

PME-5 Grenoble '81

L. Streefland

OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

The fifth conference for the Psychology of Mathematics Education (PME) took place in Grenoble, July 13th - 18th, 1981.

In the present contribution some general trends of the conference are being discussed.

The author's main point is stating the growing awareness among many participants and contributors that due account should be paid in Math's (and other) education to notions pupils might already have of the concept, the operation, the structure or the idea, that has to be taught.

It should be the task of (mathematics) education to start from the pupils' point of view and to try to develop their ideas in the more formal direction one is aiming at.

For several contributors the history of mathematics has been some source of inspiration, both with respect to the study of learning processes and to the arrangement of certain topics of subjectmatter.

The conference proved that the learning of mathematics is a field of interest of many researchers from different countries. All efforts together might lead to a general theory of the learning of mathematics and of mathematics education. No doubt insights acquired by research will improve mathematics education in the future.

Inleiding

Van 13 tot en met 18 juli vond in Grenoble de vijfde conferentie plaats voor de psychologie van het wiskunde-onderwijs (PME).

Vanaf 1978, toen de tweede PME-conferentie te Osnabrück werd gehouden, werd het gebruikelijk de 'Proceedings' van de conferentie in voorlopige, dan wel meer definitieve vorm vooraf gereed te hebben. Dat was ook dit keer weer het geval. Ik zal daarom in dit 'bericht uit het buitenland' niet proberen bedoelde conferentie inhoudelijk te verslaan. Ik volsta met een verwijzing naar bedoelde 'proceedings'. (1), (2) In dit bericht zullen we ons daarentegen wat meer richten op algemene trends in datgene wat de conferentie te bieden had. Omdat er zowel in de inhoudelijke belangstelling als in de toegepaste onderzoeksmethoden zich nieuwe ontwikkelingen beginnen af te tekenen, zullen we ons daarop in het bijzonder richten.

Trends

Trends

Blijkens de presentaties op de conferentie bewogen de aanwezige onderzoekers zich over een breed terrein van onderwerpen uit het wiskunde-onderwijs. Zowel onderwerpen van meer elementaire aard als uit voortgezette curricula waren tot object van studie gekozen. Zonder volledig te willen zijn noemen we:

- de ontwikkeling van het begrip natuurlijk getal;
- het breukbegrip en operaties met breuken;
- kommabreuken;
- verhouding en evenredigheid;
- onderwerpen uit de algebra;
- het convergentie- en limietbegrip.

Ook enkele minder gemakkelijke categoriseerbare onderwerpen waren er, zoals b.v. 'de cirkel' en de 'perception of randomness'. Er valt een groeiende belangstelling te constateren voor onderwerpen uit het voortgezette wiskundeonderwijs. De noodzaak hiervan werd door sommige deelnemers ook benadrukt. Wat de psychologische ingrediënten in het conferentie-menu betreft, was er eveneens sprake van veelzijdigheid.

Als belangrijkste beschouw ik de problematiek van de begripsvorming in het algemeen en in verband daarmee, de behoefte aan en het pogen bij te dragen tot de ontwikkeling van een meer algemeen geldige theorie voor het leren van wiskunde. In samenhang daarmee viel er een groeiende belangstelling voor (nieuwe) methoden van onderzoek te bespeuren en een streven bestaande methoden te verbeteren, uit te bouwen, te nuanceren etc.

Met name pogingen om de zgn. 'zachtere' onderzoeksmethoden, zoals het (klinische) interview en de (klinische) observatie te verbeteren, resp. daarvoor nieuwe vormen te creëren, vestigden - wat de aanwezig OW & OC-ers betreft - in ieder geval de aandacht op zich.

Ook waren er enkele grote overzichtsbijdragen (van Filloy, Mexico; Kilpatrick en Romberg, U.S.A. en Vergneaud, Frankrijk) over de respectieve nationale ontwikkelingen in het onderzoek voor het wiskunde-onderwijs, die met het geven van een bepaalde stand van zaken a.h.w. de trends, door ons gesignaleerd, nog eens nadrukkelijk bevestigden.

We willen in deze berichtgeving enkele accenten plaatsen bij ontwikkelingen die niet alleen belangrijk geacht worden voor de toekomst van het wiskunde-onderwijs - ook in ons land - maar die tevens een bevestiging vormen van de ideeën omtrent ontwikke-

ling, onderzoek, hun (leer)theoretische samenhang en de visie op wiskundeonderwijs, zoals deze destijds op het IOWO (was: Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs) ontwikkeld zijn. Zonder te willen suggereren dat het uitsluitend invloed van het IOWO geweest is die deze ontwikkelingen veroorzaakt heeft, kan toch niet ontkennd worden dat de opvattingen omtrent wiskundeonderwijs en de theorie voor wiskunde leren, zoals die op het IOWO ontwikkeld zijn en in ontwikkeling waren, onmiskenbaar hebben bijgedragen tot wat nu als trends van de 5e PME-conferentie kunnen worden aangemerkt. Juist in de laatste jaren van zijn bestaan, werd door het IOWO meer en meer voor een nationaal en internationaal wetenschappelijk forum naar buiten getreden, omdat de tijd rijpte om de resultaten van de rijke ontwikkelings- en onderzoekservaringen van jaren naar buiten te brengen. De wijze, waarop met name het internationale forum reageerde bij de vernietiging van het IOWO en een groot deel van het werk, spreekt boekdelen. De huidige reacties in wetenschappelijke zin vormen hiervan nogmaals een bevestiging. De eliminatie van het IOWO uit de verzorgingsstructuur van het Nederlandse Onderwijs en uit de internationale wereld van het wiskundeonderwijs is daarom niet minder dan blunder zonder weerga.

Over het leren van wiskunde

Opmerkelijk kan genoemd worden de toenemende kindgerichtheid bij de beschouwingen over wiskunde leren. Diverse bijdragen aan het programma van de conferentie richtten zich hetzij op specifieke gebieden, hetzij in een pogen te komen tot meer algemene theoretische noties omtrent het leren van wiskunde, op de vraag: Welke ideeën leven er bij kinderen omtrent het begrip, de operatie, de wiskundige structuur, of idee die we hen willen bijbrengen. B.v. Welke ideeën hebben leerlingen omtrent het limietbegrip. Een Franse deelnemer (Cornu, I. p. 322-326) ging dit na.

De voornaamste ideeën van leerlingen die hij in dit verband vaststelde, waren:

- 1) een limiet is onoverschrijdbaar, het is een grens;
 - 2) bij sommige leerlingen is het 'grensidee' van 1) gespecificeerd in ondergrens of bovengrens;
 - 3) de limiet kan bereikt worden;
 - 4) het is onmogelijk een limiet te bereiken. (I, p. 325).
- Dit aansluiten bij noties van kinderen kwam nogal veelvuldig voor. We signaleerden het eveneens i.v.m.
- tellen en getalbegrip (Van den Brink, I, p. 56-62);
 - de cirkel (Artigue, Robinet, I, p. 96-100);
 - het breukbegrip en operaties met breuken (Streefland, I, p. 327-330).

Bovenstaande is slechts een greep uit de vele bijdragen, waarin min of meer tot uitdrukking kwam dat men in het wiskundeonderwijs rekening dient te (en kan) houden met de noties, die kinderen (buiten het onderwijs om) reeds verworven hebben van de zaken die onderwezen (gaan) worden. (3)

De Engelsman Tall (I, p. 316-322) verwoordde dit in meer algemene termen in zijn streven een aanzet tot een algemene cognitieve theorie voor het wiskunde leren te formuleren. Hij benadrukte in zijn bijdrage dat men onderscheid dient te maken tussen 'concept

definition', als onderdeel van de formele wiskundige structuur en 'concept image', d.w.z. de notie die de lerende van het betrokken wiskundig object heeft, resp. de notie zoals die bij de lerende ontwikkeld wordt of dient te worden. Als voorbeeld geeft hij het onderscheid tussen continuïteit en differentieerbaarheid van een functie, waarbij het tekenen van grafieken, of beter, het visualiseren van het verloop van de functie, een essentiële rol speelt.

Laten we hem hierover zelf even aan het woord laten:

As an illustration, one may define a function $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (from a subset D of the real numbers \mathbb{R}) to be pictorially continuous if over any closed interval $[a, b]$ in D , given $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ implies $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. It is easy to show that, given a pencil that draws a line of given thickness, the graph of a pictorially continuous function can be drawn to any specified scale over a closed interval $[a, b]$ in its domain without the pencil leaving the paper. What actually happens is that the graph lies inside the pencil line. It is also easy to show that if f is differentiable at some point x_0 , then given a piece of paper of any specified width and a pencil which draws a line of specified thickness, there is a small interval containing x_0 such that the graph over this interval scaled up to the width of the paper can be drawn inside a straight pencil line. This process can be exemplified using high resolution graphics on a computer, giving valuable cognitive support.

(I, p. 318, 319).

Men dient – om de draad weer op te vatten – aan te sluiten bij bedoelde 'concept images' resp. te proberen deze te ontwikkelen op weg naar de meer geformaliseerde wiskunde. Nadruk krijgen daarbij de leerprocessen die de wiskundige leerproducten uiteindelijk rechtvaardigen.

Vanuit ontwikkelings- en leerpsychologisch standpunt beschouwd, is dit idee niet nieuw. Zonder in detail te willen treden noemen we Vygotskij, die in zeer globale zin deze kwestie beschouwde (zône van naaste ontwikkeling); Piaget onderscheidde een fase in het begripsvormingsproces, waarin hij spreekt van de aanwezigheid van intuïtieve noties van begrippen operaties, structuren e.d., voordat, via een proces van reflectieve abstractie, deze zaken mentaal naar een meer geformaliseerd niveau getild worden van en gaan functioneren in meer omvangrijke cognitieve structuren.

Fischbein spreekt van 'intuitions' en Freudenthal onderscheidt in het begripsvormingsproces een fase waarin mentale objecten gevormd worden. Deze fase gaat aan de feitelijke begripsvorming vooraf.

De meest fundamentele vraag voor het onderwijs is nu, hoe kan worden aangesloten bij bedoelde subjectieve ideeën van de leerlingen en op welk moment, opdat de voorgestane doelen in het wiskundeonderwijs op de meest effectieve wijze kunnen worden nagestreefd. In verband hiermee begint bij bepaalde onderzoekers het bewustzijn te groeien, dat de vorming van volwaardige begrippen dikwijls moeizamer is en veel meer tijd vergt dan de geplande leerprocessen in onderwijsteksten doen vermoeden. Met name Robert (I, p. 327-330) wees erop dat de verwerving

van het convergentiebeprijp een moeizame aangelegenheid is. Vermeldenswaard in verband met de bewustmaking van de noties, die de lerende over bepaalde zaken reeds heeft, is het inbouwen van conflicten in het leerproces, waarvoor o.m. gepleit werd door Van den Brink (I, p. 56-63), Erwynck (I, p. 330-334) en door onze landgenoot Kemme in zijn posterbijdrage aan de conferentie. Een mooi voorbeeld voor tweede klassertjes van de basisschool is de vraag: "Wat vind je van dit plaatje?" (binnen het onderwijs over verhoudingen). Hoe kinderen met de innerlijke tweestrijd, die het conflict kan oproepen, in het reine kunnen komen, blijkt uit de volgende ervaring met Lisette (8;3):



Proefleider (Pl): 'Wat vind je hiervan?'

Lisette (L): 'Leuk.'

Pl: 'Vind je er ook iets gekks aan?'

L: 'Die vogel is zo dik.'

Pl: 'Kan dat wel?'

Lisette zwijgt enige tijd en herneemt dan het woord.

L: 'Die vogel is erg dik. Ik denk dat 'ie twee kinderen van die meneer en mevrouw heeft opgegeten.'

Pl: 'Zijn er dan zulke grote vogels?'

L: 't Kan wel ... (lichtelijk aarzelend) ... een adelaar?'

Pl: 'Is dit een adelaar?'

L: 'Nee.'

Pl: 'Welke vogel is het dan?'

L: 'Ik weet 't niet ... als 'ie kleiner was ... dan wist ik het wel: Dan was het een mus!'

Een andere karakteristiek van het denken over wiskunde leren en begripvorming was het pleiten voor conceptuele samenhang, of, zoals Vergneaud (II, p. 7-18) het uitdrukte: men moet in het wiskunde-onderwijs uitgaan van 'champs conceptuel' (conceptual fields). Geïsoleerde begripvorming dient te worden afgewezen. Een voorbeeld is het intact laten van de samenhang tussen verhouding, evenredigheid, verhouding als equivalentierelatie en de lineaire functie als het definitieve model voor verhoudingsconstantie.

Geschiedenis van de wiskunde

In verband met het wiskunde leren en de individuele eigenaardigheid van leerprocessen, raadpleegden diverse auteurs de geschiedenis van de wiskunde om geobserveerde individuele leerprocessen met historische ontwikkelingen te confronteren. Zo stelde Cornu (I, p. 326) in dit verband: "L'évolution historique permet aussi de situer les réelles difficultés de la notion de limite, et de comprendre que la définition mathématique ne suffit pas à effacer toutes les difficultés", nadat hij de door ons eerder vermelde individuele noties omtrent het limietbegrip van leerlingen, in zijn onderzoek vergeleken had met historische ontwikkelingen.

Anderen verdiepten zich eveneens in de geschiedenis van de wiskunde, om aanwijzingen te vinden omtrent leerprocessen die de ontwikkeling van (een bepaald stuk) wiskunde markeren, of bijvoorbeeld de wijze waarop de leerstof voor het onderwijs uitgelijnd zou kunnen worden. We noemen met name de Mexicaan Filloy in verband met zijn werk op het gebied van het algebra-onderwijs. Ook Tall, die eerder genoemd werd, wil naar de historie kijken, alsmede naar zijn persoonlijke wijze van wiskunde-bedrijven ten behoeve van de ontwikkeling van een cognitieve theorie voor het leren van wiskunde. Met betrekking tot het benutten van de ontwikkelingsgeschiedenis van de wiskunde uit leertheoretische overwegingen, laat hij ook een waarschuwend geluid horen: "The mathematical theory was never intended to take into account the cognitive development of the child, ..." (I, p. 320).

Ontwikkelingsonderzoek

Als trend van de vijfde PME kan ook worden aangemerkt dat veel van de gepresenteerde onderzoeken het karakter van ontwikkelingsonderzoek dragen, vanwege de ontwikkelingscomponent die er in het onderzoek vervat is.

Op het IOWO kreeg het begrip ontwikkelingsonderzoek nader inhoud (4). In de literatuur wordt ook wel gesproken van construerend of formerend onderzoek en eveneens van systematisch onderzoeksexperiment. Opmerkelijk kan in ieder geval genoemd worden de aanwezigheid van en zorg voor een ontwikkelingscomponent in veel van het gepresenteerde onderzoek. Bedoelde zorg uit zich dan in de wijze waarop analyses voor het ontwikkelingsdeel van het onderzoek verricht worden en de kaders waarin een en ander geplaatst wordt. Ook het raadplegen van de geschiedenis van de wiskunde maakt soms deel uit van de analyses vooraf. Als voorbeelden noemen we het werk van Schmidt (I, p. 44-50) in verband met het begrip natuurlijk getal, van Artigue en Robinet (I, p. 96-100) i.v.m. de cirkel, van Karplus R. (e.a.) (Proportional Reasoning of Early Adolescents, paper verstrekt tijdens de conferentie), Streefland (I, p. 88-96) in verband met het breukbegrip en het opereren met breuken; en vele anderen. Er is sprake van een toenemende, geïntegreerde samenhang tussen ontwikkeling en onderzoek, die ook tot uitdrukking komt in het meervoudig geschoold zijn van diverse onderzoekers en in de samenstelling van multidisciplinaire onderzoeksteams. Scheiding van de componenten

ontwikkeling, onderzoek en evaluatie wordt door velen afgewezen. De trends van de vijfde PME getuigen van een bevestiging hiervan in de onderzoekspraktijk.

Besluit

In samenhang met het voorgaande viel er een herwaardering te bespeuren voor de zgn. zachte onderzoeksmethoden. Er was stellig sprake van een brede (her)bezinning op methoden en methodologie. Hoewel ook over deze kwesties nog wel wat interessante dingen te vertellen zijn, laten we de methoden in dit bericht verder rusten. De totale conferentie nog eens overziende, lijkt de slotsom gerechtvaardigd dat het een goede was.

Rest tenslotte nog te vermelden dat aan uw berichtgever de eer te beurt viel, gekozen te worden als vertegenwoordiger voor ons land in de Internationale Commissie voor de Psychologie van het Wiskunde Onderwijs, de commissie, die Grenoble organiseerde, maar in gedachten al weer bezig is met de zesde PME, de zevende, en de achtste, maar daarover wellicht in nieuwe jaargangen van deze krant wat meer.

- (1) Equipe de Recherche Pédagogique: "*Psychology of Mathematics Education*", Proceedings of the conference of the international group, Vol. 1 en 2, Grenoble, 1981.
- (2) Soms is het onvermijdelijk naar deze 'proceedings' te verwijzen. Dit zal op de volgende wijze geschieden: (naam van de auteur, I of II, p. ...) dus naam van de auteur, volume – nummer en pagina-nummer(s).
- (3) Dit principe hoeft zeker niet alleen beperkt te blijven tot het leren van wiskunde, zoals we hebben laten zien. Zie: Streefland, L: *Zoals eenvoudig valt in te zien* in Nieuwe Wiskrant, proefnummer, OW & OC, maart 1981.
- (4) Zie: Medewerkers IOWO: *Onderzoek voor wiskunde-onderwijs* in Wiskobas-Bulletin, jrg. 9 no 4/5, p. 3-20, IOWO.