Onderzoek wiskunde-onderwijs: het CSMS-project

A. Treffers

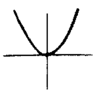
Summary

This is a review of the interesting British CSMS project (Concepts in Secondary Mathematics and Science) which uncovered the informal "naive" methods of 11-16 olds in different areas of secondary mathematics. CSMS's discovery of the contradistinction of "child method system versus taught formal system" is quite intriguing. It stimulates developing more effective, more child oriented mathematics education: mathematics as a human activity in the IOWO terminology.

Onderzoek van wiskunde-onderwijs levert niet altijd onverwachte resultaten op. Vaak is het zelfs zo dat ervaren onderwijsmensen vrij nauwkeurig kunnen voorspellen wat kinderen op een bepaald terrein presteren. In zekere zin rusten bijvoorbeeld de examens op zo'n ervaringsbasis.
Neem bijvoorbeeld de volgende opgaven:

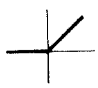
1. Welke van de volgende functies zijn continu?

$f_1(x) = x^2$

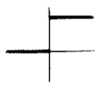


$f_2(x) = 1/x \ (x \neq 0)$

$f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0) \\ x & (x \geqslant 0) \end{cases}$



$f_4(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$



$f_5(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ rational}) \\ 1 & (x \text{ irrational}) \end{cases}$

(Tall en Vinner, 1981).

2. 7w + 22 = 109
   7n + 22 = 109.
   Is w groter, gelijk of kleiner dan n?

(Herscovics en Kieran, 1980).

3. 4 = • − 9
   Vul in welk getal op de plaats van de stip moet staan.

Degenen die respectievelijk les geven aan leerlingen van de bovenbouw van het VWO, de aanvangsklassen van het voortgezet onderwijs en de middenbouw van het basisonderwijs weten veelal welke fouten in voornoemde opgaven gemaakt worden en wat er aan begrip kan schorten. Al staat men soms wel te kijken van het grote percentage leerlingen dat de betreffende opgaven fout maakt. Wie zou bijvoorbeeld vermoeden dat ongeveer de helft van de twaalfjarigen de tweede opgave niet correct kan oplossen, d.w.z. als antwoord geeft dat de oplossing van de eerste vergelijking groter is dan die van de tweede, omdat de w na de n komt in het alfabet, of dat niets over het antwoord gezegd kan worden vooraleer w en n zijn uitgerekend. Hetzelfde geldt voor de eerste en de derde opgave: ook hier blijkt dat bij vele leerlingen iets schort aan respectievelijk het begrip continuïteit en begrip van het '=' – teken.

Het CSMS-project

Is het eigenlijk wel zo dat we als onderwijsgevenden behoorlijk zicht hebben op wat kinderen kunnen? En met name dan op de onderdelen van de toepassingen van de basisoperaties op gehele getallen, breuken en kommagetallen, en op verhoudingen, oppervlakte, het lezen van grafieken – dus gebieden die vooral ook in het basisonderwijs liggen en waarvan in het voortgezet onderwijs eigenlijk verondersteld zou mogen worden dat de kinderen er behoorlijk in thuis zijn.
Wat te zeggen van bijvoorbeeld de volgende opgave?

4. The Green family have to drive 261 miles to get from London to Leeds.
   After driving 87 miles they stop for lunch.
   How do you work out how far they still have to drive?

87 × 3	261 + 87	87 : 261	261 − 87
261 × 87	261 : 87	87 − 261	87 + 174

(Hart, 1981 a, p.24).

Welnu 60% van de twaalfjarigen in Engeland maakt deze opgave goed, 19% kruist als antwoord 87 – 261 aan en de rest iets anders. De dertienjarige Tony geeft aan welke problemen hier opduiken. (In dit interview werden de getallen 87 en 228 gebruikt).

"Tony:	You add it on again ... you add ... three on to make 80 (!) and then another 20 to make 100, then 128 from that is ... one hundred and forty something.
Interviewer:	Which of those (expressions) do you think....?
T:	That one (87 + 228).
I:	Are you sure it's that one? Did you add 87 onto 228?
I:	No, I built it up.
I:	You built it up? Do you think it's any of these (expressions)?
T:	I think it's this one (87 : 228).
I:	87 divided by 228?
T:	No ... I don't know the sign for adding it on."

(Hart, 1981_a, p. 29).

Op zich is er natuurlijk geen enkel bezwaar dat Tony dit vraagstuk oplost d.m.v. doortellen i.p.v. via aftrekken. En dat hij dan geen adequate uitdrukking voor het bijtellen kon vinden in het aangeboden rijtje, dat spreekt. Maar er is meer aan de hand dan op het eerste gezicht lijkt. Tony vertegenwoordigt namelijk een categorie kinderen die alle basisoperaties in toepassingsproblemen terugbrengt tot optellen: aftrekken wordt bijtellen, vermenigvuldigen herhaald optellen en delen herhaald bijtellen. Met het gevolg dat deze kinderen omslachtige berekeningswijzen gebruiken, terwijl ze de betreffende basisalgoritmen zeer wel beheersen. Wat echter op den duur gaat drukken: de kinderen zullen bij bewerkingen met kommagetallen en letters zeker in de problemen komen, omdat hier hun 'primitieve' operaties niet goed meer werken. Let wel, het gaat hierbij om een groot percentage van de twaalfjarigen: grofweg de helft van de kinderen heeft met name problemen met het herkennen en correct noteren van de vermenigvuldig- en deeloperaties in toepassingssituaties!
Bij kommagetallen is het probleem zelfs nog groter.

5. The price of minced beef is shown as 88.2 pence for each kilogram.
What is the cost of a packet containing 0,58 kg of minced beef?

88,2 + 0,58	0,58 : 88,2
88,2 : 0,58	0,58 – 88,2
88,2 – 0,58	0,58 × 88,2

6. The cost of the 6,44 gallons of petrol was £ 4,86.
What could the price of one gallon be?

6,44 + 4,86	4,86 : 6,44
6,44 : 4,86	4,86 – 6,44
6,44 – 4,86	4,86 × 6,44

(Brown, 1981).

Slechts 17% van de twaalfjarigen gaf het correcte antwoord bij opgave 5, terwijl 23% opgave 6 juist beantwoordde. Bij de laatste opgave dient echter aangetekend te worden dat 39% de omkering (6,44 :4,86) aankruiste. Dit onjuiste gebruik van de commutatieve eigenschap is overigens ook kenmerkend voor het delen met gehele getallen: in ongeveer de helft van de gevallen zien we inversie optreden.
Nogmaals: hebben we als onderwijsgevenden behoorlijk zicht op wat kinderen kunnen?
In het basisonderwijs ligt de nadruk bij de basisoperaties vooral op het leren van de algoritmen; toepassingen komen er (met uitzondering van de allernieuwste reken-wiskundemethoden) nogal bekaaid vanaf; de eindtoets van het CITO bevat geen enkel toepassingsprobleem waarin specifiek naar de bewerking gevraagd wordt ....
Tot voor kort ging men in het voortgezet onderwijs veelal aan de problematiek van het rekenen voorbij, en voorzover dit niet gebeurde kwam de aandacht toch in het algemeen niet primair op toepassingsproblemen te liggen als hiervoor geschetst.
Kortom, we zijn slechts zeer ten dele op de hoogte van wat kinderen van omstreeks 12 jaar in het gebied van de toepassingen kunnen presteren. En hetzelfde kan gezegd worden van hetgeen de kinderen in de eerste klassen van het voortgezet onderwijs als geheel van wiskunde begrijpen en kunnen toepassen.
Nu is er in Engeland een project uitgevoerd dat ons heel wat gegevens aanreikt, die ook voor het Nederlandse onderwijs belangwekkend lijken. We doelen op het CSMS-project: Concepts in Secondary Mathematics and Science project.
Vanaf 1977 hebben leden van het CSMS-team bestaande uit Hart, Brown, Küchemann, Kerslake, Ruddock en McCartney in tijdschriften als 'Mathematics in School' en 'Educational Studies in Mathematics' hun onderzoeksresultaten gepubliceerd.
In 1981 is hun hoofdwerk gepubliceerd: 'Children's Understanding of Mathematics: 11-16'. (Hart, 1981_a).

Kinderen van 11-16 en wiskunde

In het voorgaande hebben we enkele voorbeelden genoemd uit het CSMS-project. 'Children's Understanding of Mathematics: 11-16' bevat echter een veel ruimer gebied dan de toepassingen van het rekenen waarop wij zojuist duidden.
Er is research gedaan omtrent:
- meten: omtrek, oppervlakte en inhoud ($12\text{-}14^+$)
- basisoperaties: toepassingen in tekstopgaven ($11\text{-}12^+$)
- plaatswaarde en decimale getallen ($12\text{-}15^+$)
- breuken: vergelijken van breuken, opereren ($12\text{-}15^+$)
- positieve en negatieve getallen ($13\text{-}15^+$)
- verhoudingen: toepassingen ($13\text{-}15^+$)
- algebra: verschillende aspecten van lettergebruik ($13\text{-}15^+$)
- grafieken: ($13\text{-}15^+$)
- draaien en spiegelen ($13\text{-}15^+$)
- vectoren en matrices ($14\text{-}15^+$)

Dit gebeurde aan de hand van schriftelijke opgaven. In de ontwerpfase werden de vragen ontworpen en per onderdeel tientallen interviews afgenomen welke nauwgezet geprotokolleerd werden, de vragen werden zonodig bijgesteld, de oplossingsmethoden geïnterpreteerd en globaal ingedeeld naar niveau, de scholen geselecteerd en de schriftelijke resultaten van zo'n 10.000 kinderen geïnventariseerd ....
De laatse hoofstukken van het boek bevatten een vergelijking van de resultaten van de jaargroepen, een beschouwing over leerhiërarchieën en een verhandeling over de implicaties van het gevondene voor het onderwijs. Wat zijn nu grofweg de resultaten van het onderzoek?

TABLE I

Percentage of children in each age group operating at or below Stage 1 (CSMS-Mathematics). (Figures in brackets give the percentages at Stage 2.) In order to be considered as operating at a given stage a child must have correctly answered two-thirds of the items at that and each lower stage

Topic	1st Yr (Age 12)	2nd Yr (Age 13)	3rd Yr (Age 14)	4th Yr (Age 15)
Algebra		60 (23)	41 (24)	37 (23)
Decimals	56 (29)	45 (31)	35 (34)	25 (34)
Fractions	33 (10)	30 (17)	42 (23)	36 (24)
Graphs		40 (55)	42 (48)	27 (57)
Measurement	47 (47)	40 (44)	28 (50)	– (–)
Ratio		60 (–)	56 (–)	44 (–)
Reflections		47 (17)	41 (16)	32 (19)
Vectors			44 (36)	37 (31)

(Booth, 1981, p.30).

Kinderen die op niveau 1 werken gebruiken 'primitieve' zelf gevonden strategieën die niet overeenstemmen met hetgeen ze op school als 'officiële wiskunde-methode' gehad hebben. Tony die we straks citeerden is een voorbeeld van een leerling die wat de basisoperaties betreft op het laagste niveau werkt.
Nu heeft men voor ieder van de genoemde onderwerpen een hiërarchie van niveaus ontworpen (zie ook Hart, 1981_b). Het zou hier te ver voeren om voor ieder onderdeel de niveau-indelingen te beschrijven. Maar men kan zich enigszins voorstellen hoe het eerste niveau in elkaar zit:

- oppervlakte bepalen door louter tellen
- vergelijkingen met één onbekende oplossen door proberen
- verhoudingen bepalen d.m.v. verdubbelen etc.

Welnu, uit de tabel kon men aflezen dat, op z'n zachtst uitgedrukt, de methoden die kinderen gebruiken niet stroken met wat ze op school leren, ofwel met het niveau wat ze op grond van het onderwijs geacht worden bereikt te hebben.
Nu is dit op zichzelf niet nieuw: denk bijvoorbeeld aan het werk van de Van Hiele's m.b.t. meetkunde. Maar wat wel nieuw is, is het feit dat hier aangetoond wordt dat die niveaukloof voor het gehele wiskunde-onderwijs geldt en over de volle breedte van het onderwijs loopt. Er blijkt a.h.w. een scheiding te bestaan tussen de 'kinderlijke' wiskunde als activiteit en de wiskunde als vak.

In een wat ander verband spreekt Margaret Donaldson in haar uitnemende boek 'Children's Minds' (1978) van 'apartheid', van het niet-ingebed-zijn van de leerstof in de kinderlijke denkbeelden.
Nu hoeft men door deze onderzoeksresultaten natuurlijk niet in paniek te raken, omdat het heel natuurlijk lijkt dat het goede begrip het onderwijs wat naijlt. Het is echter wel zaak om de aansluiting van kind en onderwijs niet te verliezen. En het CSMS-onderzoek drukt ons wat dat aangaat nog eens met de neus op het feit dat het wiskunde-onderwijs globaal genomen onvoldoende is aangepast aan de kinderen, met name aan de kinderen die wat men noemt geen wiskunde-knobbel hebben. Het is echter wel de vraag hoe men profijt kan trekken uit de resultaten van het CMSM-onderzoek.

Wat te doen?

Lesley Booth (1980) zegt hierover het volgende:
"In summary, it is suggested that if it can be shown that the child is in fact operating in mathematics within a system of his own which belongs to a different 'universe of discourse' to that of mathematics, then it follows that:
(a) merely demonstrating methods in the formal system will have little success;
(b) restricting the methods taught to those which are consonant with the child's, while perhaps gaining the child's understanding initially, will be ultimately ineffective so long as those methods remain within the 'universe of discourse' defined by the child's approach;
(c) ways must be found of making the child aware of the limitations of his own strategies and of the existence and power of the formal ('disembedded') system. Only then can research into the ways of effectively teaching the methods of this system begin to show results." (p. 39-40).
Inmiddels is er een vervolg op het CSMS-project gekomen waarin overal ook de vertaling van de bevindingen naar de onderwijspraktijk de aandacht krijgt met daarbinnen de kernvraag 'Hoe kunnen we de kinderen bewust maken van de beperkingen van de eigen methodiek en van de kracht van het wiskundige systeem'? Er zou over dit punt nog wel het een en ander opgemerkt kunnen worden, evenals over de sterk globaliserende onderzoeksaanpak van het CSMS-project, welke tot gevolg heeft dat men geen enkel zicht krijgt op het verband tussen de resultaten van het onderzoek i.c. de prestaties van de kinderen en het genoten wiskunde-onderwijs en niet te vergeten over de vele oplossingen die er her en der reeds aangedragen zijn. Maar we zullen het hierbij moeten laten en de geïnteresseerde lezers verwijzen naar de volgende publicaties, waarvan we vooral het overzichtswerk van Hart (ed) van harte aanbevelen, alsmede het niet-specifiek op het wiskunde-onderwijs gerichte werk van Donaldson.

(1) Booth, L.R., *Child-methods in secondary mathematics,* Educational Studies in Mathematics, 1981, 12, pag. 29-41.

(2) Brown, M., *Is it an add, miss? (part 3),* Mathematics in School, 1981, 10, pag. 26-29.
(3) Donaldson, M., *Children's Minds,* London: Croom Helm, 1978.
(4) Hart, K. (ed), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16,* London: Murray, 1981_a.
(5) Hart, K. (ed), *Hierarchies in Mathematics Education,* Educational Studies in Mathematics, 1981_b, 12, pag. 205-218.
(6) Herscovics, N. & C. Kieran, *Constructing meaning for the concept of equation,* Mathematics Teacher, 1980, 73, pag. 572-580.
(7) Küchemann, D., *Children's Understanding of numerical variables,* Mathematics in School, 1978, 7, pag. 23-26.
(8) Tall, D. & S. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 1981, 12, pag. 151-169.
