Matrices en de Stille Zuidzee

Impressie van het Hewet-experiment (I)

J. de Lange Jzn
OW & OC, R.U. Utrecht

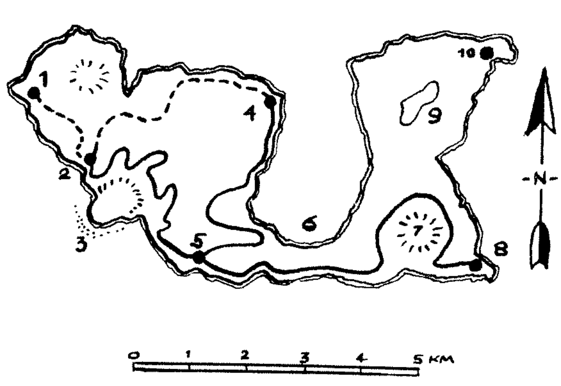
Summary

In August 1981 experiments started in the Netherlands in order to develop a new math curriculum for the last two years of secondary education. One of the main goals is to prepare students in a better way for the university. Radical changes are expected for the students who are preparing for a study in economics, sociology, psychology and similar studies.
One of the main subjects will be matrices. The article describes the first month of experiments with student material about matrices. Distance- and connectivety matrices, and the relation with graphs form the subjects, within a geographical context formed by islands in the South Pacific.

Inleiding

In het kader van de experimenten Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en Wiskunde II V.W.O. werd op de Lorentz-Scholengemeenschap in Haarlem en het Liemers College in Zevenaar in augustus begonnen met speciaal voor dit doel geschreven leerlingenpakketjes.
Twee uur in de week werd gewerkt met "Matrices", de andere twee uur met "Kansrekening".
Dit artikel is niet meer dan een impressie van de eerste weken in Haarlem en dan nog alleen over "Matrices". Het is een verslag waarin een inzicht wordt gegeven in het boekje waarmee gewerkt wordt en een aanduiding van de sfeer waarin het experiment zich afspeelt.

Het eerste hoofdstuk



1. Point Hau
2. Lalou
3. lalou Lagoon
4. Moau
5. St. Haula
6. Lonely Bay
7. Gunung Suray
8. Kota Hau
9. Lake Lae
10. Kaap Hau

fig. 1

Hiernaast een kaart van het – denkbeeldige – eilandje HAU, gelegen in de Stille Oceaan en, zoals zoveel eilandjes daar, vulkanisch van oorsprong en gedeeltelijk met oerwoud bedekt. Je ziet slechts drie verharde wegen, van de "hoofdstad" St. Haula naar Moau en van St. Haula naar Lalou; en van St. Haula naar Kota Hau; de lengtes zijn respectievelijk 4, 7 en 9 km. Verder zijn er wegen van Lalou naar Moau en Pt. Hau, resp. 6 en 3 km. In het kader van de ontwikkelingshulp kan er een schooltje worden gebouwd. Besloten wordt deze school in één van de vijf aan de wegen liggende plaatsen te zetten.

- *1. Welke zaken zullen een rol kunnen spelen bij het bepalen van de "juiste" plaats van een school?*

Eén van de zaken die een rol zal (kunnen) spelen is het aantal kilometers dat een leerling zal moeten fietsen of lopen om de school te bereiken. Het maken van een afstandstabel lijkt daarbij gewenst. Dat gaat iets gemakkelijker als je het wegennet op HAU wat schematiseert:

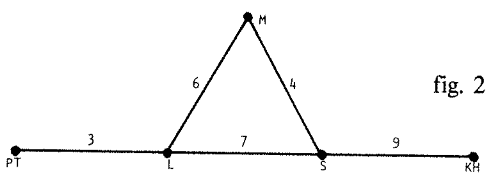


fig. 2

of, als Kaap Hau meedoet:

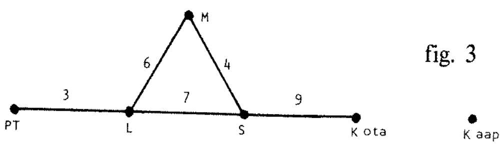
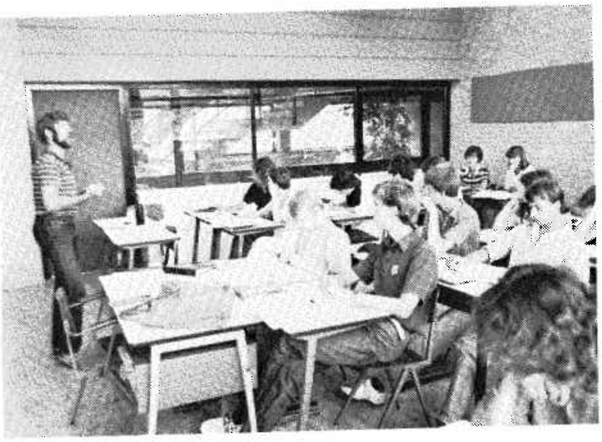


fig. 3

Zo'n voorstelling wordt een graaf *genoemd; d.w.z. een verzameling* (knoop) punten, *al of niet verbonden door* takken *of* wegen.

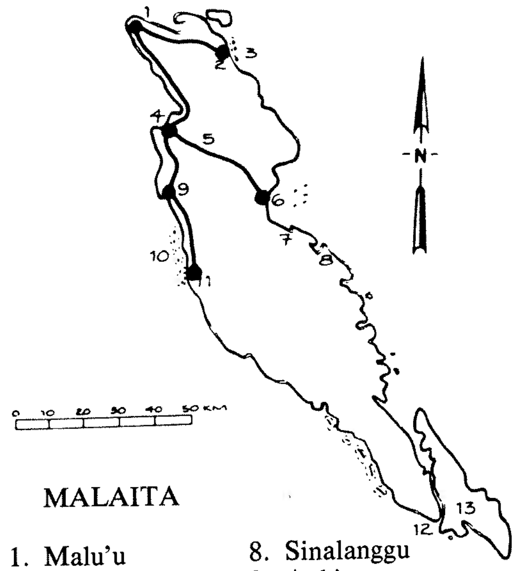
- 2. *Maak een afstandstabel, met daarin de afstanden tussen de vijf plaatsen van HAU. Eén van de voorwaarden voor het plaatsen van de school is:* iedere *leerling moet zo weinig mogelijk kilometers van de school af wonen.*

"Begin maar gewoon" had de leraar gezegd. Dus doen de leerlingen, zo'n 27 in getal, dat ook. Zo af en toe sluiks naar die gast uit Utrecht kijkend, dan weer lezend, de wenkbrauwen fronsend en met gedempte stem overleg plegend met de buurman of buurvrouw. In drie rijen van twee zitten ze. Jongen naast jongen, meisje naast meisje. Op twee uitzonderingen na.
De zon speelt door het lokaal, de leraar: Kees Lagerwaard en ik maken ons op om onopvallend tussen de rijen door te wandelen. In de hoop wat hulp te kunnen geven, of interessante dingen waar te nemen. Een leuke klas zo op het oog. Wel wat vol. Relatief veel meisjes. Ruim de helft zo te zien.



De eerste onverwachte vraag is voor rekening van de zoon van een wiskundeleraar, verbonden aan deze school. Hij wijst op de graaf van Hau en wijst naar de plaatsen Point Hau (PT) en Moau (M). Hij wil om de afstand tussen deze twee plaatsen te bepalen een lijn trekken van PT naar M en de lengte daarvan met Pythagoras berekenen. Ik probeer m'n verbazing niet te laten merken. Deze jongen is duidelijk met wiskunde bezig en heeft de context al erg snel losgelaten. Voordat ik kans krijg om iets verstandigs te zeggen is hij me al voor en met een "oh nee, het zijn wegen, dus je moet gewoon van PT naar L en daarna naar M". Hij blijkt de enige te zijn die Pythagoras op Hau wil gebruiken.
In een eerdere versie van "Matrices" stond een afstandstabel als voorbeeld. In de huidige tekst moeten de leerlingen zelf een afstandstabel opzetten. Enigszins verrassend is voor ons (Lagerwaard en mij) dat lang niet alle leerlingen vertrouwd zijn met dit begrip. Maar een aantal wel en deze leerlingen zijn gaarne bereid de anderen in hun kennis te laten delen, zodat de gevraagde afstandstabellen snel voor de dag komen. Met behulp van deze tabel kan bepaald worden waar de nieuwe school van Hau zou moeten komen als de voorwaarde is: "De leerling die het verst van school woont moet zo min mogelijk reizen."

Na dit denkbeeldige eiland Hau, wordt verder gereisd door de Stille Oceaan. Allerlei echte eilanden worden aangedaan, om te beginnen MALAITA.



MALAITA

1. Malu'u
2. Fouia
3. Lau Lagoon
4. Dala
5. Tiuni
6. Kwai
7. Ato'ifi
8. Sinalanggu
9. Auki
10. Langa Langa Lagoon
11. Buma
12. Maka
13. Small Malaita

fig. 4

Malaita is het op één na grootste eiland van de Solomon Eilanden, ook in de Stille Oceaan. De grootste "stad" is Auki (9).
Andere belangrijke plaatsen zijn: Malu'u (1); Fouia (2); Dala (4); Kwai (6) en Buma (11). In totaal wonen er zo'n 60.000 mensen op het eiland.

- 4. *Bepaal – op 5 km nauwkeurig – de afstanden tussen deze plaatsen; maak een graaf en een afstandstabel.*

- 5. *Hoeveel knooppunten zijn er en hoeveel wegen? Hoeveel wegen kunnen er aangelegd worden zodat ieder knooppunt een directe weg heeft naar ieder ander knooppunt?*

Enkele leerlingen, uitsluitend meisjes, valt op dat er eigenlijk veel te veel informatie wordt gegeven van zo'n eilandje als Malaita. In ieder geval meer dan strikt noodzakelijk. Je hebt maar zes plaatsen nodig

en er zijn er maar liefst dertien gegeven. Ik doe een poging daar iets verstandigs over te zeggen: "Tja, het is een kaartje van een echt eiland waar niets aan veranderd is". Echt overtuigd is dit meisje niet. Ze ziet meer in een wat vereenvoudigde voorstelling van zaken "U had de plaatsen gewoon a, b, c, enz. moeten noemen."
Later krijgen we gelukkig de gelegenheid om duidelijk te maken dat het overboord gooien van niet strikt noodzakelijke informatie juist één van de belangrijkste zaken is van het mathematiseren.
Een ander meisje heeft heel verschillende ideeën, lijkt het. Zij laat zich meeslepen door de gedachte dat dit "echte" eilanden zijn, aan de andere kant van onze aardbol. Dat vindt ze wel mooi.
De grafen van Malaita leveren een zeer gevarieerd beeld.
Lagerwaard geeft een overzicht op het bord:

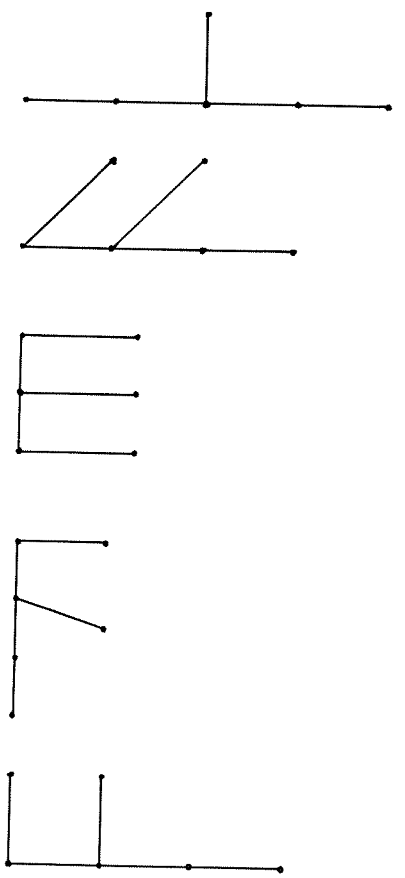


fig. 6

Niet iedereen ziet even snel in dat dit allemaal "dezelfde" graaf is. Maar dat zal de komende lessen veranderen. Probleempjes zijn er wat betreft het aantal "takken" of "wegen" van deze graaf. Er zijn nogal wat leerlingen die vinden dat met name de eerste graaf bestaat uit één weg met één zijweg. De context zorgt hier voor de nodige ruis. Ook dit verschijnsel wordt de komende lessen steeds minder. Langzamerhand, stapje voor stapje, lijken de leerlingen het begrip "graaf" goed onder de knie te krijgen. De vraag naar het maximaal aantal wegen levert stof tot een klassikale discussie die nauw aansluit bij de bovenstaande opmerkingen.

Uitgaande van deze graaf:

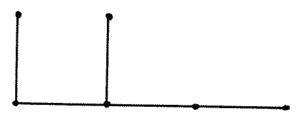


fig. 7

kun je de volgende wegen er bij tekenen:

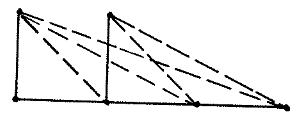


fig. 8

Terwijl slechts een enkeling op de gedachte komt van de volgende wegen:

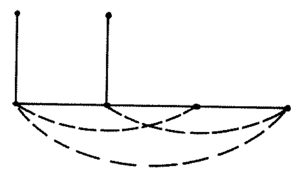


fig. 9

Minstens één leerling, een jongen, komt geheel uit eigener beweging met een fraaie oplossing. Een oplossing waarvan je hoopt dat iemand er spontaan opkomt, maar als het dan echt gebeurt verrast het toch. Een gevoel van welbehagen maakt zich van je meester.
"De tabel heeft 36 plekken; de diagonaal telt niet mee; blijven er $36 - 6 = 30$ over. Dus, vanwege de symmetrie 15 wegen."

Twee lessen zijn voorbij. Lagerwaard en ik bespreken na. We weten het nog niet erg. Net als de leerlingen. Het gaat wel, er wordt goed opgeschoten, maar het "swingt" niet. De vraag is natuurlijk of je je ideaal zo hoog moet stellen. Misschien moet je al blij zijn als de lessen gewoon vrij probleemloos verlopen. We vermoeden dat de leerlingen, die met Sigma zijn opgevoed, toch wel even moeten wennen aan dit pakketje. Hoe dan ook, aan twee lessen mag je geen conclusies ophangen.
Via het eiland Tanna (Nieuwe Hebriden) keren we weer terug naar Hau. Ondanks de economische crisis heeft dit paradijselijk eiland te lijden onder de toenemende toeristenstroom. Daarom wordt er éénrichtingsverkeer ingesteld op de driehoek L,S,M. De leerlingen maken een nieuwe afstandsmatrix en zien al snel de asymmetrie en de noodzaak om de woorden VAN en NAAR naast de afstandstabel te plaatsen.
De volgende lessen lopen voorspoedig. Zó zelfs, dat Lagerwaard het vermoeden uitspreekt op deze manier wel 100 te kunnen worden, hetgeen nu ook weer niet

de bedoeling van het pakketje was. Maar het is verheugend te zien dat enkele meisjes – in wie ik reeds "afhakers" meende gezien te hebben – ineens enthousiast mee zijn gaan doen, ook al was een kleine aanmaning van de docent daaraan voorafgegaan. De hele klas lijkt gewend te raken aan "deze" manier van wiskunde doen. Ze raken wat inventiever, komen wat gemakkelijker voor hun eventueel afwijkende mening uit en enkele leerlingen blijken het zonnige weekend benut te hebben om flink vooruit te werken.
Het optellen van matrices komt voor het eerst als volgt ter sprake.

Op Hau is een eenvoudige busdienst, die – uiteraard – met Toyota en LandRover jeeps wordt gereden. Het routenet is nogal beperkt: Alleen op St. Haula – Moau v.v. en St. Haula – Lalou v.v. wordt aanvankelijk gereden. De frequentie van de LandRovers op de lijnen op Hau wordt gegeven door de volgende frequentiematrix (per dag:)

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \textit{VAN} \\
 & & S \quad M \quad L \\
\textit{NAAR} & \mathrm{D} = \begin{array}{c} S \\ M \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

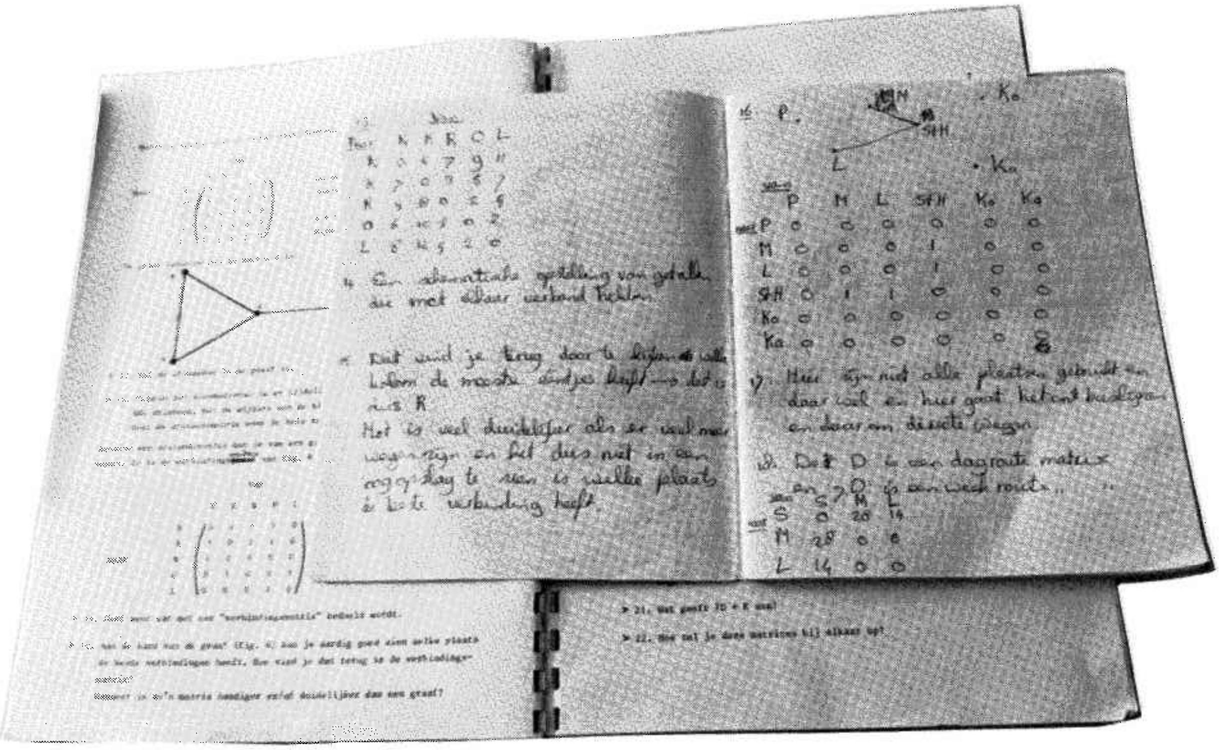
- *18. Verklaar de matrix D.*
  Wat zou 7D voorstellen? Schrijf de elementen van 7D op.

Zaterdags is er markt in Lalou. Iedereen neemt alles wat hij kwijt wil mee naar de markt en ruilt dat tegen wat nuttigers. Op zo'n markt vind je fruit en groente, vlees en vis, maar ook koeien en landbouwwerktuigen. Uiteraard worden er extra *LandRovers ingezet. En wel volgens frequentiematrix:*

$$
E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

- *19. Geef een verklaring van deze matrix.*
- *20. Geef de matrix die het* totale *aantal busdiensten aangeeft op zaterdag: Z.*
- *21. Wat geeft 7D + E aan?*
- *22. Hoe tel je deze matrices bij elkaar op?*

Een jongen geeft als definitie voor het optellen: "Je legt de matrices gewoon op elkaar." Lagerwaard en ik kijken elkaar met een blik van verstandhouding aan: "is dit niet prachtig?" De asymmetrie van matrix E wordt al snel opgemerkt en vertaald naar de context. Het eerste hoofdstukje zit erop.



Het tweede hoofdstuk

Het tweede hoofdstuk gaat over verbindingsmatrices. Het begrip "verbindingsmatrix" is al aangezet in het eerste hoofdstukje. De verbindingsmatrix vertoont *énen* op plaatsen die direct met elkaar verbonden zijn en verder *nullen*.

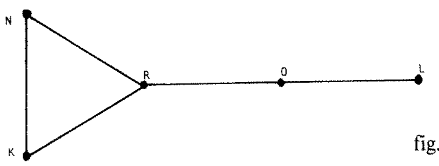


fig. 10

$$
\begin{array}{cc|ccccc}
 & & & & VAN & & \\
 & & K & R & N & O & L \\
 & K & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & R & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
NAAR & N & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & O & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Hier doet zich hetzelfde voor als bij de grafen: de leerlingen hebben wat problemen met het begrip: directe weg of directe verbinding:

fig. 11

Men is geneigd hier drie knooppunten in te zien, maar slechts één weg. Uit de eerste opgave van het tweede hoofdstukje blijkt echter dat dit probleem in feite alweer achterhaald is. Bijna alle leerlingen maken een feilloze graaf bij het volgende kaartje:

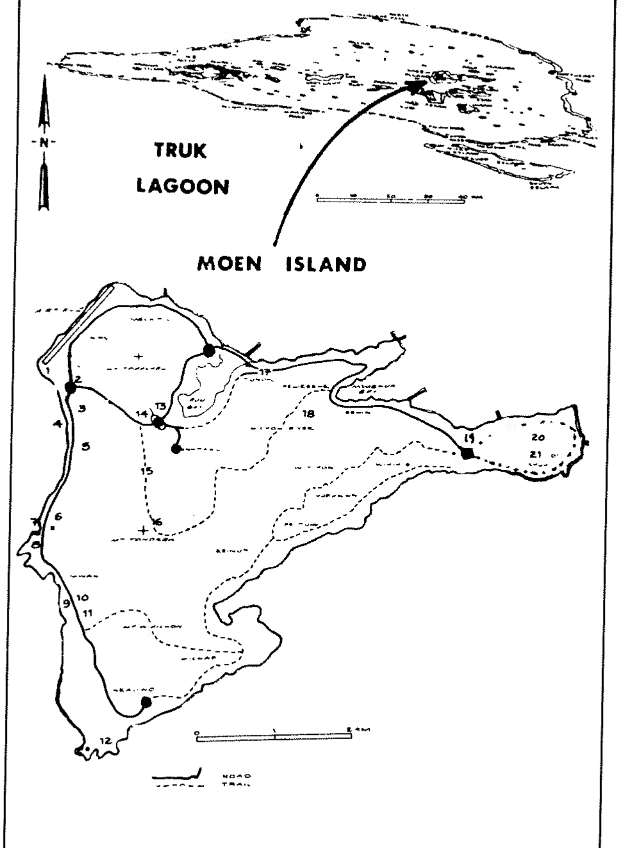
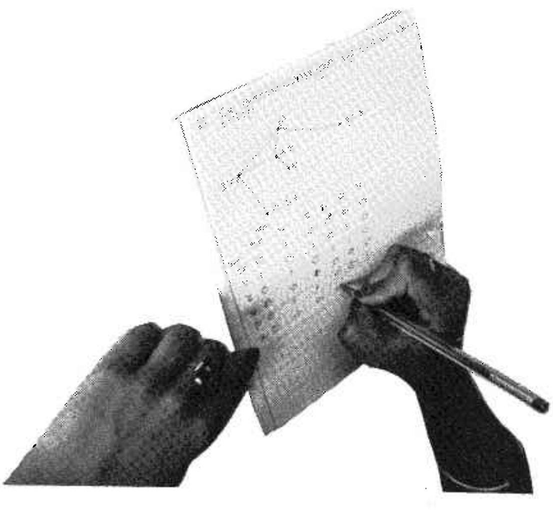


fig. 12

Het eiland Moen is onderdeel van de TRUK-archipel; een verzameling eilandjes en koraalriffen in Micronesië. Zelfs het grootste eiland Moen is nog betrekkelijk klein.
Op het kaartje hierboven zie je 6 knooppunten aangegeven: in het zuiden South Field (12), verder het vliegveld (1,2), ziekenhuis en VVV (13,14), Nantaku daar vlakbij, de wegsplitsing bij Puubay en de Xavier Highschool (19).

- *23. Teken een verbindingsgraaf en de bijbehorende verbindings-matrix (6×6). Welke plaats ligt het meest centraal? En welke het meest geïsoleerd? De eerste school op het eiland was de Truk High School (13). Vind je dat die op een logische plaats is gebouwd?*



Een grote variatie doet zich voor bij het tekenen van de graaf. De eerste versie vertoont vaak nog een treffende gelijkenis met het wegennet. Daarna worden veel meer "wiskundige" voorstellingen getekend en vindt een uitwisseling van meningen plaats over elkaars graaf. Zo af en toe worden de leerlingen – waarvan ik zo langzamerhand de namen begin te kennen – uit de Stille Oceaan-droomwereld gerukt en staan er "kale" opgaven. Zo moeten ze de graaf tekenen die behoort bij een gegeven verbindingsmatrix. Of moet de graad van verbondenheid van een aantal grafen worden uitgedokterd, d.w.z. het quotient van het aantal bestaande verbindingen en het maximaal aantal verbindingen. Maar als zulke opgaven worden afgewisseld met:

- *29. Terug naar Hau (zie fig. 1).*
  Als er op het eiland een spoorlijn moet worden aangelegd die de plaatsen Lalou, St. Haula, Moau, Kota Hau en Kaap Hau met elkaar op de goedkoopste manier – d.w.z. zo min mogelijk km. spoorrails – met elkaar verbindt, welke suggestie zou jij dan willen doen? Geef van jouw oplossing zowel de graaf als de verbindingsmatrix.

- *30. Overwogen wordt om een spoorbrug te bouwen van Moau naar het oosten zodat er een rechtstreekse spoorlijn komt van Moau naar Kaap Hau.*
  Geef de verbindings-matrix van het complete spoorwegnet. Waar zou jij het centrale emplacement plaatsen?

schakelen de meeste leerlingen weer soepel terug naar het verhaal. Zo soepel dat niet wordt volstaan met het maken van een graaf met minimale verbondenheid en een minimaal aantal kilometers.
Judith wil persé een tunnel laten graven van Lalou naar St. Haula. Dat lijkt haar veel slimmer dan de oplossing waar de klas het al snel over eens was:

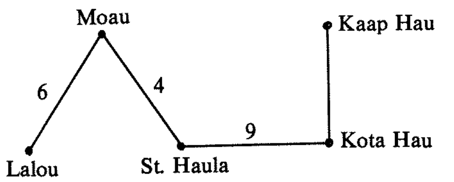


fig. 13

Deze geniet immers de voorkeur boven:

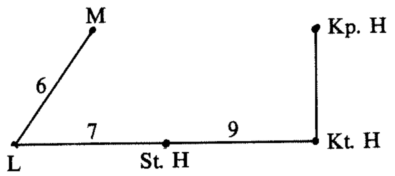


fig. 14

omdat het totaal aantal km spoorrails hier groter is en waarschijnlijk wel duurder. "Maar" zei Judith, "die 7 km was langs een haarspeldbochtenweg, en als je een tunnel bouwt, zou het best een véél kortere weg kunnen zijn." Zulk soort opmerkingen dragen er toe bij dat de leerlingen er steeds minder moeite mee krijgen dat "het" antwoord niet altijd bestaat en geven ook aan dat er wat meer discussie in de klas loskomt over de opgeworpen problemen. Een voorbeeld daarvan leveren ook de volgende opgaven:

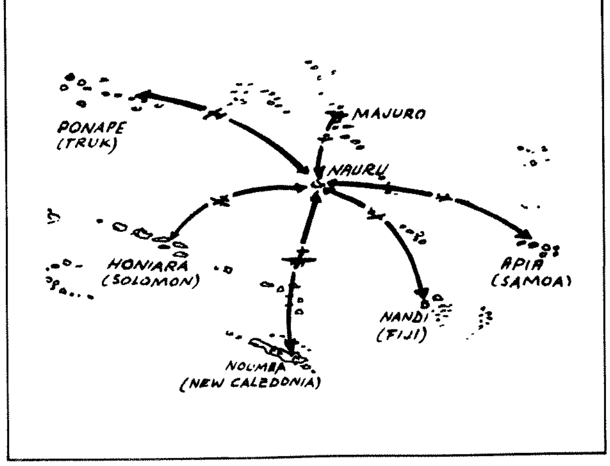


fig. 15

Hier zie je luchtlijnen van Air Nauru, in de Stille Oceaan. Doordat de maatschappij niet bij de overkoepelende luchtvaartmaatschappijorganisatie Iata is aangesloten, mag zij uitsluitend van Nauru naar andere steden vliegen en niet b.v. van Nandi naar Apia. Maar ze is wel erg goedkoop, dus kan het best verantwoord zijn om b.v. van Majuro via Nauru naar Apia te vliegen (2-étappe-vlucht).

- *37. Geef de verbindingsmatrix; laat zien dat de graad van verbondenheid minimaal is.*
  Welke plaats is maximaal verbonden? Noem enkele positieve gevolgen daarvan in dit geval.
- *38. Teken een ander luchtlijnensysteem, waarbij alle plaatsen minimaal verbonden zijn.*
  Welke nadelige gevolgen zou dit voor Nauru hebben? En welke voordelige voor de luchtreizigers?

Twee verschillende minimale verbondenheidsgrafen zijn:

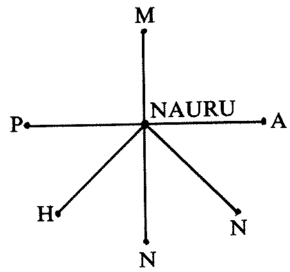


fig. 16

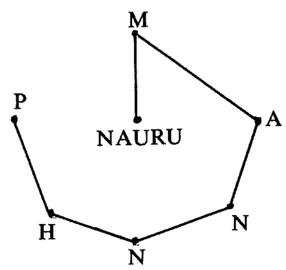


fig. 17

Voor Nauru is het eerste systeem (dat op dit moment zo functioneert) natuurlijk het beste. Iedereen die van de goedkope "Air Nauru"-tarieven gebruik wil maken, moét via Nauru vliegen. In veel gevallen zou het tweede minimaal systeem voor de passagiers en piloten wat prettiger zijn, maar Nauru verliest haar overheersende rol. In de praktijk zal een routenet vaak niet zo extreem zijn, maar een hogere graad van verbondenheid kennen.
Zeven lessen "Matrices" zijn voorbij. De spanning van het eerste moment is er een beetje af. Zowel voor de leerlingen als voor Lagerwaard en mij. Alhoewel er veel bij te schaven blijft, lijkt het erop dat althans deze A-5 groep met dit boekje niet al te veel problemen zal hebben.
Een eerste indruk van de leerlingen is positief: "Het is minder droog", "Het is tenminste te volgen", "Je hoeft niet zoveel te rekenen, je moet veel meer uitzoeken", "Je ziet nu dat je aan wiskunde wat kunt hebben". Het lijkt te mooi om waar te zijn. Waarschijnlijk willen ze "die man uit Utrecht" niet te zeer voor het hoofd stoten. Misschien zien we het te zonnig in door de prachtige nazomer. De tijd zal het leren, maar de eerste indrukken van deze lessen stellen ons wel hoopvol.