Eén kind geen bezwaar

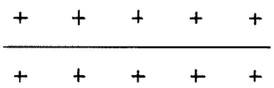
G. Schoemaker
OW & OC, R.U. Utrecht

Summary

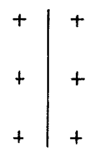
The problem: To find a line through only one point on the grid, one needs for solution the concept of irrational numbers. Do 15 year old kids understand the irrationality of $\sqrt{2}$? I have many doubts.
Anyhow they can have a lot of meaningful experiences such as peg board problems, problems on the numberline, measuring the diagonal of a square before they learn about irrational numbers etc.
The first mentioned problem might enable students to overview the concept of irrationality.

De brugklas was bezig met de sommen van H2, blz. 31 uit "Getal en ruimte" deel 1.
Een leerling, Tim, – die tot nu toe slechte resultaten haalde voor wiskunde – vroeg me iets over som 21*). Ik weet niet meer precies z'n formulering. In ieder geval bleek me bij doorvragen dat hij bij roosterpunten dacht aan punten die getekend zijn op roosterpapier, dus ook punten zoals (2½, 2½). Ik nam hem mee naar het bord dat vol staat met roosterpunten, liet hem (2½, 2½) aanwijzen, geen roosterpunt, maar wel een punt op het rooster. Misverstand opgelost. We stonden er toch, de klas was bezig, de leraar liep helpend langs de rijen. En ik vroeg aan Tim: "Kun jij een lijn trekken waar geen enkel roosterpunt op ligt?

Hij gebaarde zo

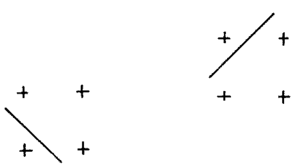


en zo



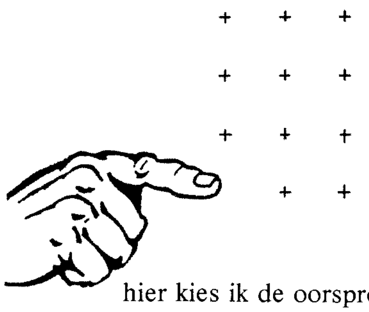
Ik bleef uitnodigend zwijgen ... en hij wees ook nog

en zo



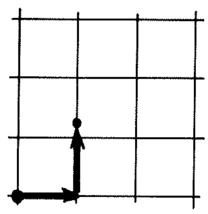
Hij gaf blijk het nog steeds leuk te vinden, keek nu mij bemoedigend aan, zo van: vraag nog maar eens wat. Ik kan u nooit de volle zekerheid geven dat ik de situatie goed aanvoelde, zelf ben je daarvan op zo'n moment overtuigd. Als je het opschrijft realiseer je je het ontbreken van overtuigend bewijsmateriaal. Ik kan wel wat verzinnen over kleurtjes op de wangen, glinsterende oogjes en zo, maar dat is allemaal geklets. Dat heb ik niet waargenomen. Ik had een totaalindruk in een flits en daar ging ik op af. Ik zou het bespottelijk vinden in zo'n situatie te controleren of ik het bij het rechte eind had. Die controlevraag zou de bereidheid knap kunnen verstoren.

De volgende vraag dus



hier kies ik de oorsprong.

Nu neem ik een lijn door 0 die zó gaat: steeds 1 stapje naar rechts en dan 1,3 omhoog, kijk zó:



Hij rekende hardop: "Dan wordt het ... 2,3 ... oh nee, 2,6 ..." Hij rekende verder en zei toen: "Als je dichterbij komt, ga je ook weer verder weg".
Ik interpreteer als volgt: hij was bij 3,9 gekomen, vlak bij de 4, maar bemerkte dat de volgende doorgang bij 4,2 was, dus weer verder weg van een roosterpunt. Ook dit heb ik niet geverifieerd, u kent inmiddels mijn argumentatie. Voor wat betreft de vraag of deze lijn ooit nog door een roosterpunt ging dacht hij van niet. Ik liet het zo. Aan het eind van de les kwam hij naar me toe en vroeg hoe het nu zat. De bel was gegaan, geen tijd voor een leergesprek. Ik noemde het punt (10,13). Toen vroeg ik toch nog: "Zijn er meer punten?" Spontaan antwoordde hij (20,26). "Zijn er meer?" "Zoveel je maar wilt". Een mooi moment om afscheid te nemen van Tim.

---

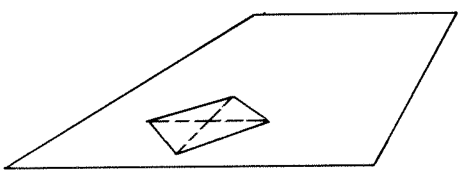
*) a. Teken een assenstelsel. Teken de punten A(−2, −2); B(3,3) en het lijnstuk AB.
b. Kleur de roosterpunten op lijnstuk AB die tussen A en B liggen. Noteer hun coördinaten.

Een terugblik

Toen ik dit verhaal aan een leraar vertelde zei hij: "Mooi verhaal, ik heb altijd een hele klas om op te letten". Ik zei toen sarcastisch, doelend op de huwelijksadvertenties: "Eén kind geen bezwaar". Ik bedoelde ermee, het moet toch kunnen in een klas ook eens even bezig zijn met één kind. Dat moet de klas kunnen accepteren en de leraar moet het durven eisen en 't is wel inspirerend. Terug naar het gesprekje met Tim. Er zit natuurlijk een volgende vraag achter: Kun je een lijn door 0 trekken die behalve door 0 door geen enkel roosterpunt gaat?
De vraag over de lijn die je krijgt door 1 stapje naar rechts te gaan en 1,3 omhoog is daarbij een hulpvraag. Maar kun je dit probleem gebruiken bij de invoering van irrationale getallen? In ieder geval leek het probleem me bruikbaar voor leerlingen die al lang de irrationale getallen kennen, – bijvoorbeeld in 4 VWO –, maar dan zonder de hulpvraag. Leraren die het probeerden hadden weinig bemoedigende ervaringen. Ook studenten in de afstudeerfase bleken er nogal wat moeite mee te hebben.

Een les in 2-Havo

In een 2-HAVO-klas zag ik een student aan de gang met "Getal en ruimte". In het boek wordt worteltrekken geïntroduceerd als een inverse van machtsverheffen. Hij wilde het wat meer laten stoelen op eigen ervaringen. Daarom had hij voor het begin van de les een vierkant met een diagonaal van twee meter op de grond gemaakt met afplaktape, en wel zo:



Hij liet de klas om het vierkant gaan staan – vroeger was dat in carré aantreden – ze mochten de lengte van de diagonaal schatten. Een meisje zei: "Ongeveer net zo lang als ik, één meter vijftig". Een leerling ging op de diagonaal liggen. Tenslotte werd er gemeten met een duimstok. Meetresultaat: twee meter. Leerlingen naar hun banken, student naar het bord. Hij tekende het vierkant. En nu vroeg hij de lengte van de zijde te schatten.
Alle antwoorden schreef hij op:
1.25 m
1.40 m
1.30 m
1.20 m
1 m
Ik zag een knaapje de bank uit sluipen, laag door de knieën liep hij snel voet voor voet over de zijde, terug naar de bank, liniaal langs de schoen. Hij kwam op 1.45 m.
De student richtte de aandacht op de oppervlakte. Na wat gezoek kwam men op 2 m^2. Toen werd de zijde gemeten van het vierkant. Ze kwamen op 1.42 m. De student bepaalde de aandacht weer bij het bord.
Eén van de leerlingen zei wijzend naar 1.42 m: "Dat kan nooit".

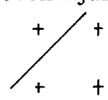
De student ging er niet op in. Jammer dat het bleef liggen. Dit is nu wel zo'n situatie om door te vragen vanwege het voor de rest van de klas belangrijke antwoord. Ik vermoed dat hij door had dat 1,42^2 niet 2 is. En ik denk dat hij er vlak bij was te snappen, dat nieuwe aanvoer van decimalen geen uitkomst biedt.

Hoe zou het verder kunnen?

Na de kunsten met het vierkant en de eerste ervaring van de ontoereikendheid van nieuwe decimalen achter 1,41, om te komen tot een getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 2, zou je al heel tevreden kunnen zijn.
In een volgende les zou gezocht kunnen worden naar volgende decimalen, om toch wat dichterbij te komen m.b.v. een rekenmachientje. Daarnaast zou de aandacht nog eens bepaald kunnen worden bij de zijde van het vierkant. Om de lengte ervan aan te geven heb je een nieuw soort getal nodig.
Ook aan het eind van deze les zou men tevreden kunnen zijn, zeer tevreden. Dan maar eens wat lessen sommetjes maken en het begrepene nog eens opfrissen. En daarna zou ik wel eens willen zien hoe leerlingen reageren op het eerder gestelde probleem op het rooster. Zouden ze erop komen als je praat over een lijn door O en door (1; 1,325), dan gaat deze lijn ook door (1000, 1325). Nieuwe decimalen achter 1,325 stellen het volgende roosterpunt iets uit, maar het is niet te ontlopen, tenzij +++
Zouden ze die sprong maken?
Ik sprak er met Nanda Querelle over en ze bood aan in twee derde klassen MAVO een les hieraan te besteden. De kinderen hebben Pythagoras al gehad en in feite is aan de voorwaarden hierboven voldaan.

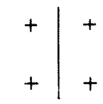
Een les in 3-MAVO

Op 5 november, het derde lesuur. Klas 3-MAVO komt binnen. Nanda deelt blaadjes uit met roosterpapier.
Paniekerig hoor ik: "Juf, krijge we proefwerk?" "Stil nou effe", sist een leerling als Nanda begint.
"Teken een rechte lijn die niet door de roosterpunten gaat – die door geen enkel roosterpunt gaat – roosterpunten zijn de kruisjes".
"Juf, moet je eerst een assenstelsel tekenen?"
"Dat moet je zelf weten".
Klas aan het werk, Nanda loopt rond: "Probeer er eens meer te vinden, niet evenwijdig aan de lijn die je al hebt".
Een leerling tekent:

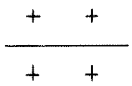


met 45°

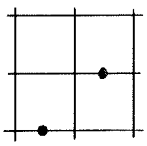
Ik vang op: "Ze zeg toch tegen ons as ti langer was, mag ti d'r ook niet doorheen gaan".
Andere leerling: "Ik ken er wel zo twintig verzinnen".
De overheadprojector wordt aangezet.
Nanda tekent:



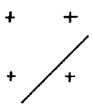
Deze heb ik overal gezien en die ook:



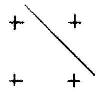
"Nog één, hoe trekken we die, zodat we zeker weten dat er geen roosterpunt op ligt?"
Een jongen geeft een recept: "Een klein ruitje, dan een punt op de helft en dan doe je die d'r boven schuin nog es".
Nanda tekent:



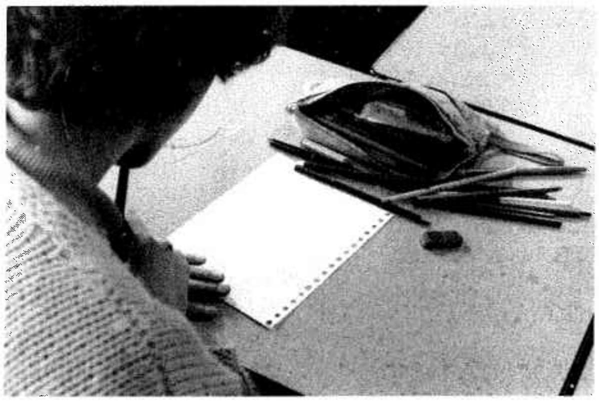
Dan volgen snel lijnen



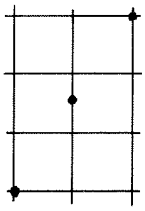
en



Nanda: "Zoek eens op (1,2); ga vanuit dat punt 3 naar rechts en 2 naar boven. Zoek eens meer punten op die rechte lijn".
Uit de klas: "Oh, dan ligt die er ook op".
In koor "(−2,0)". "Oneindig veel", zegt het meisje dat zojuist siste: "As ti langer was mag ti d'r ook niet doorheen gaan".
Nanda: "Waar moet je op letten?"
Klas: "Steeds 3 naar rechts en 2 omhoog".
Nu tekent Nanda twee roosterpunten. Ze zegt: "Ik beweer dat deze lijn behalve door deze twee punten door geen enkel ander roosterpunt gaat, er tussen niet en er buiten niet. Wat vind je daarvan?"
Sommigen geven haar gelijk, anderen twijfelen.
Nanda herhaalt haar bewering: "Probeer het eens uit te vinden".



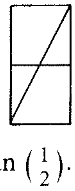
Een jongen noemt de coördinaten van de punten (5,5) en (−8,−4), hij zegt dat er dan meer moeten zijn.
Nanda volhardt.
Een jongen zegt dan: "Zo'n stuk wat nou op het bord staat, zo'n stuk moet je verder gaan en dan krijg je weer een roosterpunt".
"Zijn er roosterpunten tussen?"
"Halfjes", wordt er gezegd.
Nanda: "Is 5½...." "Oh nee".
"Waarom niet?"
"Je kan die getallen die naar rechts gaan en omhoog niet door twee delen".
Nanda: "Wel door drie?"
"Gaat ook niet".
Nanda: "Nu een nieuwe". Ze tekent op de overheadprojector op een sheet met roosterpunten. "Probeer een lijn door 0 die verder van z'n levensdagen nooit meer door een roosterpunt gaat".
Uit de klas: "Kan niet". "Ja wel, kan wel, een schuine rechte lijn". Een leerling zegt dan: "'t Gaat toch niet, je komt steeds iets hoger, op 't laatst gaat ie toch een keer".
Nanda bij de overheadprojector: "Als ik zó ga". Ze tekent



door (1,1½) en dan steeds $\binom{1}{1\frac{1}{2}}$ verder "kom ik door een roosterpunt".
Een jongen zegt grinnikend: "Bij één éénmiljoenste heb je voorlopig wel genoeg".
Nanda: "Hoe vaak?"
"Eén miljoen".
Nanda noemt 1,3.
Uit de klas: "Tien keer".
Een leerling oppert 1,33333 ... (Het repeteren blijft liggen, later in de les is hij naar Nanda toegestapt om dat nog eens te vragen...).
Nanda herhaalt de vraagstelling: "Is er een lijn?"
Een leerling zegt: "Als er nooit een heel getal uitkomt".
Een ander: "Alleen door (0,0)".
Weer een ander: "Iks". Dit gaat verloren in het geroezemoes van antwoorden.

Nanda neemt nog een aanloopje: "Als we steeds 1 naar rechts gaan en 1,3 omhoog, kom je dan wel weer eens in een roosterpunt uit?"
Leerling: "Na tien keer ben je bij (10,13)".
Een meisje zegt dan: "Oh, is een roosterpunt alleen maar met hele getallen?"
Ineens zegt Ferrie: "Iets met een wortel".
Nanda pikt dit op uit de verscheidenheid van antwoorden. Hij stelt voor steeds $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{13} \end{pmatrix}$ te nemen.
"Kun je $\sqrt{13}$ tekenen?" Dat blijken ze nog te weten van Pythagoras.
"Met de rekenmachine kun je $\sqrt{13}$ wel uitrekenen", zegt een leerling, "maar nooit precies".
"Kom ik ooit op een roosterpunt?" herhaalt Nanda.
"Nee, want het is een wortelgetal".
Een jongen zegt op waarschuwende toon: "Maar er zit een maar aan ...... 25".
Als je de wortel van 25 neemt zit je meteen al in een roosterpunt.
Dan gaan ze aan hun gewone werk, het heeft een kwartiertje geduurd. Eén leerling hoor ik nog zeggen: "Je hebt het toch gehoord dat je d'r nooit komt".
Het daarop volgende lesuur hadden we een parallelklas.
Hetzelfde repertoire duurde hier wat langer. Nanda ging wat uitvoeriger in op het probleem. Ze releveerde aan een boomgaard met bomen op een rij. Op de vraag naar een roosterpunt tussen $(-6,-5)$ en $(7,4)$ volgt eerst een antwoord op basis van aanschouwing. In deze klas duurt het lang voordat de leerlingen doorhebben dat de aanschouwing bij deze problemen erg bedrieglijk is. Als Nanda een redenering vraagt voor het ontbreken van roosterpunten tussen $(7,4)$ en $(-6,-5)$ hebben de leerlingen het over de helft nemen wat hier niet gaat. Nanda komt met een vector van het ene punt naar het andere $\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Kinderen zeggen: "Dan doet hij het bij $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, en bij $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ ook.
Nanda: "Waar kun je dat aan zien?"
Weer volgt: "Het dubbele".
Nanda vult aan: "Of door 3 delen". Kennelijk is "het dubbele" representant voor deelbaarheid door een geheel getal $\geqq 2$. Twee is dan de eerste de beste.
Ook hier komen de leerlingen met een wortelgetal. Ze laten zien dat ze $\sqrt{5}$ wel kunnen construeren, zo



als lengte van $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Als Pythagoras er ook nog bijgehaald wordt, zegt een jongen tegen Nanda: "Je moet niet alles door mekaar hale".
Nanda reageert hierop met de woorden: "Wiskunde is net een legpuzzel; je leert steeds meer stukjes kennen en ineens zie je dan ook hoe ze aan elkaar passen".
Ik kan het niet laten met één leerling nog eens door te praten. "Stel dat ik met zo'n lijn met bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ als richtingsvector toch een punt vind, heel ver weg". Hij kan de redenering heel moeizaam volgen dat $\sqrt{3}$ dan een breuk zou zijn, maar ineens zegt hij dat hij het nu door heeft.
Toen ik de school uitkwam viel me ineens de kraan op bij de huizen in aanbouw. Dezelfde vraag in de ruimte: Gaat de lijn ooit door een hoekpunt van een kamer?

Naschrift

De student van het vierkant heeft een volgende les gegeven met een getallenlijn die op de vloer was gemaakt van afplaktape. Elk groepje leerlingen kreeg 45 kaartjes met getallen zoals $\sqrt{9}$; π; 3,14; $\sqrt{10}$ enz. Van elk getal moesten ze aangeven in welke verzameling(en) het zit: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Q}$. Tenslotte moesten ze de kaartjes neerleggen bij de getallenlijn. Hij "had 2-havo plat" zoals hij 't uitdrukte.
Begrijpen dat $\sqrt{3}$ geen rationaal getal is, betekent dat je in wezen zoiets abstracts zit te doen als $(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q} \wedge Q) \Rightarrow P$. Zijn leerlingen van 14-15 jaar daar aan toe? Ik heb er mijn twijfels over. Wel geloof ik dat het zinnig is allerlei situaties naar voren te halen – eerder aan de orde stellen –, zoals activiteiten op de getallenlijn, met roosterpapier, met vierkanten, redeneringen met getallen zoals $(1,41....7)^2$ kan nooit 2 zijn, enz.
Bij de vraag naar moeilijke roosterpunten tussen $(5,5)$ en $(-8,-4)$ biedt heel precies tekenen en goed kijken geen uitsluitsel, maar redeneren wel. Dat zijn goede wiskundige ervaringen. Ook voor leerlingen die nooit toekomen aan irrationale getallen.
De vraag naar de lijn die slechts door één roosterpunt gaat zou ertoe kunnen leiden de hele zaak nog eens op een rijtje te zetten.