Onbekende en onbepaalde

H. Freudenthal

Summary

Unknown and indeterminate
It is an old controversy in algebra teaching whether to start using letters to represent unknowns or indeterminates, in other words to start with equations or equalities. Based on a teaching experiment a compromise is being proposed: solving inequalities.

Met een meisje dat ik een beetje bijwerk in wiskunde, was ik uiteindelijk zover dat ze vergelijkingen zoals

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

volgens de regels van de kunst kon oplossen. Ik kreeg er een vreemd gevoel bij: hoe beter het ging, des te dringender vroeg ik me af of ze er nog iets van begreep. Ik vond het tenslotte beangstigend zo goed als het ging.
Toen kreeg ik een ingeving. Ik tekende een horizontale getallenlijn, d.w.z. zonder getallen, alleen met een nulpunt en streepjes erop, nam een interval tussen duim en wijsvinger, om het nulpunt, maar niet symmetrisch en vroeg haar: "als x hier tussen ligt, waar ligt dan 2x?" Ze deed het, eveneens met duim en wijsvinger, goed. "Waar ligt ½x?" "Waar ligt x + 2, x – 2?" "Waar ligt –x?" Hier kwam de eerste hapering, maar ook dit lukte. Daarna vroeg ik door: "Als 2x hiertussen ligt, waar ligt dan x? Als ⅓x hiertussen ligt, waar ligt dan x?" Na nog wat vragen van dit soort kwamen de sommetjes. Ze wist al dat je "x tussen –3 en 2" ook $-3 < x < 2$ kunt schrijven. Stapsgewijs stuurde ik af op sommen zoals

als $-5 < \frac{2}{3}x - 1 < 6$

wat kun je dan over x vertellen? En

als $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x < \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

wat weet je dan omtrent x?
Het lukte en voor het eerst was ik er vast van overtuigd dat haar rekenen met x meer was dan alleen maar routine.
Dit ter inleiding om uit de doeken te doen hoe ik op het idee ben gekomen dat ik straks zal uiteenzetten.
Zolang ik me met wiskunde-didactiek bezig heb gehouden en volgens de oudere literatuur die ik kan raadplegen, nog langer, zijn ze het er niet eens over geweest of je algebra – of preciezer: het letterrekenen – moet starten met letters als *onbekenden* of als *onbepaalden*, met het oplossen van vergelijkingen of het bewerken van letteruitdrukkingen: haakjes erin- of wegwerken en wat dies meer zij.
Als ik me het goed herinner was ik aanvankelijk – en dat is nu vrij lang geleden – voorstander van de start met *onbekenden*. Ik herinnerde me de aloude denksommen uit het toenmalige rekenonderwijs van

- Een steen weegt 1 kg plus de helft van zijn eigen gewicht – hoeveel weegt die steen?
- Jan heeft 4 knikkers meer dan Piet, samen hebben ze 10 – hoeveel heeft ieder?
- Een stal met kippen en konijnen, 10 koppen en 24 poten – hoeveel kippen, hoeveel konijnen?
- Wanneer overdekken de klokwijzers elkaar?

en ik verplaatste mezelf in de wiskundeleraar die zijn verbijsterde leerlingen laat zien hoe je zoiets met x ging doen. De instap via vergelijkingen leek me door grote motiverende kracht uit te munten.
Het was in de Wiskunde Werkgroep van de WVO (Werkgemeenschap voor Vernieuwing Opvoeding en Onderwijs) waar ik in dergelijke discussies en ik meen ook onder de invloed van de Van Hiele's naar de andere kant ging overhellen. In de tijd dat ik "Mathematik als pädagogische Aufgabe" (1) schreef, meende ik

> dat de onbepaalden betere voorbeelden van veelzinnige namen zijn dan de onbekenden. In een algebra die nabij de toepassingen wordt beoefend, melden de onbepaalden zich als het ware vanzelf aan: in alle soorten formules waarmee de realiteit in natuur en maatschappij wordt aangepakt. Bovendien staat de onbepaalde nader bij het functiebegrip.

Wie bepaalde stukken van mijn Didactische Fenomenologie heeft gelezen, zal me misschien weer naar de kant van de vergelijkingen menen te zien overhellen. Brainstorming, ontwikkeling en onderzoek in Wiskivon van de laatste jaren hebben er wellicht iets mee te maken. De instap die me dan voor ogen stond was er een via dat soort puzzeltjes en trucjes zoals

> Denk een getal, verdubbel het, tel er 10 bij op, neem er de helft van – wat komt er uit?

Of

> Denk een getal, verdubbel het, tel er 10 bij op, neem er de helft van, trek het gedachte getal af. Er komt 5 uit.

Wel, in het eerste geval is het gedachte getal inderdaad een onbekende, de oplossing van

$\frac{1}{2}(2x + 10) = u$

waarbij u de "uitkomst" is, maar in het tweede is x een onbepaalde die optreedt in de identiteit

$\frac{1}{2}(2x + 10) - x = 5.$

Met beide gevallen voel ik me niet zo erg gelukkig. In beide mis ik te zeer de variabiliteit van x. In het eerste is er helemaal geen sprake van; er is maar één x die voldoet en die moet je uitrekenen. In het tweede komt de variabiliteit er achteraan sloffen, zo van "nu met een ander getal in gedachten" of "klopt het bij de anderen ook?"

Men begrijpt nu waar ik naar toe wilde met het relaas van daarstraks. Ik heb toen het begrip van mijn leerlinge voor de "regels van de kunst" met ongelijkheden willen toetsen. Maar hoe zou het zijn als je echt zou starten met ongelijkheden? In het begin ongeveer zoals ik het met het meisje deed. Of een stelletje kale getallenlijnen parallel onder elkaar. Op de bovenste een interval vet aangediend. Daar ligt x. Dik op de volgende lijn het interval aan waar dan 2x ligt, op de derde dat waar ⅓ x ligt, en ga zo maar door, tot zeg maar 3 – ⅔ x. Dit kan dan al of niet vergezeld gaan van het vertalen van intervallen in algebraïsche ongelijkheden en omgekeerd. Teken het interval beantwoordende aan

$-7 < x < 1$ enz.

Daarna wordt de tegengestelde weg gevolgd. Gegeven het interval waar 2x in opgesloten zou zijn, waar ligt dan x? Idem van ⅓ naar x toe en steeds maar ingewikkelder, waardoor je geleidelijk gedwongen wordt de meetkundige kijk voor de algebraïsche routine in te ruilen.

Hoe verder? Bijvoorbeeld met twee variabelen x en y, elk in een interval opgesloten. Wat valt er over $x + y$, $x - y$, $2x - 3y$ enz. te zeggen? En de tegengestelde weg: Intervallen aangegeven voor $x + y$ en $x - y$ en de vraag wat er over x en y afzonderlijk te zeggen valt.

Het hoeft trouwens niet zo star. Je kunt er ook vragen instrooien zoals

- Vader en zoon zijn samen 50 jaar oud – wat denk je over elk afzonderlijk?
- Bij een fietstocht heb ik na één uur meer dan een derde van de weg afgelegd en na twee uur minder dan de helft. Hoe lang duurt de tocht?
- Een school met 6 klassen heeft 175 leerlingen. In geen klas zitten er meer dan 30 leerlingen. Kun je een uitspraak doen van: "in geen klas zitten minder dan ... leerlingen?"

Verzint u er nog meer? Veel succes!

(1) Freudenthal H, *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, pag. 264.