

Wiskunde & heterogeniteit

Hoe benut je verschillen tussen kinderen bij het leren van wiskunde

Rijkje Dekker

U.v.A., Amsterdam

Summary

Many schools experiment with heterogeneous groups (especially in the 12-13 age group). The question is how to cope with the differences between the children. This article is an attempt to investigate some possibilities.

The first part tells about an experiment on a group of teachers, students, parents, involving a simple mathematical problem.

The second part deals with the theory, based on articles by Freudenthal.

The third part has some examples of lessons at a school.

The author sees some clear advantages in working within heterogeneous groups (you have to explain your ideas, you learn from mistakes by others, you're speaking more freely); and has some ideas about what kind of mathematics should be taught (not too formal, from daily life, problem oriented).

A. Verantwoording

Een pleidooi voor onderzoek

Veel scholengemeenschappen experimenteren momenteel met heterogene brugklassen. Leerlingen die anders naar het LBO, MAVO, HAVO of VWO doorgestuurd worden, blijven in deze klassen bij elkaar. Dit stelt nieuwe eisen aan het onderwijs. Centrale vraag hierbij is, hoe men omgaat met de verschillen tussen de leerlingen. Er zijn differentiatie-modellen ontwikkeld die deze verschillen trachten op te vangen door kinderen verschillend lesmateriaal aan te bieden of in te delen in homogene deelgroepen. Verschillen tussen leerlingen in niveau en aanpak worden hierbij opgevat als onderwijsstrend.

Ideeën om verschillen tussen leerlingen juist te benutten in het onderwijs ontwikkelen zich wel, maar in de praktijk kan men er nog maar weinig mee uit de voeten (zie G1).

Freudenthal draagt vanuit zijn visie en ervaring op het gebied van didactiek van de wiskunde argumenten aan om verschillen tussen leerlingen te benutten bij het leren van wiskunde. Hij stelt dat de structuur van het leerproces bij wiskunde zich leent voor het samenwerken van leerlingen van verschillend niveau. Dit zal in de praktijk bekeken moeten worden door bijvoorbeeld het gericht observeren van kleine heterogene groepjes van ongeveer vier leerlingen. Er zal met

name onderzocht moeten worden hoe verschillen tussen leerlingen kunnen bijdragen tot intensivering van het leerproces bij wiskunde.

In dit verslag probeer ik het terrein vast wat te verkennen om onderzoek in die richting voor te bereiden.

B. Een oefening met kubusuitslagen

Een begin van theorievorming door het uitvoeren en nabespreken van een wiskundeopdracht

"Amsterdam voor de Middenschool, de Middenschool voor Amsterdam".

Onder dit motto organiseerde het onderwijsbureau van de CPN te Amsterdam in de Osdorper Scholen Gemeenschap een Middenschoolconferentie. Opzet was om inhoudelijk met elkaar te discussiëren over de ervaringen die er opgedaan waren in de diverse experimenten in de stad. Er waren 150 deelnemers waaronder mensen van de middenschoolen de Open School Bijlmer (OSB) en de Scholen Gemeenschap Centrum Oud-West (SGCOW). Verder mensen van basisscholen, ouders, studenten, schoolbegeleiders en onderzoekers. Een gedeelte van de conferentie vond plaats in themagroepen. Eén themagroep "de heterogene leerlinggroep" werd geleid door Reina de Wit, projectleidster op de SGCOW en mijzelf. De groep bestond uit 20 mensen.

We hadden het allemaal zo mooi bedacht, Reina en ik. We wilden nu eens niet kijken naar de moeilijkheden van het werken met een heterogene groep en ook niet naar alle ingewikkelde differentiatie-modellen die er zijn. We wilden juist nagaan waarom het werken met heterogene groepen in de middenschool zo belangrijk is en wat de kracht is van de heterogene groep, hoe je die kracht het beste kan gebruiken. Reina zou een inleidend praatje houden en dan zou de bijeenkomst in drie delen uiteenvallen:

1. Discussie rond de vraag:
"Zijn heterogene groepen een absolute noodzaak in de middenschool om de selectieve werking in het onderwijs te bestrijden?"
2. Oefening met kubusuitslagen ter introductie van 3.
3. Discussie rond de vragen:
"Wat is de kracht van de heterogene groep?
Onder welke voorwaarden?"

1. Het was benauwd in het lokaal en de discussie verliep stroef. Misschien was de vraagstelling wat te abstract. Alleen de mensen van de OSB en de SGCOW waren aan het woord en leken tegenover elkaar te staan. Net of ze hun scholen tegenover elkaar en ons moesten verdedigen. Dat krijg je er ook van als experimenteerscholen, met zoveel druk van buitenaf en zoveel ogen op hun gericht, zich constant naar buiten toe moeten waarmaken.

Maar ja, niemand vond het leuk en dat kon je goed zien. We hebben toen geprobeerd de overeenkomsten en verschillen tussen de scholen op een rijtje te zetten en dat haalde gelukkig de spanning weg. Meer mensen voelden nu ruimte om mee te praten en mee te denken en zo kregen we toch wel een aardig beeld hoe het is om met wiskunde in heterogene groepen te werken. Kort samengevat kwam de discussie hierop neer:

Op de OSB staat de pedagogische aanpak centraal. De bedoeling is dat leerlingen met elkaar omgaan, elkaar accepteren en dan elkaars verschillende inbreng leren gebruiken. De leerstof komt op de tweede plaats.

Op de SGCOW wordt naast de pedagogische aanpak ook de leerstof erg belangrijk gevonden, gezien de maatschappelijke betekenis van diploma's. Bij de mensen die wiskunde geven is er een streven om wiskunde met de leerlingen te doen die voor hen op dat moment zinvol is. Bijvoorbeeld wiskunde die ze bij projectonderwijs kunnen toepassen. Maar er moeten ook stukken formele wiskunde geleerd worden, ten behoeve van een goede voorbereiding op de bovenbouw. En dat is wiskunde waar vaak veel moeilijker het "nut" van aangetoond kan worden.

Op de OSB gaan ze daar anders mee om. Daar gaat het er niet in de eerste plaats om de wiskunde zelf zo zinvol mogelijk te maken. Ze willen de wiskunde meer als middel gebruiken om het zelfvertrouwen van leerlingen te vergroten.

Beide scholen kiezen heel duidelijk voor het werken met heterogene groepen, maar beide scholen voelen daarbij wel de druk van de nog bestaande eindexameneisen. Dit leidde tot de vraag of je de selectieve werking in het onderwijs wel echt bestrijdt. Stel je de selectie niet alleen maar uit?

De beide scholen bevestigden dat de selectie of liever het keuzeproces wel wordt uitgesteld, maar dat daarentegen die keuze na drie jaar wel beter en meer op grond van interesse en eigen mogelijkheden van de leerling kan worden gedaan.

2. Onze themagroep was in vele opzichten heel heterogeen: studenten, ouders, mensen van basisscholen, van de OSB, SGCOW, onderzoekers en schoolbegeleiders. Daar hadden we ook op gehoopt. We stelden voor zelf iets te doen om de kracht van die heterogeniteit te proeven. Daar was iedereen meteen voor te vinden. In groepjes van vier of vijf werd de volgende wiskundeopdracht uitgevoerd: elk groepje kreeg drie vellen papier met daarop 12 kubusuitslagen getekend (dat zijn bouwplaten van kubussen, zonder plakrandjes) en een schaar. Niet alle uitslagen vormden goede kubussen. De bedoeling was om met je groepje uit te zoeken welke uitslagen goed waren. Voorwaarde was dat alle groepsleden over het eindresultaat het echt met elkaar eens moesten zijn.

Er werd flink overlegd. Een meisje zag het direct en probeerde dat in handen- en voetentaal om te zetten voor de anderen in haar groepje. Een wiskundestudent wilde met veel verbaal geweld een meisje van het knippen afhouden. Na lange aarzeling knipte ze toch. Een afgang vond hij het, zo te zien. Een leraar nam in zijn groepje direct de leiding en begon taken te verdelen maar dat werd niet gepikt. En Reina en ik genoten, want wij konden alles, als officiële observatoren, rustig bekijken.

3. Na een nabespreking in groepjes hebben we met z'n allen de volgende antwoorden verzameld op de vragen:
"Wat is de kracht van de heterogene groep? Onder welke voorwaarden?"

Het is leuk om in groepjes te werken, leuker dan alleen of in een grote groep.

De sfeer is veiliger, het overleg intensiever. Als de opdracht "open" is d.w.z. als er meer aanpakken mogelijk zijn, komen er verschillende oplossingsmethoden naar voren (de een ging knippen, de ander probeerde het uit het hoofd, weer een ander ging vlakken en ribben tellen).

Die verschillende manieren brengen je op nieuwe ideeën. Het is nodig om afspraken te maken (bijvoorbeeld dat ieder ook de tijd heeft om zelf erover na te kunnen denken).

Belangrijk is dat ieder het gevoel heeft met de opdracht uit de voeten te kunnen.

Ook moet er voor ieder een uitdaging in zitten.

Als een van de belangrijkste voorwaarden voor het werken in een heterogeen groepje werd gevonden dat niet alleen het eindproduct maar ook het proces benadrukt wordt:

Hoe is het produkt tot stand gekomen?

Hoe is er samengewerkt?

Hoe is er van ieders inbreng gebruik gemaakt?

En al die samenwerking leidde ertoe dat geen enkel groepje nog de behoefte had om het produkt van deze oefening, de goede kubusuitslagen, te laten controleren.

Zelfs deze niet:

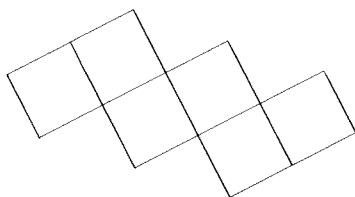


fig. 1

C. Theorie aan de hand van Freudenthal

Een ander licht op de zaak door een analyse van het leerproces van wiskunde

In dit gedeelte bespreek ik die artikelen waarin ik theoretische argumenten heb kunnen vinden voor het leren van wiskunde in een heterogene leergroep. Het zijn drie artikelen van Freudenthal waarin hij telkens met andere nuances dezelfde ideeën uitdrukt (zie G3, 4 en 5). Citaten uit deze artikelen staan tussen aanhalingstekens.

0. "In een groep moeten de leerlingen samen, elk op het voor hem gepaste niveau, hetzelfde onderwerp bewerken. De samenwerking moet de leerlingen op alle niveaus toegang naar een hoger niveau openen, die van het lagere omdat ze zich op die van het hogere kunnen oriënteren, die van het hogere omdat de blik naar het lagere niveau hun nieuwe inzichten ver-schaft.

Het is hierbij essentieel dat ook de leerling op het lage niveau een breed stuk wiskunde kan doorlopen. Er is immers niet alleen een geleiding volgens niveaus, maar ook volgens leerstof, waardoor het mogelijk is telkens weer ergens op het laagste niveau te beginnen, zonder te steunen op ervaringen van een hoger niveau."

1. Met een groep bedoelt Freudenthal een bewust heterogeen samengestelde kleine groep van bijvoorbeeld vier leerlingen. Zo'n groep zou groot genoeg zijn voor leerlingen om goed met elkaar te kunnen overleggen. Overleg en uitleg, taal in het algemeen, vindt Freudenthal belangrijke elementen in de wiskundige vorming. Zo'n groep zou tegelijk klein genoeg zijn zodat de leraar het samenwerken nog goed kan observeren en kan bijsturen als dat nodig mocht zijn. De groep zou heterogeen moeten zijn wat betreft niveau, geaardheid en inbreng in de samenwerking. Het kan belangrijk zijn om een gangmaker(tje) in de groep te hebben.

Zelf lijkt het me goed als ook jongens en meisjes en, als er buitenlandse kinderen in de klas zitten, ook buitenlandse en Nederlandse kinderen samen in een groepje werken (zie F). Misschien niet direct ten behoeve van de wiskunde maar wel voor een goede sfeer, waar ieder zich geaccepteerd voelt. Basis voor elk leren, lijkt me.

2. De structuur van de wiskunde zou zich lenen voor samenwerking op verschillend niveau. Met niveaus in de wiskunde bedoelt Freudenthal niveaus van begrip: wat op het ene niveau activiteit is, wordt op het volgende niveau onderwerp van beschouwing. Door die beschouwing of reflectie kan je die activiteit dan weer verbeteren. Het voordeel van samenwerken zou nu hierin zitten dat kinderen op een hoger niveau het lagere niveau bij anderen kunnen observeren, de activiteiten kunnen bekijken, zodat ze hun niveau met nieuwe inzichten kunnen versterken. Want soms is het makkelijker het leerproces van anderen te beschouwen dan dat van jezelf.

Kinderen op een lager niveau kunnen zich op het hogere niveau oriënteren, en daardoor weten waar ze naar toe kunnen werken. Uitleg vragen zou hen daarbij kunnen helpen. Degene die uitlegt wordt dan weer gestimuleerd om over het eigen leerproces na te denken en dat onder woorden te brengen.

Bovendien: "De uiteenzetting van een ander niet te begrijpen en het durven zeggen kan een belangrijke bijdrage zijn, als de ander daardoor gedwongen wordt zijn gedachten opnieuw te ordenen en anders uit te drukken".

Het lijkt aantrekkelijk en aannemelijk. Maar ik vraag me af of al het wiskunde bedrijven in verschillende niveaus is uit te drukken. Ik kan me voorstellen dat er ook opdrachten zijn die door verschillende kinderen heel verschillend aangepakt worden en dat dat niet in niveaus is in te delen.

Verder spreekt Freudenthal over kinderen op verschillend niveau. Ik weet niet of hij bedoelt dat kinderen in niveaus zijn in te delen. Zelf denk ik van niet. Hoogstens zou je kunnen zeggen dat op een bepaald moment de een iets sneller door heeft dan de ander. Maar dat hoeft verder nog niet zoveel te zeggen. Laat ik mezelf maar als voorbeeld nemen.

Als ik mijn eigen leerproces en mijn samenwerking met anderen beschouw, dan merk ik dat ik vaak de zaken wat intuïtief aanpak, gauw grote lijnen zoek en denk te zien, afgeschrikt word door formules, aange-trokken door plaatjes, verveeld raak door voorspelbare uitwerkingen, geboeid word door het zoeken en zien van structuren, symmetrieën. Verder ben ik minder gericht op toepassingen van de wiskunde, veel meer op grondslagen.

Door samenwerking met anderen ben ik me dat bewust geworden. Die samenwerking heeft me ook geleerd de gedegen weg niet te schuwen, bij het begin te beginnen, niet te lang in beschouwingen te blijven hangen. Dat versterkte soms mijn eigen "snelle" inzichten. Soms ook zag ik in dat ze nergens op gebaseerd waren.

Is er bij zo'n samenwerking nu sprake van niveauverschil? Ik weet het niet. Maar als de samenwerking goed ging dan schoten we soms vooruit en het was dan echt niet meer te zeggen wie nu precies het niveau bepaalde. Die niveauverschillen, dat ligt heel gecompliceerd, denk ik. Ook emoties zijn van grote invloed. In de voorbeelden in D kom je dat o.a. bij Norma tegen.

Wel ben ik ervan overtuigd dat overleg, het accepteren en benutten van ieders unieke inbreng, elk groeps-lid kunnen verrijken en bewust kunnen maken van het eigen leerproces. Niveauverschil of niet.

3. Volgens Freudenthal gaat de overgang van het ene niveau naar het andere gepaard met sprongen, discontinuïteiten, heel eigen aan het leren van wiskunde. Niets kan motiverender zijn dan opeens iets door te hebben, de puzzle valt in elkaar, het (over)zicht is er. Deze motiverende momenten zou je moeten benutten, uitlokken, verhelderen, desnoods forceren. De leerstof zou hier op aan moeten sturen, dus niet voorgestructureerd maar probleemgericht, activerend.

Die sprongen zouden misschien samen beleefd kunnen worden, na het zoeken en het denken met elkaar. Misschien wel eerder dan elk apart had kunnen maken. Ze zouden een enorme impuls voor de samenwerking en voor het leren van de hele groep kunnen zijn.

Niveausprongen herken ik ook in m'n eigen leven. Ik denk dat het heel belangrijk is dat degene die zo'n sprong gemaakt heeft dat een ander probeert na te laten doen. Dat vereist goede reflectie op je eigen leven. Want je helpt een ander niet door te zeggen: "Dat doe je gewoon zo!" Of door woorden te gebruiken die bij jouw inzicht op dat moment horen maar die de ander, die dat inzicht nog niet heeft, niet begrijpt. Die aapt jou dan misschien alleen maar na, of praat je na, zonder enig eigen inzicht. Een schijnniveau, zoals de van Hiele's dat noemen. Verder zal ik hier niet op de niveautheorie van de van Hiele's ingaan.

4. Dat hele gebeuren van samenwerken, elkaar helpen, uitleggen, kan tot gevolg hebben dat leerlingen leren didactisch te leiden en geleid te worden. Ook zouden ze dat dan weer kunnen verbeteren door erover na te denken en erover te praten. Wegwijzer-tjes hiervoor zouden in de leerstof opgenomen kunnen worden.

5. En de wiskunde?

Die zou "aan de realiteit gelieerd, nabij de kinderen, maatschappelijk relevant" moeten zijn, zoals Freudenthal dat uitdrukt en het in het IOWO(2)-materiaal vorm heeft gekregen.

Uitgaan van en aansluiten bij de leef- en denkwereld van kinderen, zoals onderwijskundigen dat noemen en in projectonderwijs trachten te realiseren. Uitdagend, zou ik er zelf nog aan toe willen voegen.

D. Praktijk op de SGCOW

Praktijkvoorbeelden waarin iets van het voorafgaande is terug te vinden.

Op de SGCOW heb ik in twee tweede klassen gesprekken met leerlingen gehad over samenwerken en ook samenwerking bij wiskunde geobserveerd. Enige voorbeelden staan hier beschreven.

Ze illustreren hoe bij het leren en samenwerken emoties voortdurend een rol spelen. Hoe er bij uitleg aan elkaar een demonstratie(3) taaltje ontwikkeld wordt. Hoe vriendschap een rol speelt. Hoe soms een groepje bij het leren echt een sprong vooruit maakt. En hoe het ook weer helemaal mis kan lopen.



1. Yvonne en Norma.

Norma: "Wij werken wel samen, ja."

"We overleggen vooral als er verschillende ideeën zijn."

Yvonne: "Norma is vaak voor en legt mij vaak uit, ik snap haar goed. Soms leg ik haar ook wel uit hoor, want de tafels bijvoorbeeld, daar weet ze niet veel van."

Ze lacht vriendelijk.

Norma knikt blozend.

2. Yvonne, Norma en Manja.

Ze zijn begonnen met een pakketje 'coördinaten'

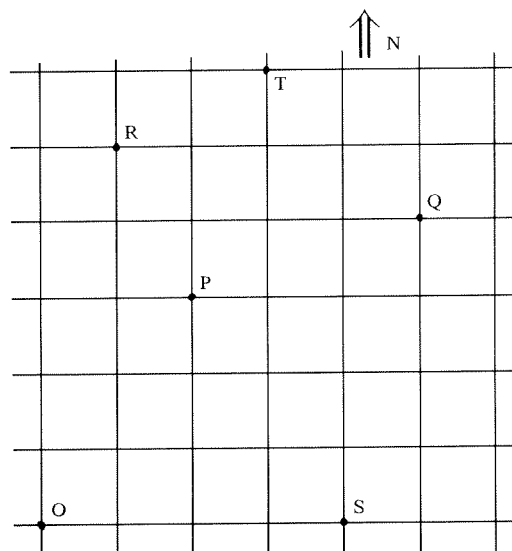


fig. 2

De plattegrond van een wijk van de saaiste stad ter wereld ziet er zo uit. De strepen stellen straten voor, daartussen liggen huizenblokken. Iemand die in het punt O staat en de weg vraagt naar de plaats waar de letter P bij staat, kunnen we zeggen: "Ga twee blokken naar het oosten en daarna drie blokken naar het noorden". We kunnen natuurlijk ook

zeggen: "Ga eerst drie blokken naar het noorden en daarna twee naar het oosten". Ook kunnen we zeggen: "Ga een blok naar het noorden, een blok naar het oosten en één naar het noorden, één naar het oosten en één naar het noorden". Is deze laatste weg langer dan, korter dan of even lang als de eerstgenoemde weg?

Verklaar je antwoord.

We kunnen de plaats van P heel kort aangeven met (2,3). Het eerste cijfer slaat op het aantal blokken naar het oosten, het tweede cijfer op het aantal blokken naar het noorden. De plaats van Q kunnen we aangeven met (5,4) en natuurlijk niet (4, 5).

Waarom niet?

De plaats van punt R kunnen we aangeven met (,)
 De plaats van punt S kunnen we aangeven met
 De plaats van punt T kunnen we aangeven met

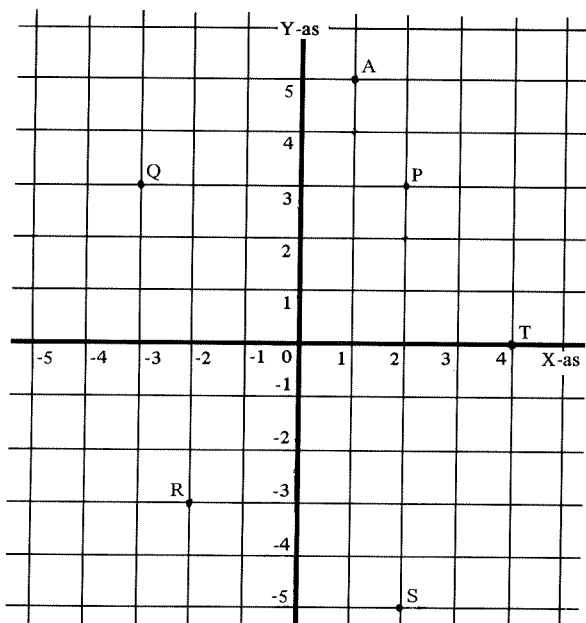


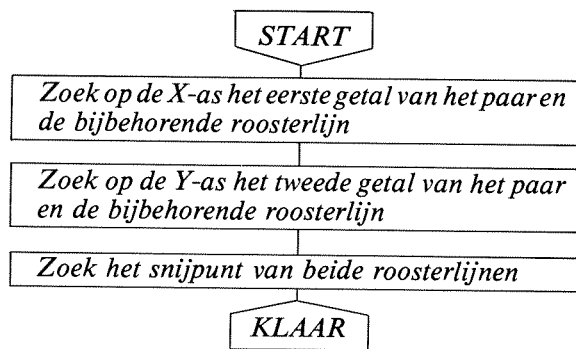
fig. 3

In het rooster hierboven is A het punt met de coördinaten (1, 5). Teken met het blokschema de volgende punten:

- B (5,1)
- C (5,-1)
- D (-4,4)
- E (0,5)
- F (3,0)
- G (-2,0)
- H (0,-3)

Welke getallenparen horen bij de punten P, Q, R, S en T?

- P (,)
- Q (,)
- R (,)
- S (,)
- T (,)



"Mag ik bij jullie zitten om te kijken hoe jullie samenwerken?"

Ja hoor, dat vinden ze leuk.

Ieder begint apart.

Norma denkt hardop.

Yvonne: "Wat vind jij korter Norma?"

Manja: "Je telt gewoon de hokjes, dan weet je het."

Yvonne: "Volgens mij maakt het niks uit hoe je telt."

Norma leidt, telt stapjes. "Punt R dat is (1,5)."

De anderen weten het nog zo net niet.

"Waarom?" vraag ik.

"Dat is toch duidelijk!"

"En S dan?"

"Ja, dat is, dat is (4)".

Ze accepteren het alle drie.

Ik probeer nog: "Hoe zou je een punt dat 4 hokjes boven 0 ligt noteren?"

"Ja dat wordt niet gevraagd."

Ze gaan door.

Norma schiet aldoor vooruit.

Ze denkt het met die negatieve getallen door te hebben, maar ze gaat af en toe de verkeerde kant op.

Manja snapt het wel en legt het Norma uit, maar die luistert niet zo best.

Ze is verstoord dat het haar niet lukt.

Yvonne luistert wel en snapt het nu ook een beetje.

Ik vraag of ze om de beurt de punten in het rooster willen zetten.

Dan krijgen ze alle drie een kans en kunnen ze wat beter overleggen.

Daar voelen ze wel wat voor.

Zo simpel is het toch niet.

3. Yvonne, Manja en Norma.

"Ben je er weer Rijk?"

"Nou, dan moeten we weer samenwerken."

Ze zijn bezig met het maken van een tekening.

De coördinaten van punten zijn gegeven.

Zij moeten ze op het rooster zetten en met elkaar verbinden.

Het wordt een zeilbootje met een vlaggetje erop.

Dat weten ze al.

Norma is al begonnen en begint Manja uit te leggen hoe ze het moet doen.

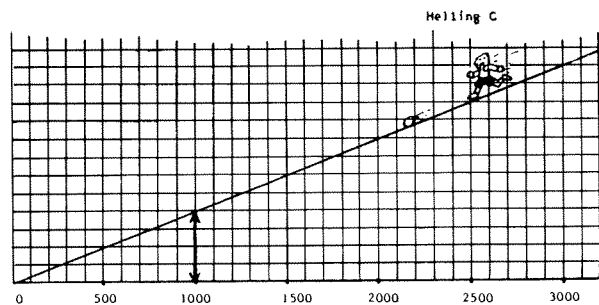
"Je neemt (11, 9), dat zit hier."

Ze legt haar linkerwijsvinger erop.

"Dan (11, 6), dat zit hier."

Haar andere wijsvinger.

“En dan trek je een lijn ertussen en dan moet je weer verder bij (11, 6).”
 “Ja, ja, dat doe ik zelf wel. Jij bent zo slordig.”
 Norma en Yvonne hebben samen hetzelfde vlaggetje geproduceerd.
 Manja krijgt een ander vlaggetje.
 Ze raakt in de war.
 Ze had het toch goed gedaan?
 Terug naar de coördinaten?
 Nee, Norma en Yvonne zullen het wel goed hebben.
 Ze neemt het van ze over.
 “Jantien (hun lerares), kom eens kijken?”
 “Zijn onze bootjes zo goed?”
 “Bijna, alleen de vlaggetjes kloppen niet.”
 “Verdomme,” zegt Marja, “had ik het toch goed.”
 Norma staat perplex.
 Yvonne lacht.



hoogteverschil	400
afstand	50	100	200	500	1000	2000

vul hier zelf de getallen in!

Weg C stijgt ... m over elke 100 m afstand.

4. Norma, Manja en Yvonne

Het pakketje is af.
 Ze hebben wat extra opdrachten.
 Weer tekeningen met behulp van coördinaten.
 Er schijnt nu een kikker uit te komen.
 Er is wat gebeurd bij gymnastiek.
 Iedereen loopt naar het raam.
 Niks te zien.
 Yvonne is afgeleid.
 Ik ben er ook niet bij.
 Het is warm in de klas.
 Yvonne kijkt bij Norma en schrijft over.
 Norma en Manja overleggen wat.
 Manja: “Volgens mij doen we het helemaal verkeerd.”
 Norma wordt onzeker, krast door haar werk.
 Alle drie werken ze nu apart.
 Norma maakt snel de kikker af en loopt weg.
 Manja doet het wat nauwkeuriger, het lukt.
 Yvonne is met Frans bezig.

5. Neeltje, Katja en Annelies.

Ze zitten naast elkaar met enige tussenruimte.
 “Werken jullie apart?”
 “Ja, meestal wel.”
 “Willen jullie nu samenwerken, dan kunnen jullie elkaar wat helpen, en ik wil graag zien hoe jullie dat doen.”
 Nou, vooruit dan maar.
 Ze schuiven aan en ik schuif mijn tafeltje er ook bij.
 “Help jij ons dan?”
 “Zo min mogelijk. Jullie komen vast al een heel eind met z'n drieën. Maar als het echt niet lukt dan help ik jullie wel.”
 Ze zijn bezig met een pakketje ‘procenten’ van het IOWO.
 Katja leest nauwelijks.
 Ze vraagt mij aldoor wat er staat.
 Annelies stoomt vooruit.
 Neeltje legt Katja wat uit, heel pinnig.
 Ze zijn dit duidelijk niet gewend.
 Elke vraag vuren ze op mij af.
 Ik speel ze terug, dat leidt wel tot enig overleg.
 Maar als ik niets zeg werken ze weer apart en willen ze Kees (hun leraar) erbij halen.

Die trapt er niet in.
 Ik zie dat ze een opgave bij helling C verschillend gemaakt hebben.
 “Laat eens zien aan elkaar?”
 “Ruil jullie pakketje eens?”
 Hé, allemaal wat anders.
 Daar beginnen ze over te praten.
 Annelies en Neeltje denken het al gauw van elkaar te snappen en gaan door.
 Katja haakt af.
 “Annelies wil jij het Katja uitleggen?”
 Ze heeft er geen zin in, zegt dat ze niet kan uitleggen.
 Neeltje ook niet.
 “Laat maar”, zegt Katja, maar ze redt het niet.
 Ik kan het niet aanzien en probeer haar te helpen. Het lukt niet.
 Ze snapt me niet, of ik haar niet.
 “Annelies, wil jij het toch niet uitleggen, mij lukt het niet.”
 Annelies wordt zichtbaar onzeker maar ze zet zich schrap. Eén vinger legt ze op de 1000 en met de ander telt ze de hokjes naar boven.
 “Vier”.
 Dan gaat ze naar rechts met haar vingers.
 De een langs de afstand, de ander langs de helling.
 Tegelijk noemt ze de getallen en geeft met haar monotone stem de regelmaat weer.
 “1500, 6 hokjes; 2000, 8 hokjes; 2500, 10 hokjes.”
 Ha, Katja snapt het.
 Ze krijgt er een kleur van.
 Ze neemt het over en noemt nu zelf de getallen, ook die ertussen in.
 Annelies laat zich niet kennen, maar ik zie dat ze gloeit van trots.
 En dan naar links de helling af.
 Dat wordt lastiger.
 Neeltje kijkt nu ook mee.
 “Kijk”, ze wijst 300 aan.
 “Hier gaat de lijn net boven het hokje, 100 meter dus.”
 “Nee, hoor,” zeggen Annelies en Katja.
 “Dat klopt niet want het is 0,0 en 500, 200 dus er precies tussenin dat is 100 en dat is dus bij 250.”

Overtuigd als ze nu waren van de regelmaat der getallen.

Hm, Neeltje snapt het nu ook.

De tabellen worden nu nog een keer goed bekeken en verbeterd.

Gedrieën ploeteren ze verder.

6. Paul, Martin en Marcel

Ze doen niet veel.

Martin en Marcel zitten te donderjagen.

Paul zit erbij te lachen.

“Mag ik een paar dingen aan jullie vragen, over hoe jullie samenwerken?”

“Jawel hoor!”

Paul: “Nou, ik leg het vooral allemaal uit aan Martin en Marcel. Die twee overleggen weinig.”

“Wiskunde gaat wel, dat rekenen met negatieve getallen vond ik leuk.”

Martin: “Ik werk graag alleen, ik leg niet graag wat uit. Het werken in een groepje vind ik niet nuttig. Uitleg is nergens voor nodig.”

“Wiskunde vind ik wel nuttig, maar niet leuk. Paul schrijft over.”

Marcel: “Ik kan wel goed met Martin samenwerken, we helpen elkaar veel. Bij projecten is Martin goed, hij helpt mij dan en bij wiskunde help ik hem.”

“Wiskunde vind ik leuk en nuttig maar Paul schrijft alles over.”

De bel gaat.

Paul: “Rijk, weet je hoe wij samenwerken?”

Met z'n stevige bruine armen pakt hij Martin en Marcel in een soort worggreep en brullend stommelen ze het lokaal uit.

E. Samengevat

Alle zeer voorlopige conclusies op een rijtje.

Enkele voordelen om bij wiskunde in kleine heterogene groepjes te werken:

- het kan leuk zijn om in groepjes te werken (zie B3);
- in zo'n klein groepje durf je je mond open te doen, daardoor kan je goed met elkaar overleggen (B3);
- als de wiskunde-opdracht open is komen er verschillende oplossingsmethoden naar voren. Dat kan je op nieuwe ideeën brengen (B3, D1);
- door intensief te overleggen en het samen eens te worden heb je je leraar minder nodig (B3, D5);
- door in je groepje de opdracht na te bespreken word je je bewust van je eigen leren, de invloed van anderen daarop, en je aandeel in de samenwerking (B3, C2);
- in een groepje kan je het leren van anderen zien, daardoor snap je soms beter hoe je zelf leert (C2);
- je leert ook uitleggen en goed naar een ander luisteren (D1, D2, D3, D5);
- als je de uitleg van een ander niet snapt en je durft dat te zeggen, dan help je die ander weer doordat die haar gedachten opnieuw moet ordenen en zich anders moet uitdrukken (C2);
- door uit te leggen leer je nadenken over je eigen leren en dat onder woorden te brengen (C2, C3, D2, D3, D5);

Welke wiskunde?

- wiskunde die aansluit bij waar kinderen mee bezig zijn of willen zijn (C5);
- niet te formalistisch, niet te abstract (D2, D5);
- wiskunde die ze kunnen gebruiken, bijvoorbeeld bij projectonderwijs (B1);
- wiskunde die breed is, dus veel onderwerpen, zodat je telkens opnieuw kunt beginnen (C0, D2, D5);
- wiskunde die niet strak voorgestructureerd is zodat kinderen zelf structuur kunnen aanbrengen (C3);
- wiskunde-opdrachten die open zijn zodat verschillende manieren van aanpak naar voren kunnen komen (B3);
- opdrachten waar ieder mee uit de voeten kan (B3);
- opdrachten die voor ieder uitdagend zijn (B3, C5);
- leerstof die niveausprongen uitlokt dus probleemgericht en activerend (C3);
- leerstof met daarin aanwijzingen om didactiek van onderwijzen en leren aan reflectie te onderwerpen (C4).

Welke kinderen bij elkaar?

- kinderen die op verschillende manieren problemen aanpakken (B3, C2);
- jongens en meisjes (C1, F);
- buitenlandse en Nederlandse kinderen (C1, F);
- kinderen met een verschillende inbreng in de samenwerking (C1, D1, D2, D3, D5);
- kinderen met verschillende vaardigheden (D1, D2, D3, D5, D6).

Welke begeleiding?

- een begeleiding gericht op grote zelfstandigheid van de groepjes (D5);
- gericht op het benutten van ieders inbreng (C1, D1, D2, D5);
- gericht op het proces van samenwerken en samen leren (B3, D2, D5);
- die meehelpt niveausprongen in het leerproces te verhelderen en te forceren (C3, D5).

F. Nog een verantwoording

Iets over de keuze van het onderwerp

Een jaar meedraaien in een vaksectie op een middenschool, de SGCOW in Amsterdam. Een jaar meehelpen materiaal ontwikkelen, lessen bijwonen, observeren, nabespreken. Met ouders praten, met leerlingen. Schoolconferenties mee voorbereiden. Een opzet maken voor een derde ongedeelde brugjaar(4).

Wat bracht me uit deze chaos op het spoor van differentiatie, of beter, integratie bij wiskunde?

Bij de wiskundelessen zaten de kinderen wel in groepjes maar hielpen elkaar nauwelijks. Ze riepen liever hun leerkracht erbij die daardoor, soms als een soort duizendpoot, van hot naar haar rende om maar aan de nooit aflatende vraag te voldoen.

Ik vond dat vreemd. Ik heb zelf lesgegeven op een middenschool in Lelystad. En daar had ik geleerd veel aan groepjes over te laten, samenwerking te stimuleren, individuele hulp desnoods wat achter te houden. Ze konden het elkaar vaak veel beter uitleggen.

Dan de groepjes in de klas. Die waren vrij: punkers bij

punkers; disco's bij disco's; jongens bij jongens; meisjes bij meisjes; Surinamers bij Surinamers; Turken bij Turken. Dat schijnt zich dan volgens de wetten der onveiligheid, onzekerheid en onbekendheid zo te moeten regelen.

Met Ben Knip, mijn begeleider vanuit de vakgroep didactiek van de wiskunde, had ik een gesprek over de subsidie-aanvraag voor het derde jaar. Ik had daar veel tijd aan besteed. Hij legde de vinger op de zwakke plek in het bij wiskunde gebruikte differentiatiemodel. Het was te individualistisch, te weinig gericht op samenwerking.

Het begon me steeds meer te intrigeren allerlei verschillende kinderen bij elkaar te halen, om ze vervolgens via min of meer verfijnde methoden weer apart te zetten?

Ik moest een knoop doorhakken. Hierop door, en mijn andere activiteiten drastisch verminderen. Het kostte me moeite. Ik voelde me erg thuis in dat allesomvattende schoolgebeuren. Ben heeft me gewezen op de noodzaak van die keus. Dus los uit de breedte, de diepte in.

Vanaf toen ging het hard. Veel literatuur over verschillen, weinig over het benutten van verschillen. Veel over "samen" maar heel weinig over "samen bij wiskunde".

Een bezoek gebracht aan West-Berlijn, aan een middenschool met 40% Turkse en 60% Duitse kinderen. Daar was een hele goede sfeer. Turkse en Duitse jongens en meisjes leerden daar samen te werken in tafelgroepen van vier à vijf kinderen. Ze gaven veel hulp aan elkaar en hadden veel plezier. Maar de wiskunde daar was saai: rijtjes procenten-sommen, rijtjes breuken.

Een gesprek gehad met George Schoemaker en Freudenthal. Ze raadden me aan me flink te beperken en vooral goed te observeren.

Toen oude observaties gericht nagespeurd: zie je wel... hier en daar....

Ik heb het idee dat ik nog maar net begonnen ben. De hele vaksectie wiskunde en vooral Kees, bedankt dat jullie me een heel jaar als één van jullie beschouwd hebben.

Ben, bedankt dat je me zo vrij hebt gelaten.

- (1) Scholen Gemeenschap Centrum Oud-West.
- (2) Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs.
- (3) Zie taalniveaus die Freudenthal onderscheid in "Weeding and Sowing", Hfst. IV, § 15.
- (4) De school had nog niet officieel de status van middenschool, inmiddels wel. Er moest voor het derde jaar apart subsidie aangevraagd worden.

Literatuur:

bij A:

1. Weering, B. v., *Wiskunde-onderwijs in de middenschool; 1a een theoretische verkenning; 1b een praktische verkenning*, S.L.O., Enschede 1980.

bij B:

2. Dekker, R., Verslag themagroep: "heterogene groep", Het rode krijtje Amsterdam, 1981; onderwijsburo CPN Amsterdam.

bij C:

3. Freudenthal, H., *Weeding and Sowing; The Heterogeneous Learning Group*, Hfst. II § 8, D. Reidel Publishing Company Dordrecht/Boston, 1978.
4. Freudenthal, H., *De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep met het oog op de middenschool*, Gesamtschule Conferentie, APS, 1973.
5. Freudenthal, H., *Differentiatie binnen het wiskunde-onderwijs*, Wiskrant 2, februari 1976.

En verder twee boekjes die misschien niet zo erg ingaan op het benutten van verschillen tussen leerlingen bij het leren van wiskunde, maar wel heel veel praktijkvoorbeelden en goede tips bevatten:

6. *Leerplanontwikkeling onderweg 1*, IOWO, oktober 1977.
7. Meester, F., G. Schoemaker, J. Vedder, *Rekening houden met individuele verschillen*, Ned. Ver. van Wiskundeleraren, 1980.