Kleinigheden over grootheden

F. Dolmans
Gelderse Leergangen, Nijmegen

Summary

Examples for the occurrence of magnitudes in the real world. Mathematical magnitudes serve in mathematical models of physical phenomena. Traditional instruction is often restricted to the mathematical relations while the relations with reality are disregarded. More attention should be paid to these relations.

Grootheden hebben een belangrijke rol als intermediair tussen de wiskunde en de realiteit. Allerlei toepassingen van wiskunde vinden met behulp van grootheden plaats. En omgekeerd kunnen allerlei problemen uit de werkelijkheid via grootheden wiskundig opgelost worden. We willen in het onderstaande deze rol van grootheden nader uitwerken en tevens enige andere aspecten van grootheden aan de orde stellen.
De tekst bestaat uit twee gedeelten.
In de eerste paragraaf staat de vraag centraal: "Wat verstaan we onder grootheden?" en worden enkele eigenschappen van grootheden besproken.
In paragraaf twee wordt de rol van grootheden besproken en bekeken wat consequenties daarvan voor het wiskunde-onderwijs zouden kunnen zijn.

1. We trachten een antwoord te geven op de vraag: "Wat verstaan we onder een grootheid?"

We doen dit door diverse voorbeelden van zinnen, waarin grootheden voorkomen, te analyseren. We willen naar aanleiding van zomaar een eerste voorbeeld een voorlopige, nog ruwe omschrijving van het begrip grootheid geven. Die omschrijving polijsten we daarna met behulp van andere, meer subtiel gekozen voorbeelden.
Laten we de volgende zin onder de loep nemen:
De breedte van de tafel, waaraan ik nu zit te werken, is 0,84 meter.
We analyseren de inhoud van deze zin als volgt:
Er is sprake van een object en van dit object wordt één eigenschap bekeken. De zin is verder een bewering, waarin twee zaken aan elkaar gelijk gesteld worden: de breedte van de tafel enerzijds en 0,84 meter anderzijds. Blijkbaar wordt aan de eigenschap van het object een waarde toegevoegd en wordt deze waarde uitgedrukt in een getal en een eenheid.
We zouden ook andere eigenschappen van het object kunnen bekijken, de lengte, het gewicht, de hoogte, de prijs, de kwaliteit, de kleur, de bruikbaarheid enzo.
Bij sommige van deze eigenschappen kunnen we beweringen formuleren, die qua vorm overeenstemmen met de bewering over de breedte van de tafel zoals: De prijs van de tafel is 800 gulden.
Bij andere eigenschappen van het object is dit niet mogelijk. Eén van die eigenschappen is bijvoorbeeld de bruikbaarheid van de tafel.
Ik kan wel zeggen: "de bruikbaarheid van de tafel is groot", maar het lukt me niet dit op een acceptabele manier getalsmatig aan te duiden.
Dit leidt tot een tweedeling. Blijkbaar zijn sommige eigenschappen van de tafel wél aan te duiden met een waarde en andere niet.
Een grootheid is een eigenschap van een object, die met een getal en een eenheid aan te geven is.
Aan deze voorlopige definitie van grootheid zitten diverse haken en ogen, die we nader bekijken met als doel de definitie door een meer aangescherpte te vervangen.
In de eerste plaats wordt het in het midden gelaten *wie* een getal en een eenheid aan de eigenschap van het object toe kan voegen. Ik ben met mijn kennis niet in staat om de bruikbaarheid van mijn tafel getalsmatig aan te geven. Daardoor is de bruikbaarheid ervan voor mij geen grootheid. Maar mogelijk zijn er anderen, die wel een theorie over de bruikbaarheid van meubilair kennen en die met behulp daarvan wel in staat zijn afspraken te maken over een waarde, die aan de bruikbaarheid van de tafel toegevoegd kan worden. Hiermee wordt duidelijk dat de gegeven omschrijving van het begrip grootheid een subjectief element bevat.
In onze definitie staat het woord object. Dit is bedoeld als universele aanduiding van allerlei dingen. In feite is het woord "object" nog te beperkt. We spreken namelijk bijvoorbeeld óók over: "de golflengte van dit gele licht is 5700 A".
Wellicht zouden woorden als "fenomeen" of "systeem" beter zijn dan "object", maar we geven er de voorkeur aan het woord "object" te blijven gebruiken.
Aan een eigenschap van een object wordt een waarde toegekend. Daarvoor moet je over een geschikte eenheid beschikken. Hoe kom je aan die eenheid? Je neemt één welgekozen eigenschap van één object en noemt dat een eenheid. Deze eenheid hoeft niet een officiële eenheid te zijn. In de zin "De lengte van mijn tafel is 16,5 keer de lengte van mijn ballpoint" kun je "de lengte van mijn ballpoint" als eenheid interpreteren. Er is weliswaar een groot praktisch verschil tussen een officiële eenheid zoals de meter en een ad-

hoc eenheid zoals de lengte van mijn ball-point. Maar er is geen fundamenteel verschil. De lengte van m'n ballpoint zou gepromoveerd kunnen worden tot de officiële lengte-eenheid. Het zou een slechte keuze zijn want er zijn allerlei praktische bezwaren te bedenken (temperatuurs-afhankelijkheid, beschikbaarheid, reproduceerbaarheid, niet-éénduidigheid). Maar er zijn óók bezwaren aan te voeren tegen de officiële lengte-eenheid. Het verschil tussen een officiële eenheid en een ad hoc eenheid is blijkbaar gradueel- de keuze voor een bepaalde officiële eenheid is bijvoorbeeld afhankelijk van de stand van de wetenschap en die keuze verandert dan ook zo nu en dan. Zo wordt de eenheid van lengte tegenwoordig gedefinieerd met behulp van het aantal trillingen per seconde van het caesiumatoom.
Een gekozen eenheid kun je gebruiken om sommige eigenschappen van andere objecten bijvoorbeeld de lengte van m'n dochter (ook) een waarde te geven. Blijkbaar zijn er zekere procedures, die je moet volgen om aan die waarden te komen. Bij iedere eenheid hoort een klasse van grootheden (in de geest van de gegeven definitie), die met die eenheid gemeten kunnen worden. Het is helemaal niet zo vanzelfsprekend dat je heel verschillende grootheden zoals:

- de lengte van m'n dochter
- de afstand van Amsterdam tot Haarlem
- de dikte van je boterham
- de diameter van de zon

alle wél met behulp van dezelfde eenheid kunt meten en dingen, die veel meer met elkaar te maken lijken te hebben zoals

- je lengte
- je gewicht.

niet.
Sterker, je zou ook heel andere keuzes kunnen maken dan de keuze, die we gewend zijn. Je zou de seconde óók als eenheid van afstand kunnen gebruiken door een natuurlijke koppeling te maken tussen tijdseenheden en afstandseenheden, bijvoorbeeld door aan de lichtsnelheid de waarde 1 toe te kennen. Je zou dan kunnen zeggen dat de tijd, waarin de aarde om de zon draait, 3×10^7 sec. is en de *afstand*, die de aarde daarbij aflegt, $3{,}2 \times 10^3$ sec. Vergelijk dit ook met het lichtjaar als eenheid van afstand.
Uit deze voorbeelden blijkt dat de grootheden, die je met een gekozen eenheid kunt meten, niet alleen door die eenheid bepaald worden maar dat ook hier historische en pragmatische overwegingen een rol spelen. Het is gewoon onhandig om zowel voor de afstand als voor de tijd de eenheid seconde te gebruiken. De natuurkunde lijkt bij het vastleggen van haar grondslagen een evenwichtssituatie gevonden te hebben door van een klein aantal basiseenheden (bijv. meter, seconde, kilogram) uit te gaan en met behulp daarvan andere eenheden samen te stellen.
eenheid bepaald worden maar dat ook hier historische en pragmatische overwegingen een rol spelen. Het is gewoon onhandig om zowel voor de afstand als voor de tijd de eenheid seconde te gebruiken. De natuurkunde lijkt bij het vastleggen van haar grondslagen een evenwichtssituatie gevonden te hebben door van een klein aantal basiseenheden (bijv. meter, seconde, kilogram) uit te gaan en met behulp daarvan andere eenheden samen te stellen.

Het is interessant te bedenken dat de keuzes, die de natuurkunde daarbij maakt niet noodzakelijkerwijs ook keuzes zijn die optimaal zijn voor het onderwijs. Je zou kunnen stellen, dat het begrip snelheid vertrouwder is voor de hedendaagse 14-jarigen dan het begrip tijd. Misschien zouden we het begrip snelheid vóór het begrip tijd moeten behandelen en de eenheid van tijd als quotient van de eenheid van lengte en de eenheid van snelheid. Voor snelheid kiezen we dan bijvoorbeeld de eenheid *velox* en de tijdeenheid definieren we als $\mathit{seconde} = \frac{\mathit{meter}}{\mathit{velox}}$
De keuze is aan onszelf.
Bij een eenheid behoort blijkbaar een klasse van (soortgelijke) grootheden, die volgens zekere vaak impliciet vastgelegde procedures een waarde toegekend kunnen krijgen. Deze procedures worden medebepaald door het doel waarmee die waarden vastgesteld worden.
Een naaister meet met behulp van een meetlint terwijl een timmerman weet dat hij slecht werkt als ook hij een meetlint zou gebruiken en een astronoom totaal andere procedures heeft om afstanden te meten. Terwijl zij allen diverse meetmethoden hebben zullen deze procedures intuïtief zo zijn dat zij aan eisen voldoen zoals:

- even grote objecten krijgen dezelfde waarden;
- als een object net zo lang is als twee andere objecten samen, dan is zijn waarde gelijk aan de som van de waarden van de delen.

Traditioneel is "lengte" een voorbeeld van een grootheid. Je kunt "lengte" beschouwen als de naam van de klasse, waarin bijvoorbeeld zitten:

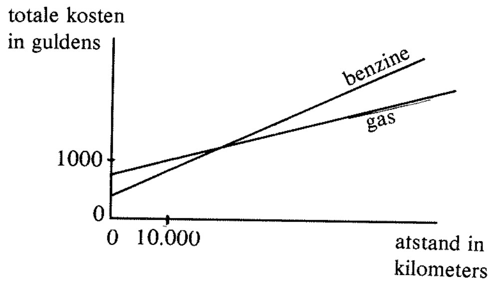
- de lengte van de tafel
- de lengte van m'n dochter
- de dikte van je boterham

De naam van de klasse wordt zo dus een voorbeeld van een grootheid. "Snelheid" is een andere grootheid als naam van een klasse die onder andere bevat: de snelheid, die je auto nu heeft.
Als resultaat van het bovenstaande hebben we de volgende fraaie volzin: *Een grootheid is een klasse van eigenschappen van objecten, waaraan met behulp van steeds dezelfde eenheid getallen toegevoegd kunnen worden volgens een gegeven procedure*. Terwijl het wel zinvol is om "de hoogte van de tafel" te onderscheiden van "de lengte van de tafel" vallen "lengte" en "hoogte" samen. Beide duiden dezelfde klasse aan.
Uit de definitie volgt dat "de lengte van de tafel" element is van de klasse "lengte". In tegenstelling tot de oorspronkelijke definitie heeft dit tot gevolg dat we niet meer over de "lengte van de tafel" als grootheid kunnen spreken. Een element van een klasse (= van een grootheid) zullen we aanduiden met "een waarde van die grootheid".
Voor twee waarden van dezelfde grootheid geldt dat ze onderling vergelijkbaar zijn; óf ze zijn gelijk óf de één is groter dan de ander. Je kunt twee waarden van dezelfde grootheid ook bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken. Daarbij geldt a $\text{eenheid}_1 \pm$ b $\text{eenheid}_1 = (a \pm b)\ \text{eenheid}_1$. Waarden van verschillende grootheden kun je niet vergelijken en bij elkaar optellen. Je kunt de waarde van een grootheid met een getal vermenigvuldigen, óók met een irrationaal getal, bijvoorbeeld in $0 = 2\pi r$.

Een heleboel formules zijn betekenisvol doordat het óók mogelijk is waarden van grootheden onderling te vermenigvuldigen zoals in $0 = 1 \times b$
Daarbij maken we impliciet gebruik van de regel
a eenheid$_1$ $\bullet$ b eenheid$_2$ = ab (eenheid$_1$ $\bullet$ eenheid$_2$)
Een soortgelijke regel definiëert het delen van waarden van grootheden.

2. Over de rol van grootheden en consequenties daarvan voor het wiskundeonderwijs.

Grootheden kunnen gebruikt worden als koppelingsinstrumenten tussen de wiskunde en de realiteit.
Wat bedoelen we daarmee?
We willen eerst nader aangeven wat we in dit kader met "wiskunde" bedoelen en zouden de volgende omschrijving willen geven:
Het kennisgebied van wiskunde bevat formele objecten (zoals vierkanten, getallen, variabelen, symbolen) en met relaties tussen die formele objecten (een vierkant is een bijzondere rechthoek, $a>b \Rightarrow 2a>2b$)
Op basis van deze omschrijving willen we aangeven wat de rol van grootheden als koppelingsinstrument is. Soms kun je een koppeling tussen de wiskunde en de realiteit maken zonder daarbij van grootheden gebruik te maken, bijvoorbeeld in de zin: "het raam heeft de vorm van een rechthoek". Er is dan sprake van een directe overgang van een object uit de realiteit naar een wiskundig model ervan.
Grootheden spelen in andere overgangen van realiteit naar wiskunde (en omgekeerd) wel een rol.
Bijvoorbeeld bij het beantwoorden van de vraag wanneer het voordeliger is met je auto op gas in plaats van op benzine te rijden.
Zo'n vraag kun je aanpakken door hem te vertalen naar een vraag, die geformuleerd is in termen van grootheden.



Met het tekenen van dit plaatje hebben we een (fysisch) model van het probleem gemaakt. Je kunt dit model verder abstraheren tot een model, waarin slechts formele objecten zitten, bijvoorbeeld tot een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden

$$y = 512 + 0{,}08 \times$$
$$y = 360 + 0{,}11 \times$$

De grootheden zijn nu vervangen door variabelen, waarbij de waarde a eenheden (bijvoorbeeld) afgebeeld wordt op de variabele a.
We hebben een wiskundig model van het probleem gekregen.

Deze gang van zaken kun je zo voorstellen:

Probleem uit de realiteit
↓
Fysisch model van het probleem (met grootheden)
↓
Wiskundig model van het probleem (met variabelen)

Met behulp van wiskundige technieken (bijvoorbeeld de schoorsteenmethode) wordt het stelsel van twee vergelijkingen nu opgelost. De oplossing wordt vervolgens terugvertaald naar het fysische model: Bij 11000 km per jaar is het voordeliger om op gas te rijden. Een terugvertaling van het fysische model naar de realiteit heeft hier verder weinig om het lijf. Oorzaak hiervan is met name dat grootheden in onze alledaagse beleving van de realiteit voorkomen. De snelheid van de auto lijkt net zo'n deel van de realiteit als de versnellingsbak ervan. Je kunt een fysisch model vaak zien als een welgekozen deel van (onze beleving van) de realiteit.
Het traditionele wiskunde-onderwijs is voornamelijk geconcentreerd op formele objecten en op relaties daartussen. In dit opzicht lijkt het wiskunde-onderwijs sterk op de wetenschap wiskunde. Een gevolg hiervan is dat de koppeling naar problemen uit de realiteit dikwijls ontbreekt of op een wat gekunstelde manier vrij ad hoc ingebouwd is.
We menen dat de inhoud van het schoolvak wiskunde in dit opzicht ontaard is. Het is hier niet de geschikte plaats om daar in z'n algemeenheid op in te gaan. Wel willen we wijzen op de mogelijkheden, die het meer benadrukken van grootheden in het wiskunde-onderwijs biedt. We denken daarbij aan het formuleren van sommige wiskundige onderwerpen die in het vigerende onderwijs in termen van variabelen geformuleerd worden terwijl het óók mogelijk is dit te doen in termen van (waarden van) grootheden.
Voorbeelden:

- Een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden wordt:
  afgelegde weg = 20 km + 30 km/uur $\bullet$ aantal uur
  afgelegde weg = 10 km + 40 km/uur $\bullet$ aantal uur.
- Langs de coördinaatassen staan niet meer x en y maar afstand en tijd.
- druk $\bullet$ volume = 6 Nm is een hyperbool.

Het lijkt mogelijk diverse wiskundige technieken, vaardigheden en leerinhouden te ontwikkelen in termen van grootheden in plaats van variabelen. Voordeel van zo'n theorievorming is dat hij concreter is en dichter bij de werkelijkheid staat want je hoeft niet eerst de vertaling van variabele naar grootheid te maken om de betekenis van de theorie voor de realiteit te begrijpen.

Sommige wiskundige theorieën kunnen zo worden geformuleerd in groothedentaal. Als dat gebeurt dan moet dat zorgvuldig gebeuren en een resultaat opleveren dat in principe isomorf is aan de theorie uit de formele wiskunde, waaraan hij ontleend is.
Door zo'n isomorfie is een theorie in grootheden-taal direct vertaalbaar in andere grootheden (en desgewenst naar variabelen toe).
Het bovenstaande is geen pleidooi om zonder meer alle formele objecten uit de school-wiskunde te vervangen door meer concrete objecten. Voor sommige vormen van onderwijs, m.n. het VWO, is het leren omgaan met variabelen een doel op zich te noemen. Een leerling uit het VWO zal dan ook ergens in zijn school-loopbaan de overgang van grootheden naar variabelen moeten kunnen maken. Dit betekent dat kennismaking met, en vaardigheid in het manipuleren binnen, het wiskundig model expliciete doelen voor zulke leerlingen zijn.
Maar ook voor hen kan een deel van het wiskunde onderwijs begonnen worden in grootheden-taal en kunnen ook de eindtermen van geschikte onderwerpen (differentiaal-vergelijkingen) in grootheden geformuleerd worden. Het lijkt zeer acceptabel om voor andere leerlingen de overgang van grootheden naar variabelen niet te behandelen. Dat betekent niet dat deze leerlingen totaal niet kennis maken met variabelen; ze zitten verstopt in grootheden en er lijkt weinig bezwaar te zijn tegen het gebruik van variabelen in onderwerpen zoals de meetkunde (namen van punten, lijnen, vlakken). Het zal waarschijnlijk voor een wiskundeleraar die gewend is te denken in termen van variabelen niet eenvoudig zijn over te schakelen op zo'n groothedentaaltje.
Het is geen kleinigheid te denken in termen van grootheden.

Koningsveld, H., *Het verschijnsel wetenschap,* pag. 99 e.v.
Russell, B., *The principles of Mathematics.* o.a. hfdst. 8.
Damerow, P. e.a., *Lernen für die Praxis?*
IOWO; *Startpunt leerplanontwikkeling* 1973; pag. 30 e.v.
Boer, J. de, *Eenheden en grootheden.*
Ford, K.W., *Basic Physics*, blz. 146-155
Noakes, G., *Structure of Physics*, hfdst. 1

De schrijver is lid van de NLO-SLO groep. In die groep wordt o.a. gesproken over de introductie van het begrip "functie" in het onderwijs. Wil je daarbij uitgaan van de realiteit dan kom je vanzelf terecht op verbanden tussen grootheden. Het begrip "grootheid" heeft zodoende een sleutelrol bij de introductie van functies.
Voor het jaarverslag heeft Frans Dolmans de "grootheden" nog eens uitgediept en dat hoofdstuk ook beschikbaar gesteld als artikel voor de Nieuwe Wiskrant.