'evenwijdig' zijn en omgekeerd. Het in elkaar passen van de drie gevallen (fig. 7d) maakt de ordening naar afgelegde afstand al zichtbaar en is bovendien eenvoudig te rechtvaardigen: "Als je in dezelfde tijd met hogere snelheid rijdt, kom je verder." De vraag is nu of dit vanuit de grafiek eveneens gemotiveerd kan worden. Het vermoeden dat de oppervlakte onder de kromme hiermee best eens iets te maken kan hebben, kan hier opkomen. We kunnen de doorbraak van dit vermoeden van deze notie nog een handje helpen door te pogen de afstandsverschillen onder gebruikmaking van de grafieken vast te stellen, althans nader te preciseren.
Om het niet op één nacht ijs te laten aankomen, dient ook naar de volgende gevallen (of dergelijke) gekeken te worden om het 'oppervlakte-vermoeden' nog wat te verscherpen.

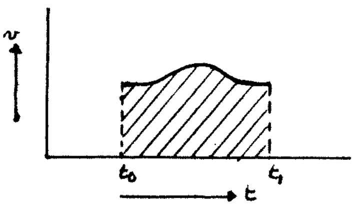

fig. 8a

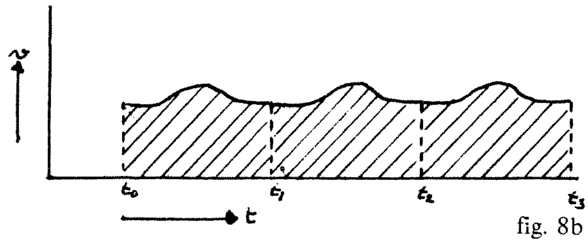

fig. 8b

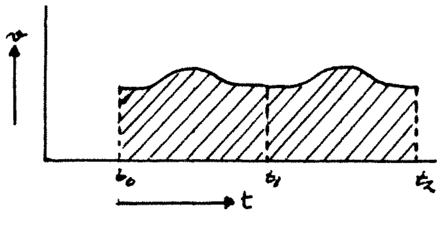

fig. 8c

Hier kunnen de relaties tussen de wegen al in getallen worden uitgedrukt. In het derde geval is de afgelegde afstand tweemaal zo groot als in het eerste geval en bij de tweede situatie zelfs driemaal. Allerlei vragen kunnen met dergelijke voorbeelden verbonden worden, zoals: "Wie bedenkt een snelheidssituatie waarbij een dergelijke herhaling zich in de grafiek kan voordoen". Bijvoorbeeld: Het snelheidsverloop van een raceauto op een bepaald circuit voor respectievelijk 1, 2 en 3 ronden ergens tussen "start" en "finish". Over de vorm van dit circuit zijn eveneens enkele uitspraken te doen. (Merk op dat het begrip periodieke functie eveneens in het 'snelheidsspel' is).
Ik ga nog even terug naar het vorige geval. Bij de afzonderlijke grafieken kan gevraagd worden tussen welke 'mooie' grenzen de afgelegde weg ligt en hoe die grenzen in de grafiek zichtbaar gemaakt kunnen worden. (fig. 9). Het eerder ontdekte verband voor

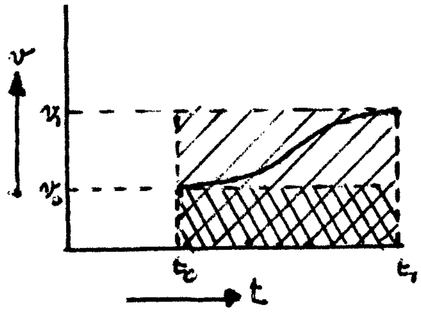

fig. 9

een beweging met constante snelheid $s = v \times t$ kan dan worden toegepast. Bij aanzienlijk verschil tussen hoogste en laagste snelheid vallen de grenzen voor de afgelegde afstand natuurlijk wel erg grof uit.

Is het niet mogelijk om die grenzen wat dichter bij elkaar te brengen waarbij het principe van de rechthoeken gehandhaafd blijft?
Het opdelen van $[t_0, t_1]$ in twee intervallen biedt soelaas. (fig. 10).
De ondergrens neemt met een flink bedrag toe en de bovengrens kan aanzienlijk 'slinken'. Voor het vervolg mikken we natuurlijk op voortgaande verfijning van het tijdinterval.

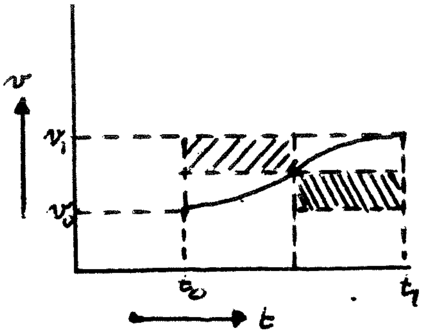

fig.10

Zo zijn we vanuit deze nog weinig precieze benadering toch al op weg naar een formeel bewijs, dat stoelt op het met toenemende precisie insluiten van de afgelegde weg tussen een onder- en bovengrens. In het proces van toenemende precisie van groter wordende nauwkeurigheid is het limietbegrip vervat. Op den duur worden de vastgestelde verschillen verwaarloosbaar klein. Tevens zijn de eerste schreden gezet op weg naar het integreren volgens Riemann.

Besluit.

Als didactische uitlijning is voorgaand verhaal verre van volledig, te fragmentarisch. Het was echter ook niet de bedoeling iets dergelijks te produceren. Wat ik heb willen laten zien is, dat van de leerlingen geeist inzicht voor het doorgronden van zekere kwestie niet bezien dient te worden vanuit de optiek van leerboekauteur, docent of vakgebied, doch vooral vanuit de noties die de leerlingen reeds van bepaalde zaken hebben. Zoals (nu) eenvoudig valt in te zien, valt niet (meer) zo eenvoudig in te zien dat de oppervlakte onder een snelheidskromme de afgelegde weg vertegenwoordigt.

(1) Dormolen, J. van en M. Kindt, *Anticiperen op de behandeling van x*, Euclides jrg 53, 1978, p. 253-261.
(2) Goddijn, A.J.: *Lijngrafieken in de Gansstraat*, Wiskrant 11, jrg. 3 1978, pag. 1-3.
(3) Janvier, C.: *The interpretation of complex Cartesian Graphs, representing situations*, dissertatie, Nottingham, 1978.