

# Kritisch kijken

## Impressie van het Hewet-experiment (III)

J. de Lange Jzn/OW&OC, R.U. Utrecht  
H. Verhage/R.U. Groningen

### Summary

*This is the third part of the continuing story of the so-called HEWET-project. One of the main objects of this new program is the re-introduction of the solid geometry for pre-university students. Another goal is to prepare students better, who are heading for a study in economics, sociology, psychology and similar studies.*

*In earlier articles attention was paid to solid geometry, matrices and graphs, and modelling. This article deals with the experiments concerning "graphical representation". And more specific: "How to look critical at statements based on statistical material".*

*Starting point are two statements. One from Secretary of Defense Harold Brown: "Defense has shrunk to about its pre-Vietnam levels" (feb. '79). The other from Edward R. Jayne: "I'm happy to report to you that under president Carter's leadership we have set a course of steady real growth" (march '79).*

*Both statements come from the same facts. The students discuss the matter rather in detail to find out who speaks the truth (more or less).*

*The second part of the article deals with the problems concerning the development of proper tests to measure the students achievements. It seems obvious that this kind of mathematics is harder to test. The coming year ('82-'83) will make things more clear as the final examination will take place for the first time.*

Kritische beoordeling van statistische gegevens.

Eén regeltje uit het Hewet-rapport.

In de toelichting staat dan nog:

"Aan beschrijvende statistiek, in het bijzonder aan een kritische beoordeling van statistische gegevens, wordt in het vigerende onderwijs weinig aandacht besteed. Dit aspect wil de werkgroep in het A-programma opgenomen zien".

Voorwaar, de richtlijnen zijn in dit geval nogal ruim op te vatten. Hoe leer je leerlingen statistische gegevens kritisch beoordelen?

### Grafische verwerking

Een eerste voorzichtige poging is gewaagd in het pakketje "Grafische Verwerking". En dan met name in het eerste hoofdstuk.

Dat begint met twee citaten:

*"De defensieuitgaven zijn gedaald tot het niveau van vóór de Vietnamoorlog".*

*Harold Brown  
Ministerie van Defensie  
21 februari 1979.*

*"Ik ben verheugd u te kunnen meedelen dat onder president Carter het werkelijke uitgavenpeil voor defensie steeds is gestegen".*

*Edward R. Jayne,  
8 maart 1979.*

Met als niet al te verrassende vraag: Wie spreekt de waarheid?

Zowel Brown als Jayne lijken fatsoenlijke heren, die hun uitspraken heus wel kunnen bewijzen aan de hand van statistische gegevens. Waarschijnlijk aan de hand van dezelfde gegevens. Hoe komen ze dan toch tot heel verschillende conclusies?

De meeste leerlingen vinden aan het eind van dit hoofdstukje dat *beiden* toch wel gelijk hebben, alhoewel bij sommigen de twijfels blijven. En verschillende leerlingen zien nu zelf ook kans de feiten naar hun hand te zetten.

### Brown

*Toen Harold Brown werd gevraagd om zijn uitspraak:*

*"de defensieuitgaven zijn gedaald tot het niveau van vóór de Vietnamoorlog"*

*met feiten te staven, kwam hij met de volgende gegevens aanzetten:*

- voor het jaar 1980 vertoont het bedrag dat voor defensie is uitgetrokken weliswaar een werkelijke toename van 3,1% vergeleken met 1979, maar het is daarmee slechts 4,6% van het Bruto Nationaal Produkt, en dat is het laagste sinds 1940.*
- het bedrag voor defensie is 23% van het totaal van alle (Federale) uitgaven, en dat is, afgezien van 1978, het laagste sinds 1940.*

Een eerste vraag die je kunt stellen is: hoe komt Brown aan die 3,1% werkelijke toename? In 1979 besteedden de Amerikanen zo'n 114,7 miljard dollar aan defensie en in 1980 126 miljard dollar. Bijna alle leerlingen komen tot de constatering dat de toename veel groter is, bijna zo'n 10%, of zoals één het wat preciezer zegt:

*"De toename van 3,1% is volgens onze interpretatie niet juist. Als men het werkelijke percentage berekent komt men op: 9,8517873%. Als men rekening houdt met de significantie komt men op een percentueel quotient van 9,852%"*.

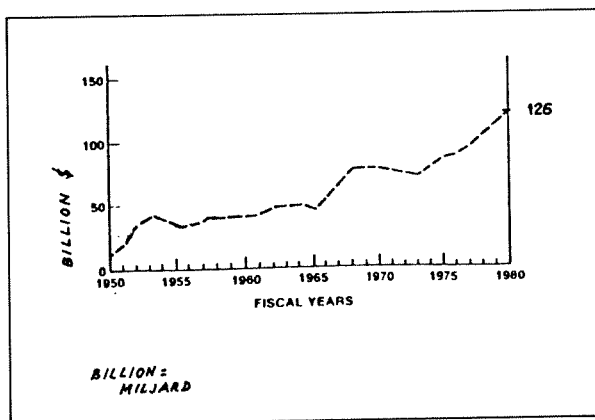
We beweren overigens niet dat deze jongeman een representatieve steekproef vertegenwoordigt van het gezelschap A-leerlingen.

Een enkeling komt wat verder dan de constatering dat die 3,1% niet klopt en mompelt wat over inflatie. Later blijkt dat het begrip 'inflatie' in het algemeen bij deze leerlingen zeer slecht leeft. Men kent het woord en er wordt soms nog wel een vage relatie gelegd met "alles wordt duurder", maar daar blijft het bij.

### Jayne

Na deze eerste confrontatie met Brown's uitspraak wordt aandacht besteed aan Jayne's uitspraak.

*Jayne baseert zich daarbij mede op de volgende grafiek:*

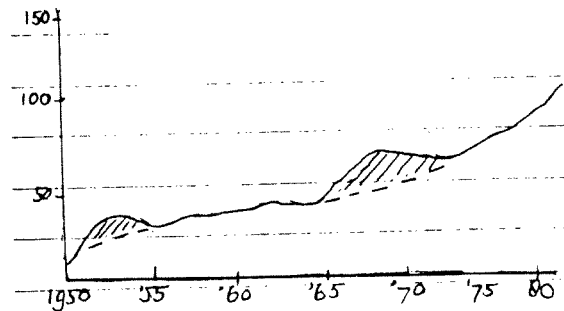


Deze grafiek wordt ook gebruikt om een eerste gevoel voor 'trend' bij te brengen.

*Kun je aan de hand van bovenstaande grafiek een schatting maken van het "extra" bedrag dat de Koreaanse oorlog en de Vietnamoorlog hebben gekost?*

Eén van de antwoorden:

*"Wij hebben de grafiek in een vloeiende lijn doorgetrokken en dan de verschillen afgelezen. De gearceerde gebieden zijn de extra uitgaven.  
Koreaanse oorlog = 10 miljard  
Vietnamoorlog = 25 miljard."*



Bij het antwoord op de vraag:

*Brown zei: "de defensieuitgaven zijn gedaald tot het niveau van vóór de Vietnamoorlog". Klopt dat met bovenstaande grafiek? Vind je dat Brown "liegt"?*

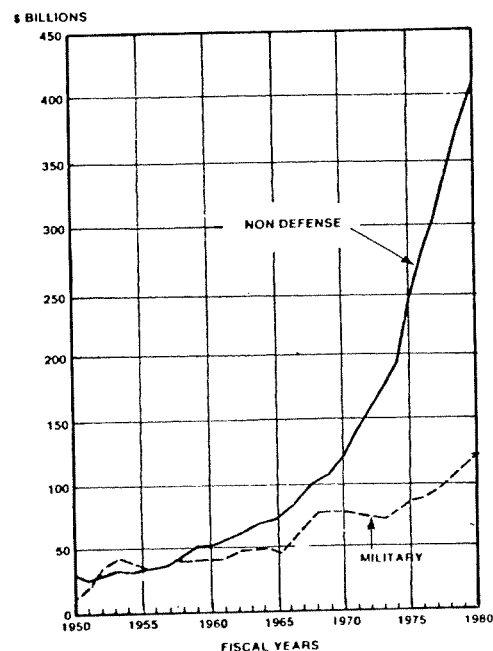
bleekt dat een gedeelte van de leerlingen vindt dat Brown wel degelijk liegt, maar anderen zijn voorzichtiger:

*"Nee, het klopt niet met de grafiek, maar hij liegt waarschijnlijk niet, want hij zal het relatief bekeken hebben. Je hebt nu meer geld nodig om hetzelfde te kopen".*

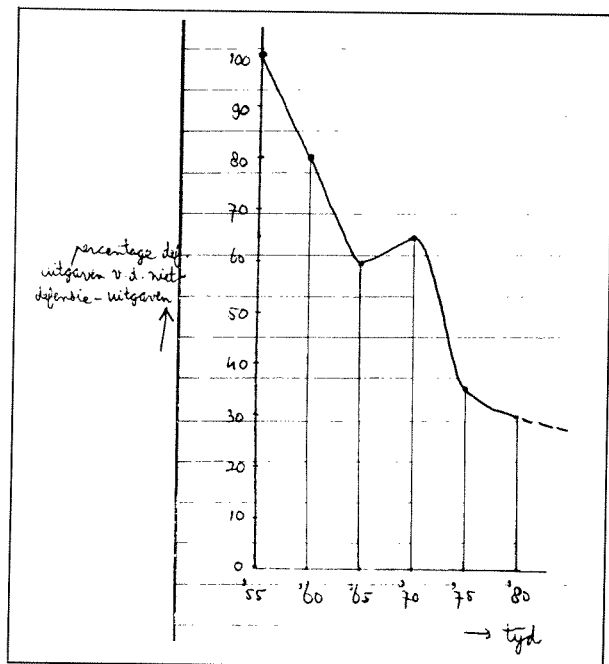
Enigszins verrassend toch wel dat de meeste leerlingen met dergelijke antwoorden bij het kijken naar de 3,1% toename niet op het idee van inflatie kwamen.

### Absoluut en relatief

In het boekje wordt vervolgens ingegaan op een vergelijking van "absoluut" tegen "relatief". Dit wordt gedaan aan de hand van de "grafiek van Jayne" met daarin ook de overige (= niet defensie) uitgaven.



Uitgaande van deze grafiek moeten de leerlingen nogal wat activiteiten ontplooiën die duidelijk onder de noemer van grafische verwerking passen: Eerst wordt gevraagd numerieke waarden uit de grafieken af te lezen in de jaren 1955, 1960, 1965, .... 1980. Vervolgens om de defensieuitgaven als percentage van niet-defensie-uitgaven te berekenen. Tenslotte om een grafiek te tekenen met horizontaal de tijdschaal en vertikaal het zojuist berekende percentage defensieuitgaven/niet-defensieuitgaven, met het volgende zeer sprekende resultaat (getekend door een leerlinge):



Het merendeel van de leerlingen concludeert nu dat Jayne in absolute zin gelijk heeft en Brown in relatieve zin. Een enigszins afwijkende mening wordt vertolkt door een groepje leerlingen (uit Zevenaar):

*Brown zei: De defensieuitgaven zijn gedaald tot het niveau van vóór de Vietnamoorlog. Als men het werkelijke (absolute) uitgavenpeil van de defensie bekijkt heeft hij ongelijk, want de defensieuitgaven in absolute zin nemen toe, dus heeft hij ongelijk. Als men in het percentage van niet defensieuitgaven bekijkt heeft hij ook ongelijk, want het percentage daalt verder dan het percentage van vóór de Vietnamese oorlog (vóór Vietnamoorlog  $\cong$  60% nu 30%) Jayne zei dat het werkelijke uitgavenpeil is gestegen in absolute zin. Hierin heeft hij gelijk, want in 1973 waren de absolute defensieuitgaven  $\pm$  70 miljard\$ terwijl zij in 1980 zijn gestegen tot  $\pm$  126 miljard \$.*

## Inflatie

Eén van de aardige facetten van het ontwerpen van experimentele leerlingenteksten is dat je soms geen idee hebt wat leerlingen weten of zouden moeten weten. Zolang het om zuiver wiskundige zaken gaat is het meestal niet zo'n probleem, omdat een groot aantal scholen toch op hetzelfde ogenblik hetzelfde onderwijst. Maar zodra contexten mee gaan spelen

wordt een flinke aanslag gedaan op je intuïtie. Wat weten leerlingen van inflatie? Welnu, één ding is duidelijk: weinig. Dat bleek al enigszins uit het eerste gedeelte van dit hoofdstuk, maar het werd pas echt duidelijk bij de volgende vraag:

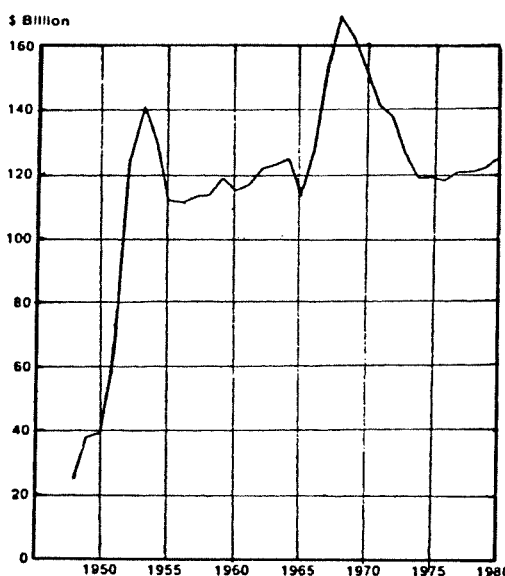
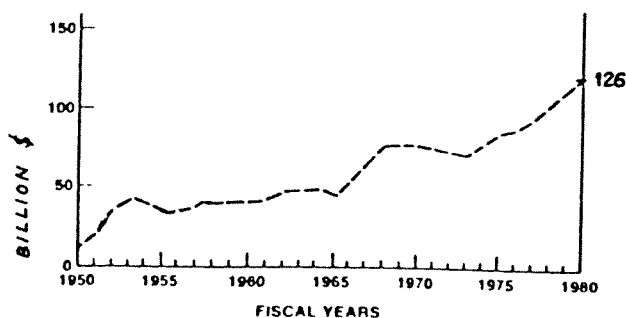


fig. 4

*Vergelijk deze grafieken eens. In welke jaren was de inflatie groter, zo rond het jaar 1960, of rond het jaar 1975?*

Vrijwel niemand kon daar iets zinnigs over zeggen. Na enige hints kwamen enkele leerlingen uit Haarlem toch nog tot aardige opmerkingen, waarvan de beste was:

*“Zo rond het jaar 1975 was er meer inflatie dan rond 1960, want rond 1975 namen de absolute getallen heel snel toe, maar in werkelijkheid bijna niet”. Maar zoals gezegd, daar waren wel enkele hints aan voorafgegaan. Het is dan ook niet overdreven te stellen dat de vragen die over inflatie gingen zeer teleurstellende resultaten opleverden.*

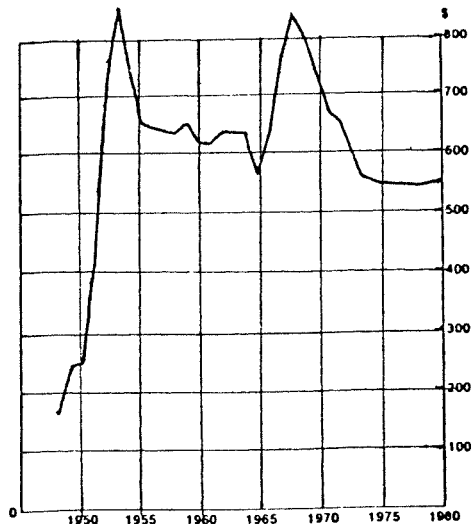
Iets beter verging het de leerlingen toen ze gevraagd werden de trendlijn te tekenen in de tweede ‘gecorrigeerde’ grafiek, waarbij de pieken van de Korea- en Vietnamoorlogen buiten beschouwing werden gelaten. Het extrapoleren naar 1990 leverde daarna weinig problemen op, althans in 1980 Dollars. Ge-

vraagd naar het bedrag dat in 1990 op de begroting zal staan bleek eens te meer dat zo'n 10% inflatie per jaar de leerlingen weinig zegt. De methode om het bedrag te berekenen was niet altijd even galant. Een enkeling komt wel tot herhaalde vermenigvuldiging met 1,1 maar de meesten gebruiken herhaald de procententoets. Dat één en ander met exponentiële groei te maken zou kunnen hebben, komt bij niemand op.

Afgaande op de laatste 'gecorrigeerde' grafiek, lijkt de trend een langzame stijging van de defensieuitgaven te zijn. Dus zou Jayne het gelijk aan zijn zijde krijgen. Maar er is nog een ontsnappingsmogelijkheid voor Brown. Als we iets verder de leerlingentekst even volgen:

*De vindrijkheid van politici is groot. Kijk maar eens kritisch naar de volgende redenering:*

*In de laatste 35 jaar is de bevolking van de Verenigde Staten flink toegenomen. En, zeggen vele deskundigen, moet je dus de defensie-inspanningen vergroten. En, is de redenering, je moet dus niet naar de totale - voor inflatie gecorrigeerde - kosten kijken, maar naar de kosten per hoofd van de bevolking. Die grafiek ziet er zó uit:*



- Teken ook hier de "trendlijn" van de laatste 25 jaar zo goed mogelijk.

- Wat vind je van het argument dat je per hoofd van de bevolking moet kijken?

Het zal duidelijk zijn dat op de laatste vraag nogal wat verschillende antwoorden kwamen.

De vraag die leraren onmiddellijk stelden die deze tekst onder ogen kregen was: haal je zo de politiek niet in de klas, en zo ja, kan dat?

Naar onze mening hoort dit thuis onder de noemer: kritisch beoordelen van statistische gegevens. Vaak worden zaken bekeken per hoofd van de bevolking, terwijl het de vraag is of er wel een verband bestaat tussen het één (in dit geval defensie-inspanningen) en de bevolkingsgrootte.

Ook aan het klakkeloos gebruiken van percentages zitten nog haken en ogen, hetgeen moge blijken uit het laatste gedeelte van dit eerste hoofdstukje grafische verwerking:

*Stel dat een begroting van een land wordt verhoogd om de werkloosheid te bestrijden. Dat kost immers veel geld.*

*Het totale bedrag van de begroting gaat daardoor van 100 miljard naar 110 miljard. De defensie-inspanning in dat land was 5 miljard. "Dus" zeggen defensiespecialisten "moet dan nu 5,5 miljard worden". Want dan blijft het bedrag voor defensie relatief hetzelfde, terwijl het absoluut toeneemt. Kortom, het lijkt dus niet erg logisch om voor defensie een 'vast' percentage vast te leggen.*

- *In een land staat in het jaar 1980 op de begroting voor defensie 30 miljoen. De totale begroting omvat 500 miljoen. Een jaar later staat er voor defensie 35 miljoen op de begroting, op een totaal van 605 miljoen. De inflatie in de periode tussen de twee begrotingen is 10%.*
- *Je houdt een lezing voor een pacifistisch gezelschap en wilt uitleggen dat de defensie-uitgaven toch maar mooi gedaald zijn het laatste jaar. Hoe?*
- *Je houdt een toespraak op de K.M.A. en vertelt ze vol trots dat de defensie-inspanningen aanmerkelijk zijn toegenomen. Hoe?*

Na zo'n hoofdstukje vraag je je natuurlijk af of er iets bereikt is. Kijken leerlingen in het vervolg nu kritisch naar uitspraken die gebaseerd zijn op statistisch materiaal? Of naar politici?

We zouden er geen antwoord op durven geven, alhoewel er een redelijk aantal leerlingen in staat was de laatste vraag te beantwoorden en dus had leren manipuleren. Maar, volgens één van de deelnemende leraren, Kees Lagerwaard, waren er meer zaken die het doorwerken van dit pakketje tot een zeer nuttig tijdverdrijf maakten:

- Het zelf kiezen van de schalen bij een grafiek hadden leerlingen niet of nauwelijks eerder gedaan.
- Het berekenen van percentages, zelfs met zakrekenmachines, levert nog steeds problemen op.
- De algemene ontwikkeling van de leerlingen wordt op een wat hoger peil gebracht. B.v. door de discussie over inflatie.

Al met al een bijzonder hoofdstuk dat wel enige verandering zal ondergaan, met name zal de rol van de inflatie wat nadrukkelijker aan bod moeten komen.

## Bevolkingspyramides

Zoals gezegd, dit Brown/Jayne verhaal was slechts het eerste hoofdstukje van een experimenteel pakketje "Grafische Verwerking". Er zijn nog drie hoofdstukjes die minder afwijkend zijn van het gangbare materiaal.

In het tweede hoofdstuk komen het *staafdiagram*, *cirkeldiagram*, *frequentietabel* en *relatieve frequentie* aan bod, met als context de uitstervende walvissen.

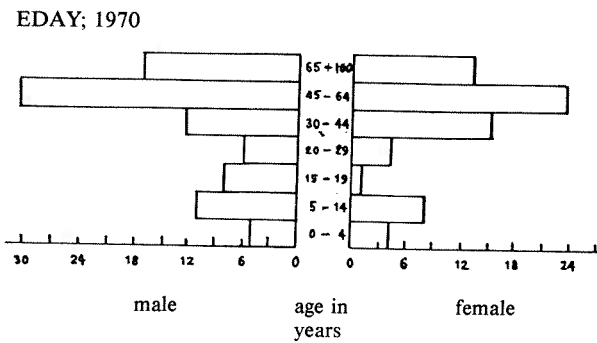
Het derde en vierde hoofdstuk spelen zich geheel af op de Orkneys, een eilandengroep ten noorden van Schotland. Aan de hand van authentiek onderzoeksmateriaal (een mazelenepidemie - datatabellen inwoners) wordt aandacht besteed aan *histogrammen*,

*polygonen, klassebreedten, bevolkingspyramide, frequentiedichtheden en somfrequenties.*

Daarbij komt nog een keer een voorbeeld van onjuist gebruik van statistisch materiaal ter sprake, zoals dat voorkomt in een onderzoeksproject op de Orkneys.

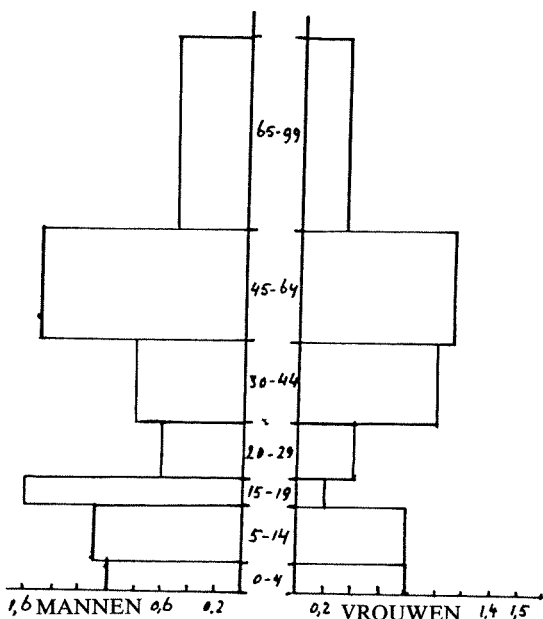
### Eday

Eday is één van de eilanden van de Orkneys. Net als alle andere eilanden kampt dit eiland met een sterk vergrijzende bevolking. Om dit met bewijsmateriaal te staven werd de volgende pyramide gemaakt.



Duidelijk is de vergrijzing te zien. Niets is echter minder waar. Door de grote verschillen in klassebreedten krijgen we een geheel vertekend beeld. Een betere methode is om hier met frequentiedichtheden te werken. Uit de pyramide blijkt dat er 4 vrouwen zijn in de 0-4 klasse, dus dichtheid:  $\frac{1}{4}$ . Als we klasseverdeling langs de verticale assen dan ook "eerlijk" maken, krijgen we de volgende pyramide:

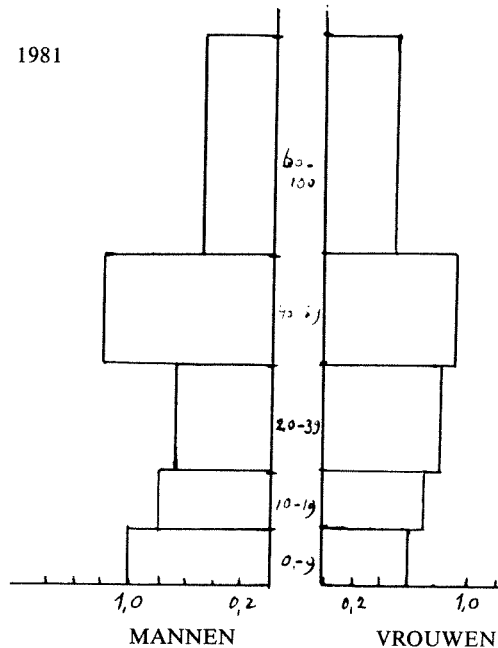
EDAY; 1970  
*frequentiedichtheid*



Langs de horizontale as komen dan de dichtheden te staan.

Bij vergelijking van de twee pyramides valt onmiddellijk het grote verschil op. Van enorme vergrijzing en dreigende ontvolking van Eday blijkt ineens nauwelijks meer sprake te zijn. Alhoewel het wel wenselijk lijkt voor de jongemannen van Eday om eens op één van de buureilanden op zoek te gaan naar huwbare jongedames. Want daar zit flink de klad in.

Als leerlingenopdracht volgt de vraag om ook zo'n dichthedenpyramide te maken, uitgaande van recente 1981 gegevens; maar wel met een andere klasse-indeling, met het volgende resultaat:



Vergelijken we deze met die van 1970, dan lijkt de conclusie gerechtvaardigd dat de jongelieden van Eday inderdaad niet bij de pakken zijn gaan neerzitten; de opbouw oogt nu aanzienlijk gelijkmatiger.



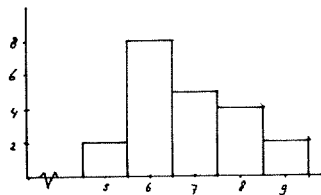
"Standing Stones" op de Orkneys.

De vraag die op veler lippen ligt is: Is dit "soort" wiskunde nog wel te toetsen? Zeker bij dit boekje lijkt dat geen eenvoudige taak. Vandaar dat we in het tweede gedeelte van dit artikel uitgebreid zullen ingaan op een proefwerk over dit boekje en wel zoals dat in Zevenaar is gehouden.

## De grafische verwerking van een proefwerk

De resultaten van het proefwerk "Grafische Verwerking" van 12 februari 1982 in Zevenaar waren als volgt:

$4\frac{1}{2} - < 5\frac{1}{2}$	2
$5\frac{1}{2} - < 6\frac{1}{2}$	8
$6\frac{1}{2} - < 7\frac{1}{2}$	5
$7\frac{1}{2} - < 8\frac{1}{2}$	4
$8\frac{1}{2} - < 9\frac{1}{2}$	2



Gemiddelde: 6,68  
Modus: 6  
Mediaan: 6,5

Standaarddeviatie: 1,17  
Variatiebreedte: 4,75

Dat zat dus wel goed met dat proefwerk. Gemiddelde, modus en mediaan lagen niet al te ver uiteen, twee onvoldoendes, de verdeling is wat scheef naar rechts, dus de goeden hebben zich kunnen onderscheiden van de middelmatigen.

In het voorafgaande is al genoemd dat in het boekje o.a. aan de orde komt welke misleidende werking van op zichzelf niet onjuiste grafieken uit kan gaan. Proberen we de argeloze lezer nu ook te misleiden met deze "harde" proefwerkcijfers? Misschien is er wel gecijferd met in het achterhoofd het idee dat de resultaten in de Nieuwe Wiskrant gepubliceerd zouden worden. Gezien de welhaast magische werking die van getallen uitgaat, lijkt een rijtje getallen dat er een beetje "gemiddeld" uitziet, vanuit dat oogpunt wel wenselijk.

Misschien ook is de beoordeling erg subjectief geweest, of is dat uitgesloten bij wiskunde? Hoe dan ook, reden genoeg om niet tevreden te zijn met de schone schijn van dit histogram en eens wat dieper op het proefwerk in te gaan.

## Opstellen van het proefwerk

Het opstellen van een proefwerk over een leerstofpakketje uit het HEWET-project kost wellicht wat meer tijd dan gebruikelijk is voor een gemiddeld proefwerk van de gemiddelde leraar (of moeten we zeggen: een doorsnee proefwerk van de modale leraar?) Juist in zo'n experimenteel stadium als dat waarin het project verkeert, is het maken van een proefwerk een regelrechte confrontatie met de vraag: Wat hebben we de leerlingen willen leren en wat hebben ze geleerd?

Een stukje ontwikkelingswerk in het klein dus, de moeite waard om even bij stil te staan.

Zoals inmiddels bekend verondersteld mag worden, is de meest in het oog springende nieuwigheid van het wiskunde A-programma de centrale plaats die het toepassen van wiskunde bij niet-wiskundige problemen inneemt. Hiermee hebben we al één element te pakken dat getoetst zou kunnen worden: Kunnen de leerlingen hun kennis opgedaan in het pakketje "Grafische Verwerking" toepassen op niet-wiskundige problemen? Maar we zijn er nog niet, want welke kennis hebben de leerlingen opgedaan? Grofweg was er in het pakketje aandacht voor tekenen en rekenen en voor interpreteren en waarderen.

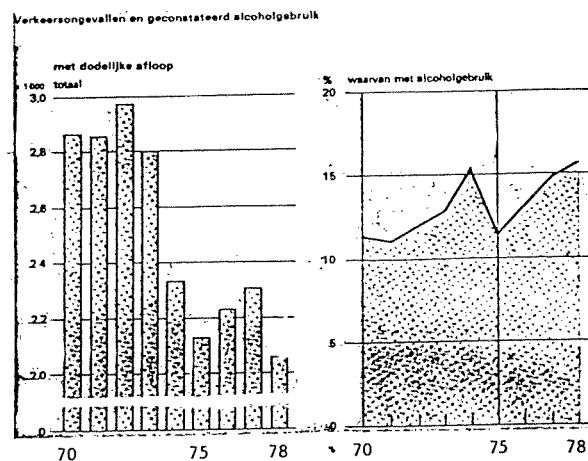
Besloten werd om in het proefwerk het accent op de laatste aspecten te leggen, want dat is toch de richting die het A-programma uit moet. Maar met het vaststellen van deze uitgangspunten was het proefwerk er natuurlijk nog niet.

Het statistische zakboek kan een bron van ideeën voor de proefwerkvragen zijn. Het kiezen van de liefst zo reëel mogelijke context en het bedenken van de vragen daarbij, gingen hand in hand. De werkwijze was dus niet: eerst de vragen opstellen en vervolgens daar een (feitelijk overbodige?) context bij verzinnen.

## Opgave een

Langzamerhand wordt het de hoogste tijd om na deze toch wat zweverige bespiegelingen aandacht te besteden aan het proefwerk zelf en de reacties van de leerlingen daarop.

De eerste opgave:



1. Het staafdiagram links geeft voor de jaren '70-'78 de aantallen verkeersongevallen met dodelijke afloop weer.

a. Je ziet dat de staven onderbroken zijn. Waarom is dat gedaan, denk je? Wat is het bezwaar van deze manier van weergave?

Het polygoon geeft het aantal dodelijke verkeersongevallen waarbij alcoholgebruik in het spel was, als percentage van het totaal aantal dodelijke ongevallen.

- b. Op 1 november 1974 werd het zogenaamde "alcoholwetje" van kracht. De bedoeling van deze wet was om paal en perk te stellen aan het rijden onder invloed van sterke drank.

Bewering:

"Uit het polygoon blijkt dat het effect van het alcoholwetje van zeer korte duur was, want in 1978 was het aantal ongevallen t.g.v. alcoholgebruik hoger dan ooit te voren".

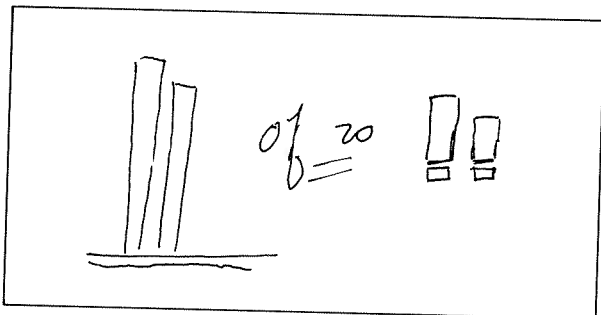
Wat is je commentaar?

Voor deze vraag konden maximaal 10 punten behaald worden (van de 40 die er in totaal te verdienen waren), het gemiddelde was 4,7 punten. Enkele leerlingen hadden vraag 1a niet goed begrepen. Ze dachten bijv. dat het om de ruimte tussen de staven ging.

Voor het overige leverde het eerste deel van vraag 1a geen problemen op. Er kwamen antwoorden als: "Het stukje van 0-2,0 is net zo groot als 2,2-2,4. De staven zullen dus wel onderbroken zijn om aan te geven dat 0-2,0 in werkelijkheid een grotere groep is".

Bij de vraag naar het bezwaar van deze manier van weergave, voldeed het volgende antwoord aan onze verwachtingen:

"Bezwaar lijkt me dat nu de verschillen veel groter lijken dan ze zijn".



Maar hoe de volgende antwoorden te honoreren?

- "Het is erg onduidelijk, want het is net of er een groepje doden weggehaald is".
- "In 1978 mogelijk meer wagens op de weg, dus meer kans op ongelukken. Krijg je laag cijfer nominaal, dan is dat veel beter dan '70 met minder wagens. Je weet niet hoeveel wagens er ieder jaar op de weg waren. Cijfers vertekend".

Sommige leerlingen waren het met de bewering van vraag 1b eens, getuige het volgende antwoord:

"Waarschijnlijk was men in het begin bang en ging inderdaad niet meer zoveel onder invloed rijden. Na verloop van tijd raak je er echter aan gewend en vormt het wetje geen bedreiging meer (ben het dus wel met de bewering eens)".

De eventuele juistheid van de bewering werd dus niet op basis van de gegevens nader onderzocht, maar op grond van ervaringen uit het dagelijks leven aannemelijk gemaakt. Een dergelijk antwoord werd door zeven leerlingen gegeven. Een aantal leerlingen doorzag

echter wel dat de percentages van het polygoon nog niets zeggen over de aantallen dodelijke ongevallen ten gevolge van alcoholgebruik (vijf leerlingen), maar lang niet iedereen kwam op het idee om de percentages uit het polygoon te betrekken op de aantallen uit het staafdiagram (acht leerlingen), of zelfs het betoog met een berekening te ondersteunen. (Dit laatste deed slechts één leerling).

De grafieken laten zich voldoende nauwkeurig afschatten om voor bijvoorbeeld een drietal jaren het werkelijke aantal slachtoffers uit te rekenen.(1)

## Te open?

De resultaten op deze vraag vielen ons wat tegen. Het probleem zat hem waarschijnlijk in de open formulering van de vraag, daar hadden de leerlingen tenminste bij de bespreking van het proefwerk achteraf nogal wat kritiek op. Als we rechtstreeks naar een berekening gevraagd hadden, zou iedereen het gekund hebben, meende men. Waarom dan zoiets vaags als "Geef je commentaar"?

De fervente aanhangers van objectieve studietoetsen (wat dat ook moge zijn) zullen ongetwijfeld gruwen van zo'n vraagstelling. Toch hadden we de vraag bewust vaag gehouden, want de keerzijde van het rechtstreeks vragen naar de berekening is, dat de kritische beoordeling van de grafieken de leerlingen in feite al uit handen genomen is. Het ging ons dus niet zozeer om de vraag of de leerlingen in staat zijn zo'n berekening uit te voeren(2), maar om de vraag of ze, indien dat zinvol zou kunnen zijn, op het idee zouden komen om die berekening uit te voeren.

Zou u op dat idee gekomen zijn?

Geboeid door deze vraag, besloten we opgave 1b aan wat wiskundeleraren voor te leggen.

Bij de uitvoering van dit idee schoot het toeval ons te hulp, want enkele dagen later was er een bijeenkomst van Jonge Wiskundeleraren in Groningen. De 16 aanwezigen daar verleenden bereidwillig medewerking aan ons experiment.

De resultaten waren als volgt:

- Vijf personen betrokken geen van beide grafieken in hun antwoord en deden geen uitspraak over de (on)juistheid van de bewering. (Bijv.: "Zonder 'wetje' zou het alcoholgebruik misschien nog hoger zijn").
- Drie personen constateerden dat het polygoon iets over percentages zegt en niets over aantallen. Hierbij betrokken ze het staafdiagram niet in hun antwoord.
- Drie personen betrokken bovendien het staafdiagram in hun antwoord.
- Vijf personen gaven bovendien een berekening of noemde die mogelijkheid expliciet om aan te tonen dat het aantal verkeersdoden t.g.v. alcoholgebruik in 1978 niet hoger was dan ooit, zoals gesuggereerd werd.

De vier typen antwoorden die bij de leerlingen voorkwamen, werden dus ook bij de leraren aangetroffen. Voor beide groepen gold dat ongeveer  $\frac{1}{3}$  deel bij het beantwoorden van de vraag geen gebruik maakte van de grafieken; bij de leraren ging ongeveer  $\frac{1}{3}$  deel over tot het uitvoeren van een berekening, bij de leerlingen deed één persoon dit.

Moet de conclusie zijn dat je met deze vraag kennelijk alle kanten uit kunt, of kan de ene leraar met zo'n type vraag beter uit de voeten dan de andere? Hoe dan ook blijft het probleem natuurlijk of je zo'n open vraag op een proefwerk mag stellen.

### Opgave twee

2. Bij een enquête naar het busgebruik in de provincie Drenthe werden o.a. de volgende vragen gesteld.

Wat is uw leeftijd?

< 20	20-29	30-39	40-49	50-59	60-64	65+
------	-------	-------	-------	-------	-------	-----

Geslacht:  man  vrouw

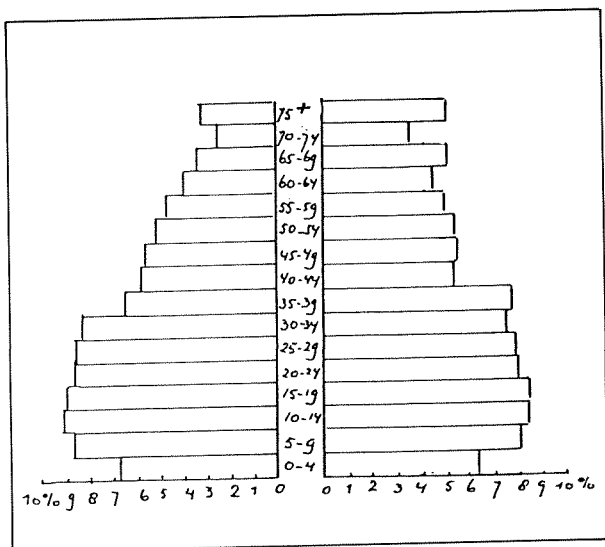
Bij de geïnterviewden waren geen mensen van boven de 90. Je mag aannemen dat de steekproef representatief was voor de groep busgebruikers in Drenthe. Na verwerking van de antwoorden was de volgende frequentietabel het resultaat:

leeftijd	mannen	vrouwen
< 20	42	45
20-29	13	21
30-39	4	12
40-49	3	9
50-59	5	13
60-64	5	14
65+	28	36

a. Teken zowel voor de mannen als voor de vrouwen een histogram. Pas hierbij een correctie toe om de invloed van de verschillen in klassebreedte teniet te doen.

De onderzoeker is geïnteresseerd in de vraag in hoeverre de busgebruikers een afspiegeling vormen van de Drenthse bevolking.

De bevolkingspyramide van Drenthe ziet er als volgt uit:



- b. In welk opzicht geeft de bevolkingspyramide een vertekend beeld?  
 c. Vergelijk je histogrammen met de bevolkingspyramide. Welke groepen maken relatief veel gebruik van de streekbus in Drenthe?  
 d. Twee onderzoekers trekken uit deze cijfers verschillende conclusies.

A: Van de vrouwelijke busreizigers is 30% 20 jaar of jonger, voor de mannelijke busreizigers is dit percentage 42%.

In de leeftijdscategorie 0-20 reizen dus meer jongens dan meisjes met de bus.

B: In de leeftijdscategorie 0-20 is 48,3% van de reizigers van het mannelijk geslacht, dus 51,7% van het vrouwelijk geslacht. Er reizen dus vrijwel net zo veel jongens als meisjes met de bus. Met wie ben je het eens en waarom?

Voor deze opgave waren maximaal 20 punten te behalen, het gemiddelde was 12,4 punten.

De bedoeling van de gevraagde correctie bij opgave 2a was, dat de breedtes van de staven van het histogram zodanig gekozen werden dat ze corresponderden met de klassebreedtes en dat de oppervlakken van de staven evenredig waren met de frequenties. Een groot aantal leerlingen paste wel de breedte van de klassen aan, maar niet de hoogte. Alhoewel in de laatste les over dit pakketje aandacht besteed was aan oppervlakte in plaats van lengte als maat voor frequenties, was het begrip hieromtrent kennelijk toch niet zodanig gevormd dat de leerlingen met deze vraag overweg konden.

Vraag 2b gaf weinig problemen, er kwamen antwoorden als:

“Alle klassen zijn opgebouwd uit 5 jaren behalve de bovenste (75+). De pyramide zou spits naar boven af moeten lopen. Dit zou wel het geval zijn als de klasse 75+ in klassen van 5 gesplitst zou zijn”.

We hadden zelf van te voren het idee dat als een leerling bij vraag 2a de correctie niet juist uitgevoerd zou hebben, de beantwoording van vraag 2b hem of haar alsnog op het juiste spoor zou zetten. Dit bleek achteraf ijdele hoop geweest te zijn.

Vraag 2c leverde antwoorden op als:

– “De groepen van 0-20 en van 65+ (ook wel waarschijnlijk, want dit zijn de groepen zonder auto als eigen vervoer)”

en:

– “De groep jonger dan 20 en de 60-64 jarigen (vooral de vrouwen) die mogelijk boodschappen doen in de stad.”

Er werd niet om een verklaring gevraagd, maar misschien had het realistische karakter van de vraag deze leerlingen hiertoe aangemoedigd?

Welke van de twee redeneringen deugdelijk was, die van onderzoeker A of die van B, was voor niet alle leerlingen gesneden koek.

Drie heel verschillende antwoorden op vraag 2d waren bijvoorbeeld:

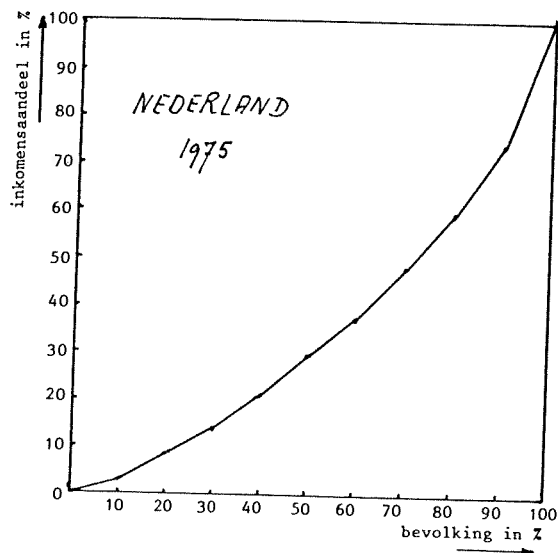


- "Met onderzoeker nr. A, want er reizen nog meer mensen met de bus dan alleen mensen van 20 jaar of jonger, dus het aantal reizigers van 20 of jonger kan nooit 100% zijn en de getallen kloppen ook (30% en 42%)."
- "Met allebei wel, omdat A de % over het totaal verdeelt en daarbij 72% 20 jaar of jonger is, B neemt één klasse als geheel (die als 100%) en kijkt dan naar het procentuele aantal."
- "Ik ben het eens met onderzoeker B. Als in een leeftijdsgroep 48,3% uit jongens bestaat, is het logisch dat 51,7% uit meisjes bestaat (meer keuzes zijn er niet!). Bij A worden alleen de percentages gegeven, maar hieruit kun je de absolute aantallen niet afleiden, want je weet niet van welk getal je de percentages moet berekenen. De aantallen mannen en vrouwen kunnen best verschillend zijn."

De vraag doet zich ongetwijfeld voor of de leerlingen genoeg tijd hadden, gezien de hoeveelheden leeswerk die de opgaven met zich meebrachten. We waren er zelf ook niet helemaal gerust op, maar dit bleek uiteindelijk mee te vallen.

### Opgave drie

3. De onderstaande grafiek geeft de inkomensverdeling voor 1975 weer. De mensen die deel uitmaken van de beroepsbevolking zijn naar grootte van hun inkomen gerangschikt. Vervolgens is de beroepsbevolking ingedeeld in tien even grote groepen van 568.000 personen. Dit zijn de zogenaamde 10% groepen.
- Het totaal verdiende inkomen in Nederland in dat jaar bedroeg 116996 miljoen. Dat bedrag is in de grafiek op 100% gesteld.



- Welk gedeelte van het totaal verdiende inkomen gaat naar de mensen uit de hoogste 10% groep?
- Teken de grafiek in het geval dat iedereen evenveel zou verdienen.

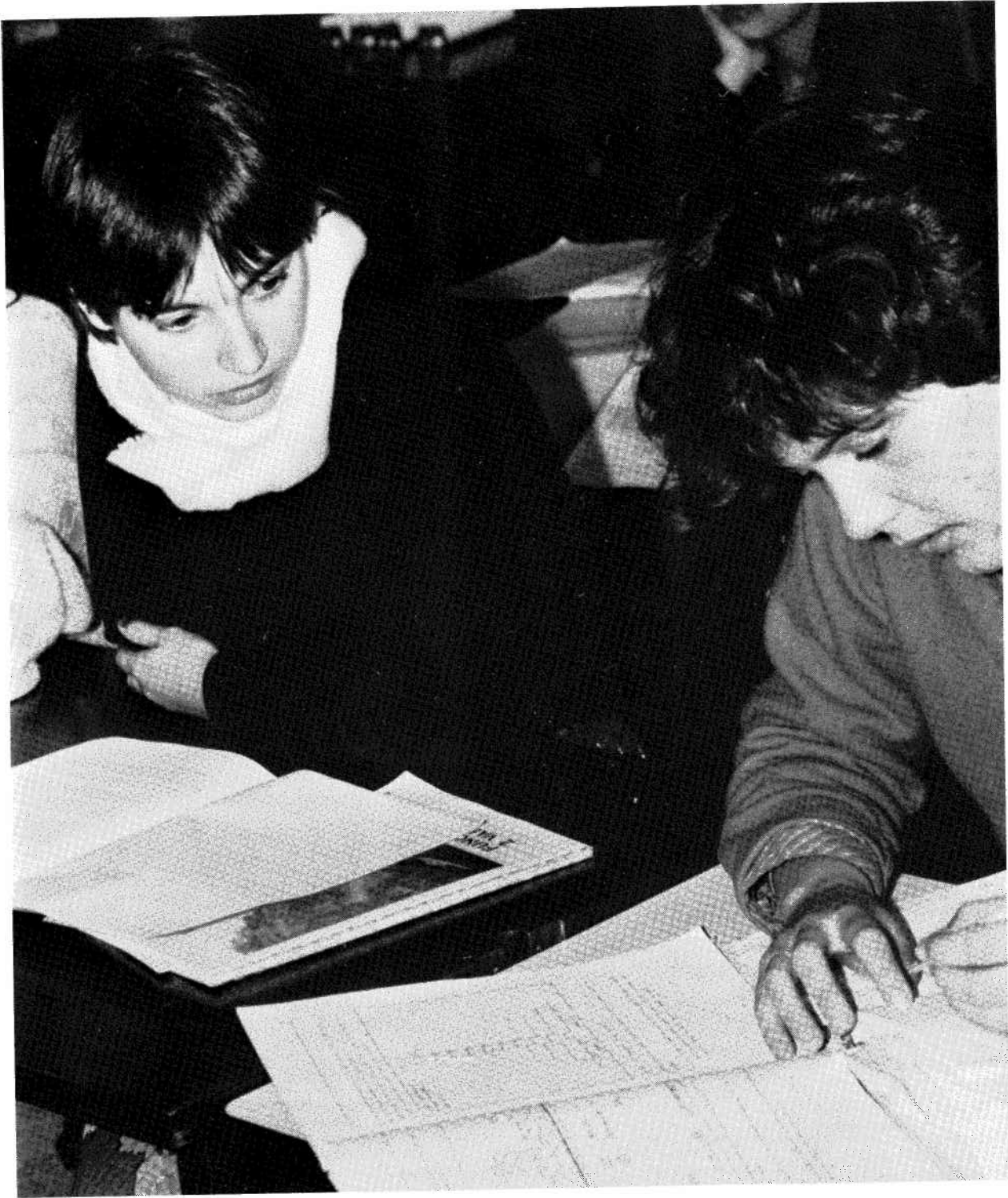
Opgave 3 was gekozen omdat we nog een vraag wilden stellen waar iets "cumulatiefs" aan te pas kwam. De grafiek van de inkomensverdeling (afgeleid uit een tabel uit het Statistisch Zakboek 1979) voldeed daar wel aan, maar doordat langs beide dimensies cumulatieve percentages weergegeven worden, was deze grafiek toch van een heel ander karakter dan de grafieken die de leerlingen gezien hadden.

In feite is deze grafiek een voorbeeld van een Lorentz-kromme of concentratie-kromme(3), de kromme die de concentratie van een bepaalde variabele (in dit geval het aantal werkzame personen) bij een verzameling eenheden (in dit geval het verdiende inkomen) uitbeeldt. Hoe dichter de kromme de verbindingsrechte door de oorsprong en door het punt (100%, 100%) benadert, des te gelijkmatiger is de verdeling (des te geringer de concentratie). Omdat we deze grafiek voor het proefwerk wat betreft moeilijkheid "op het randje" vonden, hadden we de vragen er over zodanig gekozen dat het begrijpen van wat de grafiek eigenlijk voorstelt voldoende was om de vragen meteen te kunnen beantwoorden. Dit leidde ertoe dat uiteindelijk vrijwel iedereen deze vraag goed had; er waren maximaal 6 punten te behalen en het gemiddelde was 5,5.

Zodra het duidelijk werd dat de leerlingen voldoende tijd zouden hebben voor het proefwerk, durfden we ze nog te vragen om hun commentaar op dit proefwerk op te schrijven. De meesten gaven gehoor aan dit verzoek.

Een selecte greep:

- "Ik vind het wel een leuk vak omdat het niet zo ingewikkeld is en ik het wel leuk vind om al die uitspraken van die ministers enzo te verklaren. Om te zeggen zoals zij het gezien hebben. Ik vind wel dat de vraag vaak te ingewikkeld gesteld wordt in het boekje zodat je niet goed weet wat je moet beantwoorden."
- "Best moeilijk. Ik vond het te veel theorievragen, maar er is ook niet veel anders over deze grafische verwerking te vragen. Toch vind ik opgaven (dus praktischer) fijner om te maken. Commentaar geven op die uitspraken vind ik onzinnig, want het is vaak heel moeilijk te argumenteren en vaak ook op verschillende manieren uit te leggen. Maar het hele onderwerp grafische verwerking spreekt mij niet aan!!"
- "Ik vond het proefwerk goed te maken, de vraagstelling was erg duidelijk, je wist meteen wat je moest doen. Bij deze proefwerken en bij wiskunde A in het algemeen leer je niet alleen hoe je bepaalde problemen moet aanpakken, maar ook waarom je het doet."
- "Een proefwerk op zich is natuurlijk nooit leuk. Ik vind dat als je het dan gaat vergelijken met andere proefwerken, vooral met die van wiskunde I heb je hier opgaven die in werkelijkheid voor komen. Ik vind dit realistischer dan alleen maar met dooie cijfers werken."



Inmiddels bent u er waarschijnlijk van overtuigd dat bij de hardheid van de proefwerkresultaten zoals die aan het begin van dit verhaal gegeven zijn, wel wat vraagtekens te plaatsen zijn, gezien het kwalitatieve karakter van de vragen.

De beoordelingsproblematiek zal in het HEWET-project, met name voor wat betreft Wiskunde A, dan ook de nodige aandacht moeten krijgen. Het komende jaar met schoolonderzoeken en de eerste examens kan waarschijnlijk wat meer duidelijkheid verschaffen.

- (1) De werkelijke cijfers van het aantal verkeersdoden t.g.v. alcoholgebruik zijn overigens: 1972: 358; 1975: 241; 1978: 314 (Statistisch Zakboek 1979).
- (2) Het rekenen met procenten bleek overigens nog moeilijk genoeg te zijn, getuige de volgende redenering tijdens een heel andere les: "32 procent is ongeveer één derde, dus nul komma drieëndertig".
- (3) Zie bijv. Prof.Dr. F. Hartog, Prof.Dr. A. Devreter e.a. *Encyclopedie van de economie* – Elsevier Amsterdam-Brussel, 1979