De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen

De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen

Ronald Keijzer
Nisa Figueiredo
Frans van Galen
Koeno Gravemeijer
Els van Herpen

TAL Bovenbouw
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

eindredactie: Ronald Keijzer
redactie, vormgeving en lay-out: Meryem Tatar
illustratie omslag: Bas Lubbers
druk: Wilco, Amersfoort

ISBN 90-74684-28-9

Inhoudsopgave

Woord vooraf

Het TAL[1]-project heeft leerlijnen en tussendoelen opgeleverd voor getallen en meten en meetkunde voor de onderbouw van het primair onderwijs en gehele getallen voor de midden- en bovenbouw. Aansluitend hierop is het leerstofgebied van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen ter hand genomen. Deze onderwerpen worden tot de moeilijkste leerstofonderdelen voor de basisschool gerekend. Er is veel onderwijstijd gemoeid met deze leerstofonderdelen en niet zelden is het rendement van deze investering teleurstellend. Dit geeft een reden om ons te beraden op de inhouden zelf en op het onderwijs in deze bovenbouwonderwerpen. De TAL-bovenbouwgroep van het Freudenthal Instituut, die in dit project samenwerkt met een parallelproject bij de SLO, heeft haar taak voor dit leerstofgebied dan ook breed opgevat. We kunnen onzes inziens niet volstaan met het in kaart brengen van de op dit moment geldende leerstoflijnen. Er zullen ook keuzen moeten worden gemaakt. Dergelijke keuzen moeten naar ons idee in overleg met alle betrokkenen worden gemaakt. De achterliggende vraag is dan: Waar gaat het om bij breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen ?

Als een eerste antwoord op die vraag hebben we lessen ontwikkeld waarmee we kernelementen van de didactiek zichtbaar proberen te maken. Een aantal van deze lessuggesties zijn, samen met beschrijvingen van het lesverloop in pilotscholen, commentaren en discussies, op de lerarenpagina van het rekenweb geplaatst (www.rekenweb.nl/leraren). We hoopten dat leraren basisonderwijs met deze lessen zouden gaan experimenteren, en op basis van ervaringen aan een webdiscussie zouden gaan deelnemen. Het blijkt dat we in dit opzicht te optimistisch zijn geweest. De werk- en tijdsdruk waar leraren onder staan maakt dat de drempel om extra lessen te gaan uitproberen hoog ligt. Bovendien gaan leraren niet snel een discussie op het internet aan.
We hebben echter ook geleerd dat leraren geïnteresseerd zijn in een discussie en graag over deze onderwerpen willen meedenken. Bijeenkomsten waarin ze met externe deskundigen in gesprek gaan lijkt beter geschikt voor het doel.

Met dit boekje willen we dergelijke discussies entameren. Uiteraard hopen we dat leraren dit boekje zullen lezen en van commentaar zullen voorzien. Maar we hopen vooral dat schoolbegeleiders, opleiders, rekencoördinatoren en anderen het zullen gebruiken om gesprekken met basisschoolleraren op gang te brengen. Wanneer zij daar aanvullende materialen voor nodig hebben horen wij dat graag. Daarnaast willen we natuurlijk ook dat zij zelf hun commentaar geven.

Noot

[1] TAL staat voor Tussendoelen Annex Leerlijnen.

Hoofdstuk 1 - Inleiding en overzicht

Dit boek is bedoeld om een discussie op gang te brengen over de inhoud en opzet van het programma voor breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen in de bovenbouw. Het gaat hierbij om keuzes en accenten voor deze leerstofgebieden. In dit hoofdstuk beschrijven we in grote lijnen de keuzes en accentverschuivingen die ons wenselijk lijken. In latere hoofdstukken gaan we hier meer gedetailleerd op in.

Nadruk op inzicht

'Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen' is een complex en lastig gebied. In zekere zin is er sprake van een overladen programma, en het is dan ook niet verwonderlijk dat dit tot problemen leidt. Deze problemen worden op dit moment vaak opgevangen met vormen van differentiatie in niveaugroepen en dergelijke. Binnen de bestaande kaders zijn er ook niet veel andere mogelijkheden, want als we als einddoel formuleren dat de leerlingen alle onderwerpen van dit leerstofgebied op een vrij formeel, abstract niveau moeten beheersen, dan overvragen we veel leerlingen. Er wordt in dit verband gepleit voor het inperken van de leerstof, maar de beperking kan ook worden gezocht in het niveau van beheersing.

Wij prefereren de laatste oplossing en stellen voor het accent te verleggen van 'kunnen' naar 'begrijpen'. Wij denken namelijk dat het probleem voor een belangrijk deel zit in het nagestreefde beheersingsniveau. De combinatie van omvangrijke en complexe leerstof en het nagestreefde beheersingsniveau leiden ertoe dat er voor elk onderdeel zo snel mogelijk moet worden aangestuurd op beheersing. De tijdsdruk zorgt er daarbij voor dat het kunnen uitvoeren van procedures voorrang krijgt boven het begrijpen. Voor veel leerlingen gaat dit te snel. Ons voorstel is om minder hoge eisen te stellen aan wat de leerlingen aan het einde van de basisschool als vlot en precies uit te voeren formele procedures moeten beheersen. We willen echter benadrukken dat het gaat om een accentverschuiving, ook het 'kunnen' blijft belangrijk.

Hiertegenover stellen we hoge eisen aan het redeneren. We zullen hiervoor geen einddoelen proberen te formuleren, maar willen wel dat steeds weer opnieuw van de leerlingen gevraagd wordt argumenten te geven. Het is bijvoorbeeld beter dat leerlingen redeneren over de relaties tussen ongelijknamige breuken, dan dat ze die proberen af te lezen van plaatjes of voorgestructureerd materiaal. Ze zouden in staat moeten zijn om te beredeneren dat $\frac{4}{6}$ evenveel is als $\frac{2}{3}$, omdat je de eenheid in het ene geval in zes stukjes deelt en in het andere geval in drie. Bij de zesden gaan er twee keer zoveel stukjes in een hele en die zijn daarom twee keer zo klein. Daarmee moeten leerlingen kunnen uitleggen dat je dus twee keer zoveel stukjes nodig hebt wanneer je zesden gebruikt dan wanneer derden.

De accentverschuiving van 'kunnen' naar 'begrijpen' brengt met zich mee dat we doelen willen formuleren in termen van 'kerninzichten' in plaats van in termen van te beheersen procedures. We komen daar later op terug.

Samenhang en verscheidenheid

Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen, in zekere zin is het allemaal hetzelfde. Wiskundig gezien gaat het bij deze getallen telkens om een andere verschijningsvorm van hetzelfde object dat we in de wiskunde aanduiden als 'rationaal getal'. Vandaar ook dat het mogelijk is om bij het rekenen in alledaagse situaties heen en weer te gaan tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Bij 75 procent denken we aan driekwart, € 2,50 interpreteren we als $2\frac{1}{2}$ euro en drie keer € 2,50 rekenen we uit via $3 \times 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$, wat we weer interpreteren als € 7,50. Dit soort wisselingen helpt ons de situatie beter te interpreteren en te begrijpen en maakt het vaak ook makkelijker om problemen op te lossen. Het lijkt ons essentieel dat leerlingen deze samenhangen gaan zien. Het is de ruggengraat van het inzicht in breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen.

Naast de samenhang lijkt het ons ook van belang dat leerlingen de verschillen doorzien. Als breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen toch allemaal hetzelfde beschrijven, waarom kiezen we dan niet voor één beschrijvingsvorm uit? Waarom gebruiken we ze naast elkaar? In hoofdstuk 2 laten we zien dat de verschillen historisch zijn gegroeid, en dat ze passen bij verschillende typen situaties en probleemstellingen. Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen hebben, chique gezegd, een verschillende fenomenologische basis. Bij meten passen kommagetallen beter, bij rente procenten. Wij vinden het van belang dat de leerlingen zich dit realiseren en dat ze de zin en de waarde hiervan inzien.

Kortom, leerlingen moeten de samenhang tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen doorzien en kunnen gebruiken, en ze moeten begrijpen waarom je in de ene situatie de ene beschrijvingsvorm gebruikt en in een andere situatie de andere.

Verschillende betekenissen, contextgebonden en formeel

In contextsituaties hebben breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen altijd betrekking op objecten of hoeveelheden. Een vierde deel is altijd een vierde deel *van iets*, bijvoorbeeld het vierde deel van een reep of pizza, of een vierde deel van de bevolking. Toch rekenen we met breuken alsof het absolute getallen zijn. We zeggen bijvoorbeeld '$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$', zonder ons af te vragen waar die breuken naar verwijzen.

We kunnen dit verschijnsel toelichten door een uitstapje te maken naar het aanvankelijke rekenen. Ook daar vinden we relatieve en absolute getallen. Op een bepaald moment kunnen heel jonge kinderen de vraag, 'Hoeveel is vier erbij vier?', nog niet beantwoorden, terwijl ze wel weten dat wanneer je vier blokjes en vier blokjes samenneemt je in totaal acht blokjes krijgt. Voor deze leerlingen heeft 'vier' nog geen op zichzelf staande betekenis. Getallen bestaan voor hen slechts als benoemde getallen: vier blokjes, vier knikkers of vier ijsjes ... Misschien zouden we overigens beter van *benoemende* getallen kunnen spreken, de getallen worden namelijk gebruikt als een soort bijvoeglijke naamwoorden om hoeveelheden te typeren.
Later ontstaat het besef dat 'vier erbij vier' altijd 'acht' oplevert, ongeacht waar de getallen naar verwijzen. De leerlingen verwerven steeds meer getalrelaties, en getallen krijgen geleidelijk een andere betekenis. Bij 'vier' denkt een leerling niet meer in de eerste plaats aan hoeveelheden, maar aan met 'vier' verbonden getalrelaties, zoals bijvoorbeeld $2 + 2 = 4$, $3 + 1 = 4$, $5 – 1 = 4$, $2 \times 2 = 4$ en $8 : 2 = 4$. Het getal 'vier' is op dat moment een wiskundig object geworden.

Bij breuken voltrekt zich een vergelijkbaar proces, of zou zich een vergelijkbaar proces moeten voltrekken. Ook hier zijn de getallen (breuken) aanvankelijk gebonden aan de *benoeming*, zoals bijvoorbeeld van een deel van een pizza, reep, cirkel of strook. En ook hier moet de overstap gemaakt worden van benoemd getal naar wiskundig object. Dat is echter pas zinvol als leerlingen zich voldoende hebben kunnen oriënteren op de betekenis van breuken. We zien echter dat er voor deze oriëntatie niet altijd voldoende tijd wordt genomen en dat de sprong naar breuken als wiskundige objecten vaak te snel wordt gezet. Dat wil zeggen dat de overstap gemaakt wordt voordat de leerlingen er werkelijk aan toe zijn en voordat zij zelf een netwerk van relaties tussen breuken hebben kunnen vormen.

Niet zelden worden concrete voorstellingen, zoals breukencirkels, gebruikt om dit gat te vullen. Daarmee wordt de zaak echter op zijn kop gezet. De overtuiging dat bepaalde relaties gelden, wordt niet verkregen door redeneren en generaliseren, maar door aflezen van een geïdealiseerd model.

De taal die leraar en leerlingen gebruiken kan hier tot misverstanden leiden. Zo kan een leerkracht die zegt: ‘Een vierde en een vierde is samen een half’, daarbij een relatie tussen wiskundige objecten op het oog hebben, terwijl leerlingen die met de breukencirkel of een andere concrete voorstelling werken, soms alleen een relatie tussen concrete objecten zien. Voor hen betekent ‘Een vierde en een vierde is samen een half’ hetzelfde als ‘Twee stukjes van een kwart cirkel uit de breukendoos zijn samen even groot als het stukje van een halve cirkel.’ Deze leerlingen bevinden zich voor de breuken nog op het niveau van de benoemde getallen. In het gesprek tussen leraar en leerling wordt dit niet zichtbaar omdat beiden dezelfde taal lijken te spreken.

Opbouwen van een relatienet

Leerlingen construeren een netwerk van getalrelaties door contextsituaties te generaliseren. De vraag kan worden gesteld hoe belangrijk het is dat de leerlingen zo’n netwerk *zelf* construeren. Ze kunnen deze relaties toch ook los van contexten leren? Dat klopt, maar in dat geval kunnen we problemen verwachten bij het toepassen.

Wanneer we getalrelaties en de daarmee samenhangende rekenprocedures willen toepassen in contextsituaties moet er een vertaalslag worden gemaakt. Het oplossen van contextproblemen voltrekt zich dan in drie stappen: (1) het vertalen van het contextprobleem naar een rekenprobleem; (2) het oplossen van dit rekenprobleem door gebruik te maken van getalrelaties en algemene procedures; (3) het terugvertalen van de oplossing naar de context. Als we dus willen dat leerlingen in toepassingen gebruik gaan maken van getalrelaties en algemene procedures, dan moeten ze de getallen in contextproblemen kunnen relateren aan getallen als wiskundige objecten.

Wanneer leerlingen de getallen-als-objecten zelf hebben geconstrueerd, zullen ze de vertaalslag heen en terug vlot kunnen maken. Wanneer ze getalrelaties echter kennen als uit het hoofd geleerde feitjes, los van de realiteit van toepassingen, dan kunnen we ernstige problemen verwachten. Bij het aanvankelijke rekenen kan dit nog meevallen, omdat deze leerstof betrekkelijk eenvoudig is en leerlingen veel ervaringen met gehele getallen opdoen. Voor de breuken en verwante leerstofgebieden ligt dit echter anders, daar zal het eerder misgaan.

Er is overigens wel sprake van een spanningsveld. Enerzijds moeten we ervoor zorgen dat leerlingen het idee van breuken als relatieve getallen goed ontwikkelen. Anderzijds moeten we er ook voor zorgen dat ze getalrelaties ontwikkelen die hen in staat stellen om breuken als wiskundige objecten te zien. Alleen dan leren ze op een zinvolle manier met kale breuken rekenen. In de praktijk betekent het dat het van belang is om het relatieve karakter van de breuken nadrukkelijk met de leerlingen te verkennen en dat we die verkenning moeten benutten om eenvoudige breukrelaties - en andere daarmee samenhangende getalrelaties - geleidelijk aan te ontwikkelen. Wanneer de leerlingen zich realiseren dat ‘$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$’ altijd gelijk is aan ‘$\frac{1}{2}$’; ‘$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$’ aan ‘$\frac{3}{4}$’; ‘$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$’ aan 1 en ‘$\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$’ aan $1\frac{1}{2}$, ongeacht of het nu over pizza’s, meters of banketstaven gaat, dan beginnen halven en kwarten te functioneren als wiskundige objecten en ontstaat er ruimte voor het rekenen met kale breuken - althans voor deze eenvoudige gevallen.

Zo kunnen leerlingen een relatienet ontwikkelen waarmee ze eenvoudige breukenproblemen kunnen oplossen. In verband met dit te ontwikkelen relatienet pleiten we ervoor om - net als bij het aanvankelijk rekenen - met eenvoudige gevallen te beginnen. Juist als leerlingen niet te veel verschillende breukrelaties voorgeschoteld krijgen, bestaat de kans dat ze een relatienet ontwikkelen. Het relatienet kan geleidelijk worden uitgebreid. Het tempo waarin dit gebeurt zal van leerling tot leerling verschillen. Op een gegeven moment is de grens echter bereikt, want je kunt niet alle relaties tussen alle mogelijke breuken paraat hebben. Net als bij de natuurlijke getallen moet er op een gegeven moment een overstap gemaakt worden naar procedures.

We achten het niet noodzakelijk dat alle leerlingen die overstap maken. Sommige leerlingen zullen niet zover komen. Wel vinden we het belangrijk dat alle leerlingen de gelegenheid krijgen om na te denken over algemene procedures voor het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken. We huldigen hier het principe van de herhaalde herkansing. Situaties die aanleiding kunnen geven tot het ontwikkelen van procedures zouden regelmatig terug moeten komen. Niet alleen om de leerlingen die de eerste keren niet aangehaakt hebben de kans te geven dat alsnog te doen, maar ook omdat we ervan uitgaan dat één keer uitvinden of snappen hoe het zit, in het algemeen niet voldoende is. Ook voor betere leerlingen geldt dat ze hetzelfde vaak een paar keer moeten begrijpen voordat het beklijft.

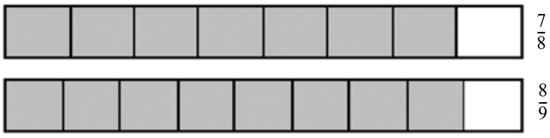
Het hierboven geschetste onderscheid tussen ‘benoemde getallen’ en ‘getallen als wiskundige objecten’ speelt uiteraard niet alleen voor breuken, maar ook voor verhoudingen, kommagetallen en procenten. Deze ontwikkeling van ‘benoemd’ naar ‘onbenoemd’ geldt voor alle getallen; het gaat in de kern om hetzelfde proces als wat in de TAL-brochure ‘Hele Getallen Onderbouw Basisschool’ wordt beschreven met de trits, ‘contextgebonden’, ‘objectgebonden’ en ‘puur tellen en rekenen’.

Modellen

Modellen kunnen verschillende functies vervullen. Zo worden ze gebruikt om het breukbegrip te introduceren. Het gaat dan bijvoorbeeld om het maken van breuken via vouwen of knippen. De aanleiding kan liggen in de context van het verdelen of meten. Getekende objecten functioneren in deze fase als model van een concrete situatie, zoals bijvoorbeeld het verdelen van een banketstaaf of pizza’s. Het doel van dergelijke activiteiten is wat ons betreft dat leerlingen gaan redeneren over breuken of kommagetallen. Kant-en-klare modellen waaruit je bijvoorbeeld breukrelaties kunt aflezen, zijn daarvoor minder geschikt. Maar ook bij zelfgemaakte breuken en ondermaten bestaat de neiging om het concrete object als uitgangspunt te nemen. Knip-, plak- en tekenwerk is echter nooit precies en we moeten leerlingen er dus toe zien te brengen dat ze het redeneren laten prevaleren boven het afmeten.

Anders gezegd, modellen moeten zich ontwikkelen tot modellen voor redeneren over breuken - en in het verlengde daarvan tot modellen voor redeneren over kommagetallen en procenten. Dit kan op twee manieren. Enerzijds zouden we graag zien dat leerlingen mentale modellen ontwikkelen en dat ze bijvoorbeeld aan een mentaal beeld van $\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{2}$ kunnen beredeneren dat $\frac{3}{5}$ groter is, omdat $\frac{3}{5}$ een strook in twee ongelijke delen deelt (één van drie stukjes en één van twee stukjes), terwijl $\frac{1}{2}$ de strook precies in tweeën deelt. Anderzijds moeten de leerlingen ook getekende modellen kunnen gebruiken om een redenering te ondersteunen.

Denk bij dit laatste bijvoorbeeld aan het vergelijken van $\frac{7}{8}$ en $\frac{8}{9}$, met als vraag welke breuk het grootst is. In de beginfase zouden de leerlingen zulke breuken kunnen vergelijken door twee gelijke stroken zo precies mogelijk in respectievelijk achten en negenen te verdelen, en de resultaten vervolgens op het oog te vergelijken (fig. 1).



figuur 1: nauwkeurig tekenen en precies vergelijken van $\frac{7}{8}$ en $\frac{8}{9}$

Uiteindelijk zouden we willen dat ze visualiseringen gebruiken om dit probleem via redeneren op te lossen. De argumentatie is dan: beide breuken zijn bijna één, maar $\frac{7}{8}$ verschilt $\frac{1}{8}$ en $\frac{8}{9}$ verschilt $\frac{1}{9}$ met één, wat je illustreert met een plaatje (fig. 2).

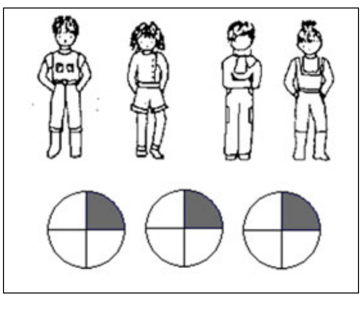
figuur 2: beredenen dat $\frac{8}{9}$ groter is dan $\frac{7}{8}$

En de redenering wordt dan afgesloten met: $\frac{1}{9}$ is kleiner dan $\frac{1}{8}$, dus $\frac{8}{9}$ is groter dan $\frac{7}{8}$. Op eenzelfde manier kunnen visualiseringen worden gebruikt om te redeneren over gelijknamigheid, kommagetallen of metriek, of om een redenering over procenten te ondersteunen.
Globaal gesproken kunnen we zeggen dat de modellen zich ontwikkelen van *modellen van* concrete situaties naar *modellen voor* het redeneren. Tegelijkertijd ontwikkelt zich een netwerk aan getalrelaties. Dit relatienet wordt ontwikkeld met behulp van de modellen, en wanneer het relatienet zich heeft gevormd, kunnen de modellen op een ander niveau gebruikt gaan worden.

In dit boek hanteren we vooral de dubbele strook en de dubbele getallenlijn. Wat niet wil zeggen dat andere modellen niet aan bod zouden moeten komen, maar het heeft ook voordelen om deze twee modellen centraal te stellen. Met deze modellen kun je namelijk fraai het relatieve karakter van breuken, procenten en kommagetallen tot uitdrukking brengen door steeds twee schalen te gebruiken (fig. 3).

figuur 3: dubbele strook met percentage (87%) en verhouding 350 van 400

Tegelijkertijd kan het gebruik van hetzelfde model ertoe bijdragen dat de samenhang tussen de verschillende notatievormen wordt gezien.
Er zijn verschillen tussen de strook en de getallenlijn. Met modellen als stroken, cirkels en dergelijke focus je sterk op de eenheid. Je kunt alleen boven de eenheid komen door de strook, cirkel of rechthoek herhaald af te beelden. Dat doe je bijvoorbeeld bij het eerlijk verdelen (fig. 4).



figuur 4: vier kinderen verdelen drie pizza's

De (dubbele) getallenlijn is abstracter en leent zich daardoor makkelijker voor uitbreiding boven de eenheid. Het gaat dan meer om 'positie' dan om 'stukjes'. We zien dan ook vaak dat het begin van de getallenlijn soms wordt weggelaten.

Guided reinvention

Als we leerlingen inzicht bij willen brengen mogen we ook fundamentele vragen over de functie van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen niet uit de weg gaan. Voorbeelden van zulke vragen zijn:
– Waarom gebruiken we naast breuken ook procenten?
– Wat is het voordeel van kommagetallen boven breuken?
– Wat hebben verhoudingen en breuken met elkaar te maken?
– Wat hebben verhoudingen en procenten met elkaar te maken?

Het is dit soort vragen dat de basis legt voor een echt begrip van wat breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen zijn. In plaats van de vragen achteraf te stellen als leerlingen al bekend zijn met de onderwerpen, lijkt het ons beter om ze te gebruiken als uitgangspunt voor de introductie van deze getallen. Het komt erop neer dat we kinderen kommagetallen en procenten als het ware opnieuw laten uitvinden.

Om dit proces aan te duiden gebruiken we wel de term, 'guided reinvention', oftewel 'geleid heruitvinden'. Wiskunde is stukje bij beetje uitgevonden; de mensheid heeft er duizenden jaren over gedaan. Voor een deel gaat het hierbij om zaken die voor ons nu zo vanzelfsprekend zijn dat we niet eens beseffen dat er iets aan uit te vinden viel. Neem het cijfer nul. We hebben de nul nodig om een onderscheid te maken tussen 103 en 13. De nul in 103 geeft aan dat er geen tientallen zijn en de 1 staat voor honderd. Toch is de nul vermoedelijk pas rond 600 na Christus uitgevonden, waarschijnlijk door wiskundigen in India. De Romeinen gebruikten bijvoorbeeld nog aparte symbolen - *C* en *X* - om een onderscheid te maken tussen 100 en 10. Op zich is dat ook een duidelijk systeem, maar berekeningen met Romeinse cijfers zijn veel lastiger dan met onze 'Arabische' cijfers.

Op een vergelijkbare manier is de stap van breuken naar kommagetallen een enorme uitvinding geweest. Het is niet een uitvinding die door één iemand is gedaan, maar onze landgenoot Simon Stevin (1548-1620) was een van degenen die de voordelen van tiendelige breuken zag en er veel aan heeft bijgedragen dat ze gebruikt gingen worden.

Het principe van het geleid heruitvinden ontlenen we aan Freudenthal. Volgens hem moeten we het onderwijs zó vormgeven dat we leerlingen de kans geven om de uitvindingen van onze voorouders als het ware nog eens over te doen. Natuurlijk moet dat niet te letterlijk worden genomen, want we kunnen van gewone basisschoolleerlingen niet verwachten dat ze iets doen waar de mensheid eeuwen voor nodig heeft gehad. Onder leiding van de leerkracht kunnen leerlingen echter wel een proces doormaken waarin ze bijvoorbeeld zelf ontdekken dat kommagetallen handig zijn en waarom ze dat zijn. Omdat de leerkracht een essentiële rol speelt spreken we van 'guided reinvention' of 'geleid heruitvinden'.

Kerninzichten

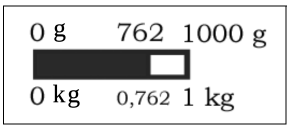
Het idee van geleid heruitvinden past bij onze keuze voor meer nadruk op inzicht. We spraken aan het begin van dit hoofdstuk van 'kerninzichten'. In deze paragraaf willen we verduidelijken wat we daaronder verstaan. We bekijken daartoe de volgende opgave.

> De prijssticker op een zak appels laat zien wat het gewicht is van de appels en wat ze per kilo kosten. Er zit echter een vlek op de uiteindelijke prijs. Wat zou je ongeveer moeten betalen (fig. 5)?

figuur 5: prijssticker op een zak appels

Wie ziet dat hier een vermenigvuldiging moet worden uitgerekend, namelijk 0,762 × € 1,20, heeft een directe manier om de oplossing te vinden, en met een rekenmachine ben je gauw klaar. Maar voor leerlingen uit groep 7 en 8 is het helemaal niet vanzelfsprekend dat je hier kunt vermenigvuldigen. Integendeel, toen we de opgave aan leerlingen voorlegden, bleek dat ze geen idee hadden hoe ze deze opgave met een rekenmachine zouden kunnen oplossen.[1]
We hielden de formulering heel open: ‘Hoeveel zou je *ongeveer* moeten betalen voor de appels?’ Mede dankzij deze openheid kwamen ze bijna allemaal met zinnige antwoorden, waaronder:
– 0,762 kg is minder dan een kilo, dus moet je ook minder dan € 1,20 betalen.
– Als een kilo € 1,20 kost, dan kost 100 gram 12 cent. Dus de appels kosten iets meer dan 7 × 12 cent.
– 0,762 kg is ongeveer $\frac{3}{4}$ kilo, dus de appels kosten ongeveer $\frac{3}{4}$ van € 1,20.

We kunnen deze antwoorden gebruiken om een idee te geven van wat we onder kerninzichten verstaan. Wanneer bovenstaande oplossingen namelijk beredeneerd moeten worden, komt daar heel wat inzicht voor kijken.
– Het eerste antwoord steunt op de redenering dat de prijs van de zak appels minder wordt dan € 1,20, omdat er minder dan één kilo inzit. Maar hoe zie je aan een kommagetal dat het kleiner is dan één? Uiteraard zou je dat kunnen weten op basis van een of ander regeltje, maar echt begrijpen waarom dat zo is vergt wezenlijk inzicht in de structuur van kommagetallen.
– Het bedenken dat minder dan een kilo betekent dat je minder dan € 1,20 betaalt vraagt inzicht in evenredigheden. Uitgaande van ‘€ 1,20 per kilo’ kun je beredeneren wat de prijs is van twee kilo, of van een halve kilo, maar ook van twee-en-halve kilo.
– Voor het omzetten van 0,762 kg in het gewicht in grammen is inzicht in maatwisseling nodig. Als steun kunnen we daarbij denken aan een mentale voorstelling van een dubbele strook of een dubbele getallenlijn (fig. 6) met aan de ene kant grammen en aan de andere kilogrammen.



figuur 6

– Bedenken dat 0,762 kilo ongeveer $\frac{3}{4}$ kilo is, vraagt niet alleen van leerlingen 0,75 associëren met $\frac{3}{4}$, maar ze moeten 0,762 ook verbinden met 0,75. Dat heeft te maken met inzicht in de orde van grootte van kommagetallen. Gevoel voor getallen speelt hier een belangrijke rol. Zo kunnen de leerling ook bedenken dat 762 gram dichtbij 750 gram ligt en dus ongeveer $\frac{3}{4}$ kilo is.

In het bovenstaande gaat het om: inzicht in de structuur van kommagetallen, inzicht in evenredigheden, in maatwisseling; en in de orde van grootte van kommagetallen. Allemaal zaken die de kern raken van het daadwerkelijk begrijpen van kommagetallen en verhoudingen. Niet tot die kern hoort, om een tegenvoorbeeld te noemen, het cijferen met kommagetallen. Dat cijferen - een procedure waarbij de komma wordt ‘verschoven’, of later wordt ‘teruggeplaatst’ - is niet moeilijker dan cijferen met gewone getallen, maar zonder inzicht is het een truuk met een grote kans op fouten. Met het centraal stellen van kerninzichten bedoelen we dat het bijbrengen van inzicht voorop moet staan, en niet het aanleren van rekenregeltjes. Kennis van rekenregels is kwetsbaar als het niet op begrip is gebaseerd. Omgekeerd kan een leerling die het in een bepaalde situatie gewenste rekenregeltje niet kent, toch een heel eind komen met inzicht in breuken en verhoudingen.

In hoofdstuk 3 beschrijven we de kerninzichten en de daarbij horende vakdidactische consequenties meer en detail. We nemen daar hier alvast op.

- Een belangrijk kerninzicht betreft het *relatieve karakter van breuken, procenten en kommagetallen*. Breuken verwijzen in de praktijk in het algemeen naar een deel van iets. Bij kommagetallen hoort meestal een maat, en bij percentages neem je altijd een percentage van iets. Dit betekent dat er sprake is van een zekere dualiteit, het gaat enerzijds om het absolute getal, terwijl anderzijds de verhouding die dit getal beschrijft ook in beeld is. Zo kan er bijvoorbeeld in de context van de benzine in de tank van een auto sprake zijn van $\frac{3}{4}$ van veertig liter. Dan beschrijft de breuk $\frac{3}{4}$ de verhouding tussen de hoeveelheid benzine die er werkelijk in de tank zit (dertig liter) en de hoeveelheid die in de tank kan (veertig liter).
- Naast dit relatieve karakter is ook het *objectkarakter* van belang. Het rekenen met breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen steunt op een netwerk van getalrelaties, die geworteld zijn in voor leerlingen reële contexten. Een getal wordt een wiskundig object wanneer het zijn betekenis niet meer ontleent aan contexten, maar aan getalrelaties.
- Inzicht in de *relaties tussen elementaire breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen* behoort uiteraard ook als zodanig tot de kerninzichten.
- Een kerninzicht bij breuken betreft het *beredeneren van gelijknamigheid*. De leerlingen moeten kunnen beredeneren hoe je breuken met een bepaalde noemer omzet in breuken met een andere noemer.
- Specifiek voor kommagetallen is het van belang dat leerlingen de structuur doorzien, zicht hebben op het idee van *systematische verfijning* en kommagetallen *betekenis* kunnen geven in termen van tiendelige breuken.
- In samenhang hiermee zouden de leerlingen inzicht moeten hebben in *maatwisseling* en dit ook moeten kunnen gebruiken. We doelen hier dan vooral op maatwisseling binnen het metrieke stelsel om komma’s weg te werken of om kommagetallen te begrijpen. We achten het vanzelfsprekend dat de leerlingen ook maatwisseling kunnen toepassen bij de omzetting van kommagetallen in tiendelige breuken. Dus bijvoorbeeld kunnen wisselen tussen tienden en honderdsten om 0,9 en 0,19 met elkaar te kunnen vergelijken.
- Een belangrijk inzicht is het besef dat het bij procenten gaat om een *gestandaardiseerde* breuk of verhouding.
- Tot de kerninzichten bij procenten hoort ook inzicht in de *relatieve grootte van percentages*. De leerlingen moeten een percentage als het ware kunnen plaatsen op een strook of getallenlijn en verbindingen kunnen leggen met gewone breuken.
- Bij procenten is het verder van belang dat leerlingen inzien dat percentages een *multiplicatief karakter* hebben. Het gaat om een deel van, en dus om vermenigvuldigen. De associatie van procenten met korting en dergelijke kan ten onrechte het beeld oproepen dat het bij percentages primair gaat om iets erbij of eraf doen.
- Dit multiplicatieve karakter impliceert dat leerlingen eigenlijk ook vertrouwd zouden moeten zijn met het idee van percentages als operator. Hier speelt echter een lastige kwestie, namelijk inzien dat *‘deel van’* en *‘vermenigvuldigen’ hetzelfde* zijn. Dit laatste lijkt ons echter wel een na te streven kerninzicht omdat het een voorwaarde is voor een zinvol gebruik van de zakrekenmachine.
- Bij verhoudingen gaat het om het kerninzicht *evenredigheid*, dat wil zeggen

dat een verhouding staat voor een eindeloze reeks van getallenparen, met een gelijke verhouding tussen de getallen. Dit betekent dat uit het delen van de - soms vrijwel onzichtbare - getallen op elkaar altijd hetzelfde antwoord komt.
– Een kerninzicht is dat breuken en procenten een middel kunnen zijn om *verhoudingsgewijs* te redeneren. Groepen van verschillende omvang kun je vergelijkbaar maken door niet te redeneren met aantallen, maar in termen van breuken of procenten. Het gaat dan om situaties die naar hun aard niet evenredig van karakter zijn, zoals bijvoorbeeld wanneer we het aantal auto's in Nederland vergelijken met die in de Verenigde Staten, of wanneer we het doelgemiddelde van twee voetbalclubs vergelijken.
– Inzicht in de *verhoudingstabel* verschaft de leerlingen een krachtig hulpmiddel voor het oplossen van verhoudingsproblemen.

Uiteraard hebben we hiermee geen dekkend beeld van alle kerninzichten. De vraag is ook hoe gedetailleerd kerninzichten beschreven moeten worden, een vraag die samenhangt met functionaliteit.
In hoofdstuk 3 proberen we de belangrijkste kerninzichten te beschrijven in samenhang met de didactische consequenties ten aanzien van leerstofuitlijning en -aanbieding. We gaan ervan uit dat die combinatie het overbodig maakt kerninzichten gedetailleerd apart te beschrijven.

Differentiatie

Het probleem van de differentiatie speelt bij breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen nog meer dan bij andere leerstof, en nog meer dan in andere leerjaren. In zekere zin is het programma voor de bovenbouw te overladen: er komen veel onderwerpen aan de orde en we verwachten blijkbaar dat alle leerlingen die stof op een vrij formeel en abstract niveau gaan beheersen. In de praktijk blijkt dat doel voor veel leerlingen niet haalbaar.

Temporisering, dat wil zeggen langzamer door het rekenboek gaan, is geen goede oplossing voor dit probleem. Een consequentie daarvan kan namelijk zijn dat leerlingen aan het eind van de basisschool wel uitentreure geoefend hebben met het optellen van breuken, terwijl ze nauwelijks iets weten van procenten of kommagetallen. In dat geval zijn de prioriteiten verkeerd gekozen, want het optellen van breuken is in het dagelijks leven geen belangrijke vaardigheid, terwijl we procenten en kommagetallen overal om ons heen tegenkomen.

Het gevoel van overladenheid heeft minder te maken met het aantal onderwerpen van de bovenbouw dan met de eisen die we stellen ten aanzien van het formeel redeneren. Op dat punt zijn er enorme verschillen tussen leerlingen. Wanneer een nieuw onderwerp als kommagetallen of procenten wordt geïntroduceerd, zijn er leerlingen die bijna direct het systeem doorzien en er op een abstract niveau meen kunnen redeneren, terwijl er ook leerlingen zijn die op de basisschool niet verder komen dan werken met kommagetallen of procenten in heel concrete situaties. We zullen dergelijke verschillen tot op een bepaalde hoogte moeten accepteren, en dat betekent dat de doelen van het reken-wiskundeonderwijs dienen te worden bijgesteld. Het uitgangspunt moet zijn dat iedere leerling op de basisschool een elementair begrip ontwikkelt van onderwerpen als breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen, maar dat we daarbij tegelijk accepteren dat een aantaal leerlingen er alleen binnen concrete situaties mee leert rekenen. Wel moeten we ze zoveel mogelijk stimuleren het systeem ook op een meer formeel niveau te doorzien.

Bijstellen van de doelen van het onderwijs rond breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen houdt in dat we ons moeten bezinnen op de sommen die we leerlingen laten oefenen, want die veronderstellen vaak een abstract niveau van redeneren. Neem als voorbeeld het optellen van breuken, waarbij we dat

eerst bekijken vanuit de situatie van de goede rekenaars. Je kunt dan zeggen dat '$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$' voor de betere rekenaars net zo reëel is als het optellen van '65 + 17 = 82', waar je ook niet hoeft te weten of het nu over appels gaat of over de lengte van plankjes. Zulke kinderen kunnen ook een som als '$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} =$' aan, omdat de kale rekenregels ze voldoende zegt. Voor een deel van hen geldt echter dat het optellen van breuken alleen betekenis heeft als ze er een concrete context bij hebben. In een verdeelsituatie met $\frac{1}{2}$ pizza en $\frac{1}{3}$ pizza kunnen ze een correcte oplossing vinden, maar als kale som is '$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$' voor hen net zo acceptabel als '$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$'.
Wanneer we alle leerlingen alle opgaven in het rekenboek laten maken, oefenen ze veel in het maken van kale breuken-opgaven. Die kale opgaven, en de rekenoperaties die erbij horen, hebben echter weinig betekenis voor ze, wat betekent dat ze fouten gaan maken. De leerkracht besluit dan misschien dat ze nog meer moeten oefenen met dit type sommen, maar daarmee wordt hun inzicht niet verhoogd, hooguit worden ze meer bedreven in wat ze als een 'truukje' ervaren.

Als tweede voorbeeld kunnen we de procenten nemen. Sommige leerlingen hebben aan een eerste kennismaking met procenten al genoeg om te doorzien wat de reikwijdte van het procentbegrip is. Ze doorzien meteen dat procenten een bijzonder soort breuken zijn - 'honderdsten' - en kunnen van daaruit moeiteloos procenten naar breuken vertalen en andersom. Voor andere leerlingen moet de link tussen breuken en procenten echter veel nadrukkelijker worden gelegd. Zonder dat inzicht hebben kale omrekensommen geen zin, want zelfs '25% = $\frac{1}{4}$' kan dan eenzelfde status hebben als het feit dat een paard in het Frans 'cheval' heet.

Het huidige reken-wiskundeonderwijs in de bovenbouw stoot vaak te snel door naar het formele rekenen. Dat leidt ertoe dat leerlingen vaak bezig zijn met het inoefenen van rekenregels zonder dat ze begrip hebben wat daar onder ligt. Dergelijk onderwijs is niet erg effectief, want inoefenen van regels vergroot hun inzicht niet. Wij kiezen daarom voor het centraal stellen van het ontwikkelen van inzicht. Dat betekent dat meer tijd moet worden uitgetrokken voor klassengesprekken, want inzicht ontstaat vooral door gesprekken en discussies. Het juiste antwoord is in dergelijke discussies niet zo belangrijk; het gaat om de redeneringen waarop kinderen hun oplossing baseren. De tijd die hiervoor moet worden vrijgemaakt, kan worden gevonden door minder nadruk te leggen op het inoefenen van rekenprocedures. Het reken-wiskundeonderwijs dient zich naar ons idee te richten op kerninzichten.

Overzicht

In de volgende hoofdstukken werken we de thema's die we in dit hoofdstuk aanstipten verder uit. De voorbeelden die we daarbij gebruiken zijn afkomstig van de ontwikkelde kernlessen (zie voorwoord).
In hoofdstuk 2 bespreken we waarom het belangrijk is dat breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen niet als gescheiden leerstofonderdelen worden onderwezen. Leerlingen moet de gelegenheid worden geboden om steeds relaties te leggen.
In hoofdstuk 3 beschrijven we de kerninzichten. Voor de overzichtelijkheid gebruiken we hierbij toch de opdeling in breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen.
In hoofdstuk 4 gaan we in op de problematiek van de differentiatie. Omdat klassengesprekken zo'n centrale rol spelen in het onderwijs, bespreken we uitvoerig wat het betekent om alle leerlingen - ook de zwakke rekenaars en de bollebozen - te betrekken in de klassengesprekken.
In hoofdstuk 5 blikken we kort terug en bespreken we hoe de verdere discussie rond deze onderwerpen gevoerd zou kunnen worden.

Noot

[1] Inzien waarom hier sprake is van vermenigvuldigen is lastig, omdat de leerlingen hiervoor hun inzicht in wat vermenigvuldigen is moeten aanpassen, terwijl ze bovendien de ervaringsregel dat vermenigvuldigen altijd groter maakt, moeten opgeven.

Hoofdstuk 2 - Samenhang

Inleiding

Wanneer we ervoor kiezen contexten centraal te stellen in het onderwijs en leerlingen op allerlei manieren de kans te geven deze te verkennen, ligt het werken aan samenhang op de stip.

In het onderwijs wordt de laatste jaren veel nadruk gelegd op de betekenis van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Het is goed om daarbij te kijken naar de oorsprong van deze getallen. Breuken komen bijvoorbeeld voort uit het eerlijk verdelen of uit het meten. Kommagetallen zijn in het dagelijks leven vaak meetgetallen. Ze zijn ontstaan om breuken in meetsituaties op een vergelijkbare manier te noteren als gehele getallen. Met procenten worden onder andere kortingen aangegeven, we krijgen 'zoveel' op de honderd korting. Wanneer we verhoudingssituaties willen vergelijken kunnen we dat doen door 'op de 100' te rekenen, en dan werken we dus net zoals met procenten.

Verschillen tussen situaties hebben in het verleden geleid tot verschillende verschijningsvormen voor wat wiskundig gezien hetzelfde is. Dergelijke verschillen spelen ook tegenwoordig nog een rol en daarom is het van belang om in het onderwijs aandacht te besteden aan zowel breuken, verhoudingen en procenten als aan kommagetallen. Goed begrip kan echter pas ontstaan als duidelijk wordt dat het hierbij telkens min of meer over hetzelfde gaat en dat het daarom mogelijk is van de ene naar de andere vorm over te stappen.

Begrip van de betekenis van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen wordt vergroot door er in verschillende contexten mee te werken Daarom spelen betekenisgevende situaties gedurende een lange tijd een rol in het onderwijs. Grip krijgen op de genoemde contexten leidt onder meer tot kennis over relaties tussen getallen. Om het rekenen makkelijker te maken stappen we, vaak ongemerkt, over van bijvoorbeeld breuken naar procenten of van kommagetallen naar breuken. Verhoudingsgewijs denken functioneert daarbij op een natuurlijke manier als tussenstation. Neem de volgende situatie.

> In een krantenkop is aangegeven hoe de gemeenteraad over de aanleg van een nieuwe brug denkt. Een journalist doet als volgt verslag in de krant.
>
> **Ruim 60 procent stemde voor**
>
> U weet dat er negentien raadsleden zijn. Hoeveel raadsleden stemden voor?

Een eerste reactie die dit percentage oproept is wellicht gesteld in termen van breuken: het is meer dan de helft. Wanneer je het precies uitrekent met een zakrekenmachine verschijnt een kommagetal, dat vervolgens weer als een percentage geïnterpreteerd moet worden. In het kader op pagina 22 wordt dit voorbeeld verder uitgewerkt.

In dit hoofdstuk gaat het om de samenhang tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Wiskundig bezien gaat het daarbij in feite telkens om een andere beschrijving van eenzelfde soort getal, een getal dat we in de wiskunde aanduiden als rationaal getal. Vaak is het in dagelijkse situaties mogelijk om bij het rekenen over te stappen van de ene naar de andere representatie, wat helpt om de situatie beter te interpreteren en te begrijpen en problemen makkelijker op te lossen. Tegelijkertijd helpt deze samenhang ook om de getallen beter te begrijpen. In het onderwijs kunnen we dit benutten door vanuit alledaagse situaties te werken. Op die manier leren we leerlingen de relaties tussen breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen te begrijpen.

Van procenten naar breuken, kommagetallen en verhoudingen

'Ruim 60 procent stemde voor' luidde de krantenkop. Er zijn 19 raadsleden. Hoeveel raadsleden stemden voor?

Het is in ieder geval meer dan de helft. Als er 'ruim 50 procent' zou hebben gestaan, dan zouden het er waarschijnlijk 10 zijn geweest. De journalist schrijft echter 'ruim 60 procent', dus zullen er wel 11 of 12 voorstemmers zijn geweest.

Er was blijkbaar ook geen $\frac{2}{3}$ meerderheid, anders had dit wel in de kop gestaan. Bij 12 van de 18 zou je precies een $\frac{2}{3}$ meerderheid hebben. Er waren echter 19 raadsleden. 12 van de 19 is minder dan $\frac{2}{3}$, dus minder dan 66 $\frac{2}{3}$ procent, zeg 'ruim 60 procent'.

We kunnen 19 ook afronden naar 20; 12 van de 20 is 60 procent; dan is 12 van de 19 dus meer dan 60 procent.

We kunnen de verhoudingen 'op 100' zetten. 60 van de 100 is even veel als 12 van de 20. Er zijn echter geen 20 raadsleden, maar 19.

Of we pakken de rekenmachine erbij. Dan kunnen we bijvoorbeeld eerst 1 procent van 19 uitrekenen - via 19 : 100 - en dat keer 60 nemen. We krijgen dan 11.4. Dus twaalf voorstemmende raadsleden vertegenwoordigen samen ruim 60 procent van de raad.

Of we delen 12 direct door 19. Bij 12 : 19 geeft de rekenmachine 0.6315789 in de display. 0,63 kan ook geschreven worden als $\frac{63}{100}$ en dus ook als 63 procent Ongeveer 63 procent van de raadsleden stemde voor.

We starten dit hoofdstuk vanuit een historisch-wiskundige ingang, door te beschrijven hoe breuken, procenten en kommagetallen ontstaan zijn. Hierna maken we de overstap naar het onderwijs en beschrijven welke modellen hiervoor van belang zijn. Deze modellen ondersteunen onder andere het verwerven van kennis van getalrelaties. Tot slot laten we zien hoe breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen in samenhang aan de orde kunnen komen als rijkere reken-wiskundige problemen en hoe deze een meer centrale plaats krijgen in het onderwijs.

'Verschillend, maar toch hetzelfde'

De ontstaansgeschiedenis van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen laat zien dat verschillende situaties vragen om verschillende notatiewijzen. Toen breuken ook de functie van meetgetallen kregen, ging men niet-stambreuken gebruiken en van daaruit ontstonden later de kommagetallen. Procenten ontstonden vanuit het standaardiseren van verhoudingen.

Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen zijn verschillende notaties voor iets wat we wiskundig gezien als hetzelfde zouden kunnen beschouwen. Ze hebben verschillende namen omdat ze op verschillende manieren genoteerd worden en omdat ze in de historie vanuit verschillende situaties zijn ontstaan. Het gaat om rationale getallen, wat wil zeggen dat ze genoteerd kunnen worden als een verhouding tussen twee hele getallen. Het volgende rijtje situaties rond één rationaal getal maakt dit duidelijk.

– Wieke at $\frac{3}{5}$ deel van haar reep op en gaf de rest aan een vriendinnetje.
– 3 op de 5 automobilisten staan regelmatig in de file.
– '60 : 100 = 3 : 5', bijvoorbeeld in een mengsel: 60 procent water.
– $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ van een kilometer: 'nog ...0,6 km fietsen, we zijn dus bijna bij de camping.'

– De kale som: 3 : 5 = ...
– De kale breuk $\frac{3}{5}$.

Hoe komt het dat er minstens vier verschillende manieren zijn om dezelfde verhouding te noteren? Het antwoord op deze vraag ligt, zoals gezegd, in de geschiedenis. Telkens ontstond een nieuwe notatiewijze die goed paste bij een specifieke situatie of een bepaalde manier van rekenen.

Breuken
Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen worden in eerste instantie beschreven in handelingstaal. Je deelt, je past af, of je construeert een nieuwe maat door door tien of honderd te delen. Geleidelijk ontwikkelen zich hieruit getallen en getalrelaties. We kunnen aan de geschiedenis van de breuken zien dat dit nog niet zo'n eenvoudig proces is.

De Egyptenaren waren de eersten die ongeveer 1700 voor Christus voor stambreuken (breuken met 1 als teller) rekenprocedures ontwikkelden. In de symbolen die ze gebruikten is de verwijzing naar de handeling van het verdelen nog duidelijk aanwezig. Zij gebruikten een schematische afbeelding van een brood en zeven personen om $\frac{1}{7}$ te beschrijven (fig. 1).

figuur 1: Egyptische breuknotatie

'Een zevende deel van een brood is dat wat je krijgt als je een brood onder zeven mensen verdeelt.' De Egyptische notatie werd tot ver in de middeleeuwen gebruikt. Al die tijd werkte men alleen met stambreuken. In gevallen waar niet direct een mooie stambreuk te vinden was, week men uit naar een optelling van stambreuken. Dit roept de vraag op waarom breuken met noemers ongelijk aan één niet eerder werden ingevoerd. Een mogelijke verklaring is dat stambreuken eerst moeten worden opgevat als telbare objecten, voordat je 'tellers' zinvol kunt invoeren.

Wanneer je veel met een bepaalde stambreuk werkt, zal het handelingsaspect naar de achtergrond verdwijnen en kan de stambreuk de status krijgen van zelfstandige maat. Denk bijvoorbeeld aan $\frac{1}{4}$ liter slagroom. Dat is voor ons een bepaalde hoeveelheid. Daarbij denken we niet aan het in vieren delen van een liter. Dit handelingsaspect is helemaal verdwenen. Wel realiseren we ons de verhoudingen, één liter is vier keer zoveel als $\frac{1}{4}$ liter. Wanneer zich eenmaal een nieuwe maat heeft gevormd, kunnen we ook gaan afpassen. Pas dan is het zinvol de breukentaal uit te breiden naar het introduceren van breuken met tellers ongelijk aan één. Deze nieuwe breuken beschrijven namelijk ook het aantal keren dat is afgepast. Uit de geschiedenis blijkt dat dit niet vanzelfsprekende is. Het voorgaande maakt duidelijk dat dit ook logisch is, het gaat immers niet om het uitbreiden van een procedure van 'delen' naar 'delen en vermenigvuldigen'. Er zit een stap tussen; 'een-zoveelste-deel' moet eerst het karakter krijgen van een zelfstandige maat die losstaat van de handeling van het (ver)delen.
De volgende stap betreft dan de stap naar getallen als wiskundige objecten. Door te generaliseren over allerhande contextsituaties ontwikkelen leerlingen kennis over relaties tussen breuken. Zo ontwikkelen de breuken zich tot wiskundige objecten die functioneren binnen een netwerk van getalrelaties.

Kommagetallen
Breuken kregen deze andere functie - die van meetgetal - steeds nadrukkelijker. Dit gebruik van breuken ligt voor de hand, omdat bij het meten met een vaste maat, bijvoorbeeld een meter, vaak een deel van de gekozen maat overblijft en

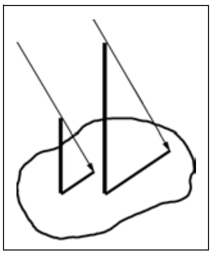
dat overgebleven deel moet ook benoemd worden. Aanvankelijk koos men daarvoor een andere maat. Zo werd de maat 'voet' bijvoorbeeld aangevuld met de 'duim'. Een voet bestond dan uit twaalf of tien duimen. Later koos men voor breuken. In het begin werkte men hierbij nog met een optelling van stambreuken, maar later veranderde de beschrijvingswijze en ontstonden breuken met een teller groter dan één.

Pas rond 1600 kwam men op het idee van de tiendelige breuken. De Nederlander Simon Stevin legde het systeem uit in een boek met de titel 'De Thiende'. Het voordeel van tiendelige breuken of kommagetallen - Stevin noteerde ze nog niet met een komma - is dat je ermee kunt rekenen alsof het gewone getallen zijn. Bovendien kun je de verfijning op een simpele manier eindeloos voortzetten: als 3,6 niet precies genoeg is ga je naar 3,64 of 3,642, enzovoort. Het is een mooi, elegant systeem dat de decimale structuur van de gehele getallen - eenheden, tientallen, honderdtallen, enzovoort - doortrekt naar de andere kant.
Met de opkomst van typemachines, rekenmachines en computers heeft het gebruik van kommagetallen een hoge vlucht genomen. Inmiddels gebruiken we in veel situaties kommagetallen waar vroeger met breuken werd gewerkt.

Procenten
De historie van procenten is vergelijkbaar met die van kommagetallen, maar hier bleef men denken in termen van verhoudingen. In het verleden werd rente op geldbedragen en te betalen belasting uitgedrukt in een verhouding. Rente kon bijvoorbeeld op de volgende manier worden aangegeven: op iedere 300 dukaten worden 5 dukaten als rente gegeven. Bij de invoering van een nieuw belastingstelsel in 1569 werd gesteld dat iedere 'Tiende Penning' aan belasting moest worden betaald, dus één op elke tien penningen.

Werken met verhoudingsgetallen heeft als nadeel dat het vergelijken van verhoudingen lastig kan zijn. Is twee van de drie bijvoorbeeld meer of minder dan drie van de vijf? Om dit probleem op te lossen ging men gebruikmaken van een gestandaardiseerde verhouding door 'op de honderd' te gaan rekenen. Het Franse 'per cent' werd verbasterd tot 'procent', wat staat voor een verhouding waarbij een van de getallen op honderd is gesteld.

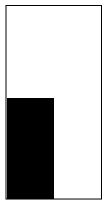
Verhoudingen
Breuken, procenten en kommagetallen geven verhoudingen weer. We spreken van verhoudingen als er sprake is van een lineair verband tussen twee (of meer) getalsmatige beschrijvingen. 'Lineair' of 'recht evenredig' betekent: als het ene getal met een bepaalde factor wordt vergroot of verkleind, dan wordt het andere getal met diezelfde factor vergroot of verkleind. Een dergelijk lineair verband komt vaak voor. Denk bijvoorbeeld aan:
- Prijs en gewicht. Wanneer je twee keer zoveel koopt moet je meestal ook twee keer zoveel betalen.
- Benzinegebruik. Als een auto '1 op 32' rijdt wil dat zeggen dat er 32 kilometer kan worden gereden op één liter benzine, en dus 64 kilometer op twee liter benzine, of 48 kilometer op anderhalve liter.
- Ingrediënten. Om dezelfde smaak te houden moeten de hoeveelheden recht evenredig worden vergroot of verkleind.



figuur 2: schaduw

- Een schaalmodel van bijvoorbeeld een auto of vliegtuig. Alle maten moeten evenredig worden verkleind.
- Schaduw. Er is een lineair verband tussen de lengte van rechtopstaande stokken en hun schaduw. Een stok die twee keer zo lang is, heeft ook een schaduw van twee keer zo lang (fig. 2).

Leerlingen herkennen gemakkelijk het verhoudingsgewijze karakter in zulke alledaagse situaties. Dat is belangrijk omdat dit een startpunt vormt voor het rekenen, bijvoorbeeld via een verhoudingstabel. Het veelvuldig voorkomen van verhoudingssituaties maakt overigens ook dat leerlingen soms een lineair verband zien waar dat er niet is. Ze denken bijvoorbeeld vaak dat als de zijde van een rechthoek twee keer zo groot wordt, de oppervlakte ook twee keer zo groot wordt (fig. 3).



figuur 3: vergroten of verkleinen

Een verschil tussen verhoudingsbeschrijvingen als '2 van de 3', '1 op 32' en dergelijke enerzijds, en breuken, procenten en kommagetallen anderzijds, is dat in het eerste geval de twee getallen van de verhouding allebei worden genoemd, terwijl bij breuken, procenten en kommagetallen de verhouding als het ware wordt samengevat in één getal. Daarmee geven breuken, procenten en kommagetallen tegelijkertijd het resultaat weer. Dat is ook een belangrijke reden voor hun ontstaan: men wilde het resultaat van de verhoudingssituatie op een directe manier vastleggen.

Een belangrijk verschil tussen kommagetallen en procenten is dat procenten als het ware altijd op zichzelf blijven staan. Met kommagetallen kun je net zo werken als met gehele getallen. Je kunt een kommagetal bij een ander getal optellen, of ervan aftrekken

Standaardiseren

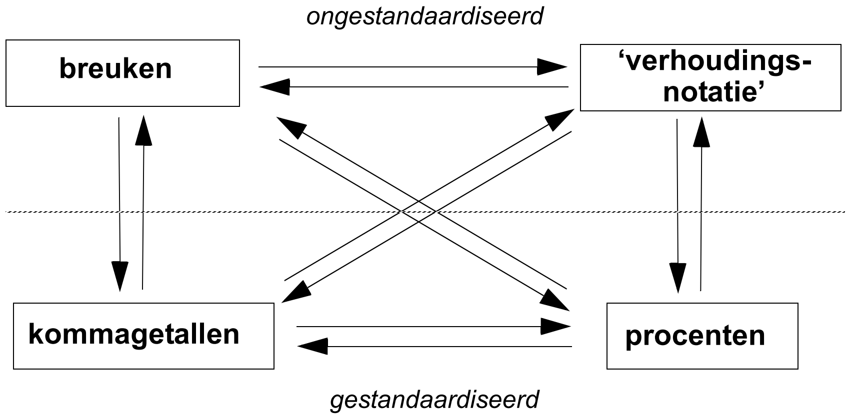
Standaardiseren houdt in dat verhoudingen en breuken in makkelijk vergelijkbare getallen worden uitgedrukt. Bij procenten wordt alles uitgedrukt ten opzichte van 100. Bij kommagetallen is er een systematische verfijning via tienden, honderdsten, enzovoort.

Het vergelijken van $\frac{1}{3}$ deel en $\frac{2}{5}$ deel van iets is niet eenvoudig. Je ziet pas snel dat $\frac{2}{5}$ iets meer is, wanneer er van de breuken kommagetallen worden gemaakt, of als bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$ wordt vervangen door de gelijkwaardige breuk $\frac{2}{6}$. Het is veel makkelijker als gevraagd wordt of 33 procent van een bedrag meer of minder is dan 40 procent van dat bedrag. Omdat procenten altijd op honderd zijn genormeerd wordt het vergelijken een stuk makkelijker en we zien aan percentages ook direct hoeveel iets meer of minder is. In het verleden is op een gegeven moment besloten tot standaardiseren van breuken en verhoudingen om op die manier problemen bij het vergelijken te omzeilen. Breuken werden gestandaardiseerd door te kiezen voor een verfijning via stappen van tien. Procenten zijn ontstaan vanuit het standaardiseren van verhoudingen naar honderd.

Inzicht in de samenhang tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen leidt tot het handig kunnen overstappen van de ene vorm van beschrijving naar de andere. Die samenhang wordt weergegeven in figuur 4. Het woord 'verhoudingsnotatie' staat in het schema tussen aanhalingstekens. De reden is dat het ook bij breuken, procenten en kommagetallen om verhoudingen gaat. Met 'verhoudingsnotatie' bedoelen we een beschrijving als '2 van de 3' en dergelijke, dus beschrijvingen waarin beide getallen van de verhouding apart worden genoemd.

Enkele voorbeelden:

- Wanneer we 9 procent van iets willen uitrekenen, dan kunnen we dat met de zakrekenmachine doen door in te typen: *009 (van procenten naar kommagetallen).
- Het uitrekenen van de som '$\frac{1}{2}$ + $\frac{4}{5}$ wordt gemakkelijk als we er kommagetallen van maken. We rekenen dan '0,5 + 0,8 = 1,3' uit (van breuken naar kommagetallen).
- Als er 75 procent wordt gegeven, moeten we gewoon $\frac{3}{4}$ deel nemen (van procenten naar breuken).
- Bij het uitrekenen van '0,49 + 0, 249' maken we een schatting en rekenen uit '$\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{4}$'(van kommagetallen naar breuken).
- 3 op de 5 mensen is 60 procent (van breuken naar procenten).
- '$\frac{2}{3}$ van 75 mensen' is '2 van de 3 mensen', of '10 van de 15', of '50 van de 75' (van breuken naar verhoudingen).



figuur 4: relaties tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen

De voorbeelden maken zichtbaar dat het soms goed uitkomt om de overstap te maken naar een gestandaardiseerde beschrijving van de situatie (in procenten of kommagetallen), maar soms ook niet (fig. 4). De voorbeelden laten ook de grote verwantschap zien tussen de notatie in kommagetallen en procenten (de gestandaardiseerde getallen): 0,75 en 75 procent lijken erg op elkaar.

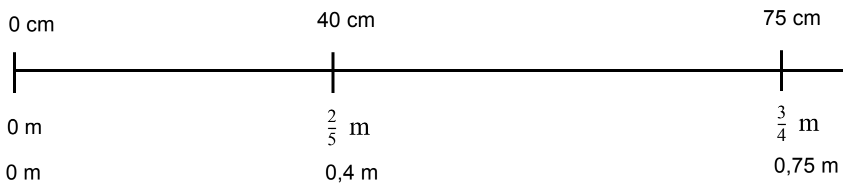
Didactisch perspectief

De geschiedenis van het ontstaan van breuken, procenten en kommagetallen biedt aanwijzingen voor het inrichten van het onderwijs.

We begonnen dit hoofdstuk met het nagaan van de historische herkomst van breuken, procenten en kommagetallen. Deze beschouwing leerde dat breuken, procenten en kommagetallen er niet van de ene op de andere dag waren. Er was sprake van een langdurig leer- en ontwikkelproces dat uiteindelijk leidde tot de getallen zoals we ze tegenwoordig kennen. We moeten leerlingen ook de tijd gunnen om deze ontwikkeling - in aangepaste vorm - te laten doormaken. We moeten ze helpen bij dit geleid heruitvinden door ze passende situaties voor te leggen. Want juist dat biedt hen de mogelijkheid om zelf relaties tussen breuken, procenten en kommagetallen te ontdekken en waarom op het ene moment voor procenten gekozen wordt, en op het andere moment bijvoorbeeld voor breuken. Dit betekent dat we ervoor moeten waken dat te snel de sprong wordt gemaakt naar breuken, procenten en kommagetallen als wiskundige objecten. Eerst moeten leerlingen zelf een netwerk van relaties tussen breuken hebben kunnen vormen.

Om goed naar de samenhang tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen te kunnen kijken, is het nodig de leerstofonderdelen ook vanuit een didactisch perspectief te beschouwen. Deze leerstofonderdelen hebben ieder hun eigen karakteristiek, wat niet zo verwonderlijk is als we nagaan hoe de verschillende getallen zijn ontstaan. We brengen leerlingen in situaties waarin het voor de hand ligt om ‘op de 100’ te denken, wanneer we het willen hebben over procenten. We laten hen proeven aan het belang van het standaardiseren als we de overstap willen maken van breuken naar kommagetallen. Omdat we het leren beschouwen als het actief construeren van een relatienet, leidt iedere gekozen invalshoek al snel ook tot het onderzoeken van samenhang.

Deze samenhang komt verder naar voren wanneer bijvoorbeeld breuken en procenten worden gevisualiseerd in een strook, of wanneer gehele getallen, kommagetallen en breuken een plaats krijgen op dezelfde dubbele getallenlijn. Deze modellen helpen leerlingen bij het ontwikkelen van een taal voor breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen; omdat deze modellen door de leerstofonderdelen als het ware gedeeld worden, kan zich een gemeenschappelijke taal ontwikkelen. Dat stelt echter eisen aan de leraar die in gesprek met de leerlingen de relaties moet expliciteren (fig. 5).



figuur 5: dubbele getallenlijn

Het stelt ook eisen aan de leerstof en de leergang, want om de samenhang tussen de leerstofonderdelen zichtbaar te maken moet de herkomst van procenten, kommagetallen en breuken verkend worden. Uiteindelijk vormt ook de zakrekenmachine een middel om over relaties tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen na te denken, omdat die de leerlingen als het ware dwingt om getallen uit hun context te lichten en te beschouwen als wiskundige objecten.

Contexten en modellen

Breuken, kommagetallen en procenten zijn relatieve getallen, die pas betekenis krijgen, als duidelijk is waarop ze betrekking hebben.
De keuze van de strook en dubbele getallenlijn als centrale modellen, maken dat de samenhang beter naar voren komt.

Een kerneigenschap van breuken, kommagetallen en procenten is dat het om relatieve getallen gaat, die pas betekenis krijgen als duidelijk is waarop ze betrekking hebben. Het relatieve karakter van breuken komt duidelijk naar voren bij een benzinemeter.
De tank is voor ongeveer $\frac{3}{4}$ gevuld. Hoever kun je daarmee rijden? Dat hangt onder andere af van hoeveel benzine er in de tank gaat. Als er 40 liter in de tank gaat, dan zit er nu nog 30 liter in. Past er 60 liter in dan zit er nu nog 45 liter in. Iets dergelijks geldt voor kommagetallen. Hier speelt de relativiteit in door via de keuze van de maat. Een uitspraak als ‘We moeten nog 2,9 rijden’, zegt pas wat, als we weten dat het om kilometers gaat (fig. 6).

figuur 6: benzinemeter, schematisch weergegeven

Dit relatieve karakter speelt ook bij procenten. Veel mensen kennen de strook als visualisering van het gedeelte dat al is 'gedownload'. In de strook hieronder is al ongeveer driekwart gedaan (fig. 7). Betekent dit nu dat het bijna klaar is? Dat hangt er maar van af waar de strook voor staat, want als het om een groot bestand gaat kan het nog wel even duren voor de computer klaar is.

figuur 7: procentenstrook op de computer

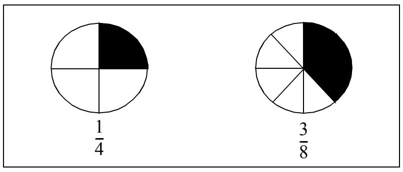
Binnen een contextsituatie is het relatieve karakter van een breuk, kommagetal of percentage altijd wel duidelijk, en de situatie helpt leerlingen dan om de correcte operaties te kiezen. Op een hoger niveau kunnen modellen deze functie overnemen.

Goed gekozen rekensituaties - contexten - geven betekenis aan getallen en dus ook aan breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Deze contexten, bijvoorbeeld het eerlijk verdelen van pizza's of het meten met breukenstrookjes, leiden tot modellen als strook of cirkel. Op hun beurt vormen de modellen weer een brug naar breuken, kommagetallen en procenten als kale getallen.
In de context van een verhaal over een bakker kan aan de leerlingen gevraagd worden hoe je een stokbrood handig in zessen deelt. Het is heel natuurlijk om het stokbrood hierbij als een strook voor te stellen (fig. 8).

figuur 8: stokbrood verdelen

Vanuit dergelijke situaties kan de strook een denkmodel worden waarmee leerlingen zich de procedure van het maken van gelijke partjes kunnen voorstellen. De strook is de eenheid en tegelijkertijd het object dat wordt verdeeld.

We beschrijven in dit boek vooral contexten die aanleiding geven tot het ontwikkelen van het strookmodel en de (dubbele) getallenlijn. Dit zijn echter niet de enige modellen die in dit leerstofgebied aan de orde komen. Bij sommige contexten past een rechthoek of een cirkel beter. Verder zijn sommige breuken eenvoudiger te tekenen en af te lezen in een cirkel of een rechthoek. Bijvoorbeeld wanneer het om vierden, achtsten of twaalfden gaat (fig. 9). Voor procenten en kommagetallen zijn stroken en getallenlijnen in het algemeen echter de meest voor de hand liggende representatievormen. Verder hebben deze modellen als voordeel dat je het relatieve karakter van breuken, procenten en dergelijke er goed mee tot uitdrukking kunt brengen door er dubbele stroken of getallenlijnen van te maken. Bovendien lenen deze modellen zich niet alleen voor het weergeven van concrete situaties, maar kunnen ze ook heel goed worden benut voor het visueel ondersteunen van het redeneren met getalrelaties. Zo lieten we in hoofdstuk 1 zien dat een plaatje helpt bij het beredeneren dat $\frac{8}{9}$ groter is dan $\frac{7}{8}$, omdat $\frac{8}{9} = 1 - \frac{1}{9}$, $\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$, en $\frac{1}{9}$ kleiner is dan $\frac{1}{8}$.



figuur 9: cirkelmodel

Door bij zowel breuken, als procenten en kommagetallen, en af en toe ook bij verhoudingen, stroken en getallenlijnen te gebruiken maken we de samenhang tussen deze gebieden duidelijk.

Van 'model van breuken maken' naar 'model voor getalsmatig redeneren'

De strook is eerst een abstractie van enkele contexten, maar gaandeweg wordt het een middel om te laten zien hoe je hebt geredeneerd.
Het verkennen van getalrelaties is een belangrijk doel van het onderwijs in breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen.

Een van de belangrijkste redenen om de strook als model centraal te stellen, is de mogelijkheid om getalrelaties te verkennen. Dit gebeurt al direct bij het bespreken met de leerlingen van handige manieren om een strook in bijvoorbeeld zes, acht of negen stukken te delen. Een strook kun je in zessen delen door die in gedachten eerst in drieën of tweeën te delen. Het delen in acht stukken kan gedaan worden door in gedachten herhaald te halveren.

Ook bij het vergelijken van breuken - bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{10}$ - biedt het denken aan een strook ondersteuning. De breuk $\frac{1}{3}$ kan worden gemaakt door een strook - al dan niet in gedachten - in drieën te delen. Bij $\frac{3}{10}$ deel je bijvoorbeeld eerst in twëeen en dan in vijven. Uiteindelijk neem je drie van deze delen. De twee strookjes die zo gemaakt zijn kunnen op elkaar worden gelegd. Maar het indelen leidt ook tot redeneren. Door het strookje dat in drieën is gedeeld verder in te delen, ontstaan negen stukjes en komt $\frac{1}{3}$ naar voren als $\frac{3}{9}$. Wanneer je je realiseert dat $\frac{1}{9} > \frac{1}{10}$, dan kun je beredeneren dat $\frac{3}{9}$ groter is dan $\frac{3}{10}$.

De strook ondersteunt dus het vormen van een relatienet - in het gegeven voorbeeld tussen $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{9}$ en $\frac{3}{10}$. Ook veel eerder, bijvoorbeeld bij het beschrijven van verdeelresultaten, komen dergelijke relaties naar voren. Bijvoorbeeld als zes kinderen vijf stokbroden verdelen, kan ieder kind $\frac{1}{2}$ stokbrood en nog $\frac{1}{3}$ stokbrood krijgen. Maar natuurlijk kunnen alle stokbroden ook in zessen worden gedeeld en dan krijgt iedereen vijf stukjes van $\frac{1}{6}$ stokbrood. En verder kan er voor een van de kinderen van alle stokbroden $\frac{1}{6}$ deel worden afgebroken, zodat er $\frac{5}{6}$ stokbrood overblijft. De leerlingen zien zo relaties, die bij meer van dergelijke ervaringen tot het generaliseren van die getalrelaties leiden, waardoor de getallen wiskundige objecten worden:

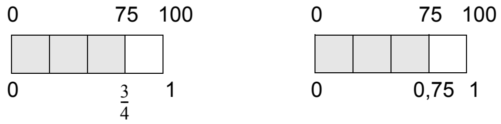
$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Met deze overgang van contextgebonden breuken naar breuken als zelfstandige wiskundige objecten, verandert ook de functie van het model. De strook wordt nu een middel om te laten zien hoe je getalsmatig hebt geredeneerd.

Wanneer we op deze manier te werk gaan, ligt ook de samenhang tussen breuken, procenten en kommagetallen op de stip. We kunnen ons bijvoorbeeld een voorstelling van $\frac{3}{4}$ maken door te denken aan een strook met vier stukjes, waarbinnen we een indeling maken met aan de ene kant drie stukjes en aan de andere kant één stukje. Wanneer we willen nagaan om hoeveel honderdsten het hier gaat, stellen we de strook voor als vier stukjes van 25 cm of 25 procent en nemen er daar drie van. De strook laat zien hoe we kunnen rekenen. Zo komt naar voren dat $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ of 0,75 (fig. 10).



figuur 10: strookmodel

Bovendien toont de strook op deze manier de gelijkwaardigheid van twee verhoudingen, namelijk 75 : 100 en 3 : 4. Verder wordt duidelijk dat $\frac{3}{4}$ deel ook gezien kan worden als 75 procent.
De strook is nu niet langer een abstractie van een context, maar een middel om het denken te ordenen, dat steunt op getalrelaties. De strook of dubbele getallenlijn vergemakkelijkt zo ook de overstap van breuken en verhoudingen naar kommagetallen en procenten.

Relatienet en samenhang

Redeneren over breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen leidt tot een netwerk van getalrelaties. Tegelijkertijd vormen die getalrelaties de basis voor het kunnen redeneren.

Uiteindelijk doel van het leren van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen is dat leerlingen een netwerk van getalrelaties ontwikkelen. Een dergelijk netwerk ligt aan de basis van het redeneren over deze onderwerpen. Het onderwijs moet er volgens ons op worden gericht leerlingen voldoende getalrelaties te laten verwerven, zodat het redeneren - vaak via schattend of globaal rekenen - mogelijk wordt gemaakt. Er is daarmee dus geen afruil tussen het verwerven van getallenfeitjes tegenover het leren redeneren; het een is voorwaardelijk voor het ander.
Bij het verwerven van een relatienet denken we vooral aan schattend en globaal rekenen. Het werken aan een dergelijk relatienet draagt bij aan het vergroten van de getalgevoeligheid van leerlingen. Er zijn waarschijnlijk weinig leerlingen waarvoor 25 geen bijzonder getal is. 25 roept direct relaties op met andere getallen. Dit zou voor meer getallen moeten gelden. Bijvoorbeeld voor:

– 49, dat is bijna 50 en dus de helft van 100;
– 33, dat is iets minder dan $\frac{1}{3}$ deel van 100;
– 16, dat is zo goed herhaald te delen door 2;
– 16, dat is iets minder dan $\frac{1}{6}$ deel van 100;
– enzovoort.

Het verdient aanbeveling met leerlingen na te gaan welke bijzondere getallen zij kennen en waarom deze zo bijzonder zijn. Als leerlingen op die manier een netwerk van bijzondere getallen opbouwen, zal blijken dat relaties uit dit netwerk op allerlei plekken bruikbaar zijn. Bijvoorbeeld in een situatie dat 25 procent korting is gegeven. Als we 25 herkennen als $\frac{1}{4}$ deel van 100, is snel duidelijk dat $\frac{3}{4}$ deel van de prijs moet worden betaald.

Het inzetten van dergelijke relaties helpt ook in de volgende gevallen:
– Wat kost 0,329 kg als een kilo € 0,60 kost?
  0,329 is ongeveer $\frac{1}{3}$, dus 60 moet worden gedeeld door 3. Het kost dus ongeveer € 0,20.
– Wat is 35 : 2,37?
  We gaan afpassen. 2,37 is ongeveer $2\frac{1}{2}$ en $4 \times 2\frac{1}{2} = 10$.
  Iedere keer dat we 10 op 35 afpassen, staat voor $4 \times 2{,}37$. 10 kan $3\frac{1}{2}$ keer van 35 af en dus is het antwoord ongeveer $4 \times 3\frac{1}{2} = 13$.

Hiervoor noemden we getalrelaties voor gehele getallen. Ook relaties tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen vinden uiteindelijk een plek in het relatienet. Het gaat daarbij om relaties tussen eenvoudige breuken en kommagetallen, zoals $\frac{1}{4}$ = 0,25 en hun vertaling naar gehele getallen en procenten: 4 × 25 = 100, 4 × 2 $\frac{1}{2}$ = 10 en $\frac{1}{4}$ = 25 procent. Daarnaast moet er, met het oog op breuken en verhoudingen bijvoorbeeld ook aandacht zijn voor veelvouden van 12, omdat die goed deelbaar zijn door 2, 3, 4 en 6.

Aan de slag met een rijk probleem

Rijke reken-wiskundige problemen vormen een ingang om leerlingen samenhang te laten ervaren.

In het onderwijs laten we leerlingen kennismaken met de samenhang tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen door hen de ontstaansgeschiedenis van deze wiskundige uitvindingen als het ware te laten beleven. Samenhang komt ook naar voren als leerlingen in situaties worden gebracht waarin de verschillende vormen naast elkaar staan. Het gaat daarbij om lessen rond rijke en meer complexe problemen. In het kader vindt u een voorbeeld van een dergelijke les, waarbij de vraag is hoeveel benzine er in de tank past en hoeveel het kost om de tank te vullen (zie pagina 32).

Omdat er sprake is van een benzinetank ligt het schematisch weergeven van de situatie in een strook voor de hand. Deze strook lokt vervolgens het denken in breuken en verhoudingen uit. De prijs per liter, wat eigenlijk een verhoudingsgetal is, maakt dat dit verhoudingsgewijs denken moet worden toegepast bij het globaal of precies rekenen met kommagetallen. Een verhoudingstabel ondersteunt het rekenwerk. Zo komen verschillende oplossingen naar voren, globale en meer precieze aanpakken. Deze oplossingen maken het mogelijk om verschillende benaderingswijzen met elkaar in verband te brengen, waardoor voor de leerlingen stukje bij beetje duidelijk wordt dat de keuze voor het redeneren in breuken of verhoudingen tot op zekere hoogte arbitrair is: het hangt ervan af hoe je tegen het probleem aankijkt.

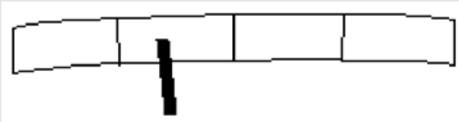
De blikwisselingen maken het nodig getalrelaties in te zetten. Met andere woorden, de leerlingen kijken op een handige manier naar de getallen in het aan te pakken probleem. Bij het berekenen van het bedrag voor de benzine gaat het bijvoorbeeld om het zien of herkennen van de volgende relaties:

– De helft van 60 is 30 en een kwart 15.
– 1,299 is ongeveer 1,30 of 1,3.
– 1,30 is ongeveer 1 $\frac{1}{3}$.
– 10 keer 1,30 is 13 (of meer algemeen: vermenigvuldigen met 10 maakt van de eenheden tientallen).
– 38 kan worden samengesteld uit 30 en 8; en ‘8 ×’ kan worden bereikt via ‘2 ×’.

Afsluiting

In dit hoofdstuk bepleitten we het belang van het werken aan samenhang tussen het leren van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Daarvoor brachten we verschillende argumenten naar voren. Het belangrijkste argument was dat de historie laat zien dat er een reden was om verschillende notatiewijzen te ontwikkelen, omdat nieuwe situaties hierom vroegen.

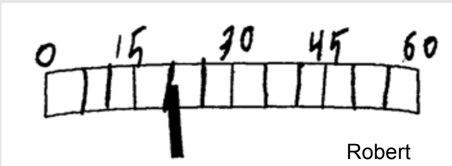
Benzinemeter



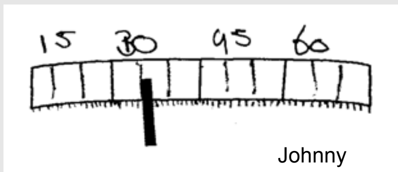
Benzine
super euroloodvrij
€ 1,299 per liter

De leerkracht introduceert de context. De leerlingen krijgen een werkblad voor zich met alleen de benzinemeter en het bord er op. De leerkracht vraagt wat de plaatjes kunnen betekenen. Sam zegt direct dat het een benzinemeter is. Job: ‘Het is een benzinetank.’ Hij legt uit dat hij ook naar het plaatje ernaast kijkt, want daar staat een bord van een benzinestation. Johnny legt uit hoe de benzinemeter werkt: als er benzine uit gaat, gaat het streepje naar links. Sam weet waarom een benzinemeter belangrijk is, want als je zo maar rijden gaat, weet je niet wanneer de tank bijna leeg is. Zo komt het gesprek op de inhoud van de tank. Ook daar weet Job wel wat van. Volgens hem gaat er 60 liter in zo’n tank.
Het bord van het tankstation wordt besproken. Iedereen is het er over eens dat je 1,299 kunt afronden tot € 1,30.

Uiteindelijk formuleren de leerlingen zelf het probleem: hoeveel moet er nog in de tank en hoeveel kost dat? De eerste vraag wordt schattend beantwoord. Ieder stukje staat voor 15 liter en dus zit er nog ruim 20 liter in de tank en moet er nog 40 liter bij. Ook bij de vraag hoeveel het kost wordt eerst geschat: 40 moet ongeveer $1\frac{1}{3}$ keer worden genomen en dat is ongeveer 52 euro. Als de leerkracht een preciezer antwoord wil op de eerste vraag, gaan leerlingen de benzinemeterstrook verder onderverdelen. Robert deelt de stukjes van de strook in drieën. Johnny doet dat ook, en probeert dan nog verder te verfijnen om heel precies te kunnen rekenen.

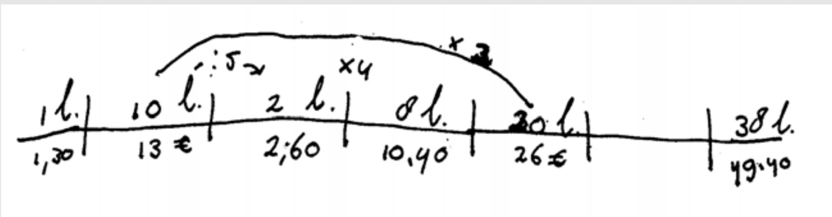


Robert



Johnny

In het gesprek met de leerkracht komt naar voren dat je de prijs van de benzine het best kunt bepalen door een verhoudingstabel te maken. Dat doen de leerlingen en ze komen zo allemaal uit op ruim € 49 voor de benzine.



Als we leerlingen willen laten redeneren, moeten zij een dergelijk proces ook zelf hebben doorgemaakt.
Een ander argument is dat het in dagelijkse situaties vaak zinvol is om de overstap te maken tussen de ene notatievorm en de andere. En daarnaast is het ook van belang dat leerlingen meer abstracte relaties tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen verkennen, omdat dit helpt bij het doorzien van de getallen als wiskundige objecten.

We bespraken verschillende manieren om het werken aan samenhang vorm te geven in het onderwijs. Zo kunnen we contexten zó kiezen dat leerlingen de ontstaansgeschiedenis van een notatiewijze als het ware herbeleven. Een van de elementen daarbij is de notie van het standaardiseren via op honderd stellen, of via verfijnen in stappen van tien. Op het geleid heruitvinden als basis voor het leren en onderwijzen van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen gaan we in hoofdstuk 3 verder in.

We kiezen in onze beschrijving van de kerninzichten in het volgende hoofdstuk voor twee modellen: de strook en de (dubbele) getallenlijn. Deze modellen vormen een middel om getalrelaties te representeren en dragen zo bij aan de samenhang.

Het werken aan deze getalrelaties vraagt overigens om interactie een centrale plaats te geven in het onderwijs. In dit gesprek met de leerlingen komt naar voren dat er in veel gevallen schattend en globaal kan worden gerekend, wat ook de samenhang toont, omdat daarbij een kommagetal als 0,243 bijvoorbeeld wordt afgerond tot 0,25 ofwel tot $\frac{1}{4}$. Mogelijkheden om te komen tot een dergelijk onderwijsaanbod zijn ondermeer gelegen in het op het programma zetten van rijke reken-wiskundige problemen. Het probleem waarbij de prijs voor het vullen van een autotank moet worden berekend vormt een dergelijke situatie.

Hoofdstuk 3 - Kerninzichten

Inleiding

Het onderwijs zou zich moeten richten op kerninzichten waarbij het vooral gaat om de betekenis van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen.

Een kwart van de bevolking wordt in beschrijvingen nogal eens aangeduid met $\frac{1}{4}$ deel of 25 procent. Ook kiest men wel voor een verhoudingsgewijze aanduiding, zoals '1 op de 4 mensen kiest voor ...'. Op deze manier worden breuken en kommagetallen ook naast elkaar gebruikt bij het meten. Een kwart liter wordt aangegeven als $\frac{1}{4}$ liter, 0,25 liter of 25 centiliter. We gaven in hoofdstuk 2 al aan dat er een breed scala aan wiskundige beschrijvingswijzen voor dit type situaties is, waarin breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen een rol spelen. En bij al die wiskundige beschrijvingen horen specifieke regels en procedures.

Wanneer we ervoor kiezen dat leerlingen al deze procedures moeten leren en in allerlei praktische situaties moeten leren toepassen, leidt dit er algauw toe dat zij allerhande regeltjes en procedures door elkaar gaan halen en fouten maken bij het toepassen van deze kennis. Bovendien vraagt het leren van deze rekenregels behoorlijk wat oefening en de ervaring leert dat wanneer het oefenen stopt, de aangebrachte kennis ook snel weer wegzakt. Dit is een probleem dat met name in het voortgezet onderwijs de kop opsteekt, omdat daar niet zo intensief getraind kan worden als in het basisonderwijs.

Al met al lijkt het programma voor breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen gewoon te omvattend en complex voor het gros van de leerlingen. Wij stellen hier dan ook een simpeler, minder omvattend programma voor. Een dergelijk programma zou gericht moeten zijn op het leren doorzien van onderliggende principes. We verleggen daarom het accent van kunnen (uitvoeren van procedures) naar begrijpen (van wat het betekent). We spreken in dit verband van kerninzichten; inzichten die de kern vormen van wat leerlingen moeten leren begrijpen. Kerninzichten geven aan waar we het leren van leerlingen vooral op moeten richten, namelijk op de betekenis van situaties waarin breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen naar voren komen. In dit hoofdstuk proberen we vast te stellen welke kerninzichten dit voor respectievelijk breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen zijn.

Kerninzichten bij breuken

Leerlingen moeten breuken leren zien als relatieve getallen, omdat het altijd gaat om het zoveelste deel van iets. Ze moeten verder inzien dat breuken voortkomen uit deelsituaties, maar dat ze ook kunnen voortkomen uit meetsituaties en uit een behoefte aan een fijnere maat.

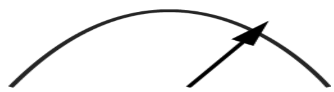
In hoofdstuk 1 bespraken we het relatieve karakter van breuken. Breuken zijn in contexten eigenlijk altijd relatief in de zin dat ze naar objecten of hoeveelheden verwijzen. Zo heeft de breuk $\frac{3}{4}$ in het eerdergenoemde voorbeeld van de benzinetank een dubbele betekenis, daar $\frac{3}{4}$ verwijst naar 30 van de 40 liter benzine. Maar ook in eenvoudiger gevallen zijn breuken relatief. Een breuk als $\frac{1}{4}$ staat in contexten altijd voor $\frac{1}{4}$ van iets; het staat voor $\frac{1}{4}$ reep, $\frac{1}{4}$ pizza of $\frac{1}{4}$ meter. We spreken in dit verband daarom van benoemde getallen.
In hetzelfde hoofdstuk stelden we dat leerlingen de relaties tussen verschillende breuken eerst moeten verkennen in contexten, waar de breuken het karakter hebben van benoemde getallen, voordat ze met kale breuken aan de slag gaan. We spraken in dit verband van het opbouwen van een relatienet dat de basis legt voor de vorming van breuken als wiskundige objecten. In het laatste geval ontleent een breuk als $\frac{3}{4}$ zijn betekenis aan allerlei getalrelaties waar de leerling $\frac{3}{4}$ mee associeert, zoals $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$ en dergelijke.

De overstap van benoemde naar onbenoemde breuken is pas zinvol als leerlingen zich voldoende hebben kunnen oriënteren op de betekenis ervan. We denken dat er in het onderwijs niet altijd voldoende tijd wordt genomen voor deze oriëntatie en dat de sprong naar breuken als wiskundige objecten te snel wordt genomen. Dat wil zeggen dat deze gemaakt wordt voordat de leerlingen daar werkelijk aan toe zijn en voordat zij zelf een netwerk aan relaties tussen breuken hebben kunnen vormen.
Dit plaatst ons echter voor een probleem. Namelijk, hoe zorg je voor een balans tussen het werken met breuken als benoemde getallen (in context) en als absolute getallen (kale breuken). We kiezen ervoor te beginnen bij breuken als benoemde getallen en zorgen er vervolgens voor dat leerlingen binnen contexten getalrelaties ontwikkelen die hen in staat stelt breuken tot wiskundige objecten te maken, omdat zij alleen dan op een zinvolle manier leren rekenen met kale breuken. Dit neemt niet weg dat we ook niet te lang moeten blijven stilstaan bij dit contextniveau, want dan komen leerlingen nooit tot het werken met kale breuken. We stellen daarbij voor het beoogde netwerk van getalrelaties geleidelijk op te bouwen, door te beginnen met eenvoudige breuken.

Strook en getallenlijn als model
Breuken die leerlingen aanvankelijk tegenkomen beschrijven, zoals gezegd, altijd een deel van iets; het zijn relatieve getallen. Hierbij kunnen we grofweg twee situaties onderscheiden, namelijk meet- en deelsituaties. Breuken komen bijvoorbeeld op een natuurlijke wijze voort uit de behoefte aan een fijnere maat. Als alternatief voor beker, kopje, eetlepel en theelepeltje - waartussen geen mooie verbanden bestaan - is het handiger te kiezen voor liter, halve liter, kwart liter en achtste liter, maten die we nog altijd tegenkomen bij bijvoorbeeld zuivelproducten.

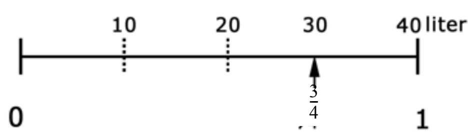
Bij delen kunnen breuken ontstaan bij het beschrijven van het *deelresultaat*, maar ook in het beschrijven van de deelsituatie. Het verdelen van zes pizza's met acht personen is zo'n *deelsituatie*. Wat ieder krijgt, '$\frac{3}{4}$ pizza', is het resultaat van het verdelen. En in deze situatie is feitelijk sprake van meten, al verschijnt dit in een min of meer verborgen vorm, namelijk wanneer we 'pizza' opvatten als maat.

Wanneer we begrijpen wat $\frac{1}{4}$ pizza betekent als verdeelresultaat, dan krijgt daardoor 'een vierde deel van de bevolking', waar we dit hoofdstuk mee begonnen, ook een betekenis. Op de achtergrond speelt hier echter ook een verhouding tussen aantallen. $\frac{1}{4}$ beschrijft hier een verhouding van 1 op de 4, en daarmee ook de verhouding tussen het totaal aantal van zestien miljoen en het aantal van 4 miljoen mensen waar het hier over gaat. In dit soort contexten hebben breuken een dubbele betekenis; enerzijds beschrijft de breuk een deel van het geheel ($\frac{1}{4}$ deel) en anderzijds beschrijft de breuk ook de verhouding tussen twee aantallen, 4 miljoen en 16 miljoen (1 op de 4). Deze dubbele betekenis komt in tal van visuele representaties fraai naar voren, zoals schaallijnen en meters bij de benzinemeter van een auto (fig. 1).



figuur 1: benzinemeter

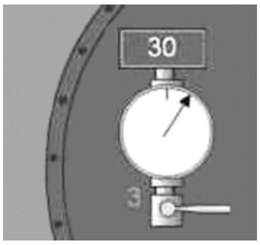
Bij een tank van 40 liter die voor driekwart vol is, geeft de meter zowel aan dat de tank voor driekwart vol is als dat er nog zo'n 30 liter in de tank zit. We kunnen dit mooi tot uitdrukking brengen met een dubbele getallenlijn of strook (fig. 2).



figuur 2: dubbele getallenlijn

Hier vindt feitelijk een omkering plaats ten opzichte van de vorige situatie. Daar werd de breuk gebruikt om een gegeven verdeling te beschrijven, '4 miljoen van de 16 miljoen' ofwel '4.000.000 van de 16.000.000 is $\frac{1}{4}$'. Nu gaat het erom om op basis van de waargenomen deel-geheel relatie ($\frac{3}{4}$ deel) te bepalen hoe groot dit deel is. We spreken hier ook wel van de *breuk als operator,* die opereert op de 40 liter: '$\frac{3}{4}$ *deel van* 40 liter is 30 liter'.

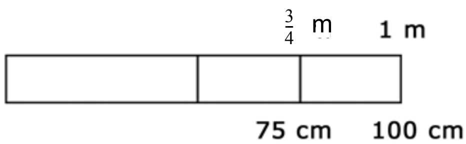
Dit koppelen van breuken aan verhoudingen kan worden geoefend met computerprogrammaatjes, zoals 'De wolkentrein', waar impliciet ook sprake is van een (dubbele) getallenlijn.[1] Door aan een hendel te 'trekken' kunnen de leerlingen de meter op de gevraagde instelling zetten. Bij de opdracht in figuur 3 moet de meter op 3 worden gezet. Omdat een vol rondje hier voor 30 staat, gaat het bij deze opdracht om de verhouding '3 van de 30' te relateren aan het opdelen van de cirkelomtrek. Dit kan via globaal redeneren, waarbij de (gedachte) positie van 15 halverwege als uitgangspunt dient. Het kan ook door gebruik te maken van de breuk $\frac{1}{10}$ – '3 is $\frac{1}{10}$ deel van 30', en daar moet dus de pijl staan. Hierbij beschouwen we de cirkelomtrek als getallenlijn en zien we dat op deze manier naast de indeling van 0 tot 30 ook een indeling in tienden ontstaat.



figuur 3: de wolkentrein; zet de meter op 3

Het interessante is nu dat we via het meten op een vergelijkbare dubbele strook of dubbele getallenlijn uitkomen, namelijk wanneer we verschillende maten met elkaar vergelijken. Neem bijvoorbeeld de overbekende meetlat van een meter, zoals die in vrijwel ieder klaslokaal te vinden is. De lat zelf is één meter, maar je kunt ook centimeters en decimeters aflezen. Als je nu iets van $\frac{3}{4}$ meter opmeet, kun je direct aflezen dat dit 75 cm is.

Zonder deze meetlat kunnen leerlingen dit ook beredeneren. In hoofdstuk 2 lieten we al zien dat dit het redeneren goed kan ondersteunen wanneer leerlingen zich realiseren dat 75 drie keer 25 is en 100 vier keer 25 (fig. 4).



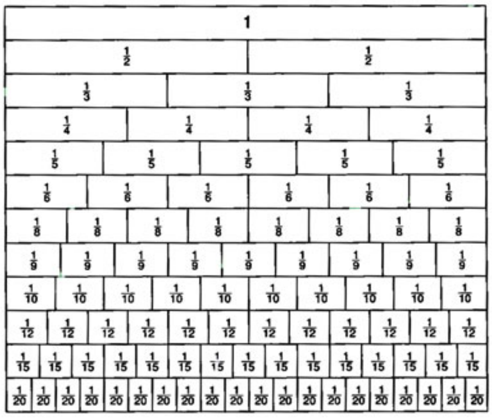
figuur 4: de dubbele strook ondersteunt het redeneren

Op weg naar een zelfstandige betekenis

Het meten biedt een natuurlijke context voor het ontwikkelen van breuken, omdat met breuken aan een natuurlijke behoefte aan maatverfijning tegemoet wordt gekomen. Wanneer leerlingen zelf een meetstrookje moeten verfijnen, blijkt het vouwen van een halve strook voor de hand te liggen. Daarna wordt gemakkelijk verder verfijnd tot een kwart, en vervolgens tot een achtste en een zestiende. Leerlingen zien op een gegeven ogenblik dat dit herhaald halveren niet altijd even effectief is, en kiezen dan ook voor andere indelingen. De beschrijvingen in termen van breuken die zo in eerste instantie uit het meten voortkomen, zijn praktische beschrijvingen van de grootte van het deel dat je wilt benoemen. Deze beschrijvingen liggen daarom aanvankelijk nog heel dicht tegen het handelen aan: één vijfde is dat deel dat je bij delen door vijf krijgt. Pas later krijgt deze beschrijving het karakter van een zelfstandig getal. Dit zien we bijvoorbeeld gebeuren bij de tijdsmaat een kwartier. Dit 'getal' heeft een zelfstandige betekenis en we hoeven het niet telkens opnieuw als een vierde deel van een uur te construeren. Als we regelmatig $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{8}$ liter slagroom kopen gebeurt er iets dergelijks. We kennen dit als een bepaalde hoeveelheid, en wanneer we $\frac{1}{4}$ liter en 1 liter aan elkaar relateren, gebeurt dit niet meer via het verdelen maar via de verhouding. Bij $\frac{1}{4}$ liter denken we niet aan het in vieren delen van een liter, maar we realiseren ons wel dat $\frac{1}{4}$ liter vier keer in één liter past. Wanneer een nieuwe maat is ontstaan kunnen we deze ook gaan afpassen en tellen, en dit maakt het mogelijk de breukentaal uit te breiden door het introduceren van breuken met tellers ongelijk aan één. Deze nieuwe breuken beschrijven dan ook het aantal keren dat is afgepast.

In hoofdstuk 2 zagen we dat uit de geschiedenis blijkt dat dit geen vanzelfsprekende stap is. Het gaat immers niet om het uitbreiden van een procedure van 'delen' naar 'delen en vermenigvuldigen'. Er zit een stap tussen, 'een-zoveelste-deel' moet eerst het karakter krijgen van een zelfstandige maat die losstaat van de handeling van het (ver)delen.

Beredeneren van gelijknamigheid van breuken
Met de introductie van tellers ongelijk aan één wordt de weg geopend voor het verkennen van de gelijknamige breuken. Hier kunnen stroken en getallenlijnen weer ondersteuning bieden. Maar ook hier loert weer het gevaar dat 'aflezen' in de plaats komt van 'redeneren'. Dit laatste gevaar dreigt bijvoorbeeld bij het gebruik van de zogeheten breukenkast (fig. 5) en vergelijkbare materialen die het aflezen of handelen zonder redeneren stimuleren.



figuur 5: de breukenkast

Door goed te kijken naar de breukenkast kunnen leerlingen snel aflezen dat $\frac{2}{3}$ gelijk is aan $\frac{4}{6}$, maar dat betekent niet dat ze zich ook realiseren *waarom* $\frac{2}{3}$ gelijk is aan $\frac{4}{6}$. Het is bij het gebruik van dit materiaal ook vreemd om hiernaar te vragen. Je kunt het immers zo zien! Dit ligt anders als de leerling wordt gevraagd te bedenken hoe je een in zessen gedeelde strook zou kunnen maken. Die kun je bijvoorbeeld maken door eerst in drieën te delen en vervolgens ieder deel in tweeën. Ook kun je het eerst in tweeën en vervolgens ieder stuk in drieën delen. Zo'n soort redenering kun je volgen voor alle andere indelingen waar het aantal te maken stukjes door twee of meer getallen deelbaar is.

Ook hier speelt de spanning tussen breuken als benoemde en kale getallen. Leerlingen zeggen dat $\frac{2}{3}$ gelijk is aan $\frac{4}{6}$, maar wat ze feitelijk constateren is dat $\frac{2}{3}$ van de strook gelijk is aan $\frac{4}{6}$ van eenzelfde strook. Als er wordt afgelezen gaan ze daarbij uit van de empirie; de papieren stroken zijn even lang. Als de relatie wordt beredeneerd, gaat het bij $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ om een getalrelatie en niet om een empirische gelijkheid.

Telkens kiezen we expliciet voor het redeneren door leerlingen. Dit betekent dat we de opgaven voor leerlingen ook anders willen inrichten. We lichten dit toe aan de hand van het voorbeeld in het kader op pagina 42.

Wanneer de leerlingen puur empirisch bezig zijn, lossen ze problemen telkens op door strookjes naast of over elkaar te leggen. Dan kan het antwoord '$\frac{5}{6}$' bij de som '$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$' misschien met enige moeite worden gevonden. Maar het manipuleren met stroken kan ook leiden tot het antwoord $\frac{9}{11}$ of nog andere breuken. Dat is niet erg wanneer we dit als aanleiding gebruiken om een gesprek met de leerlingen te beginnen. Dan vragen we ze wat het goede antwoord zou kunnen zijn en hoe je dit kunt bedenken. Op dat moment wordt het redeneren losgemaakt van het handelen en aflezen, en beginnen de leerlingen te denken in termen van breukrelaties.

Bij het verkennen van relaties tussen ongelijknamige breuken zal op een bepaald ogenblik ook het vergelijken van breuken aan de orde komen. We vragen de leerlingen bijvoorbeeld de breuken $\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{2}$ te vergelijken en - later - de breuken $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{8}$. De *strook als denkmodel* kan hier het denken goed ondersteunen. Als je de indeling bij het vergelijken van $\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{2}$ voor je ziet, dan deel je de strook in gedachten in vijf stukken, en kun je 'zien' dat dit leidt tot twee stukjes aan de ene en drie aan de andere kant. Die twee zijn samen minder dan de helft en dus is $\frac{2}{5}$ minder dan $\frac{1}{2}$.

Ook bij het vergelijken van $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{8}$ kan de strook een rol spelen als denkmodel. Het is daarbij gelijk een middel om elkaar te laten zien hoe gedacht is. Als we in gedachten van de $\frac{1}{3}$ drie stukjes maken, dan moeten we de rest van de strook ook op die manier indelen om te bedenken hoe die stukjes heten.
We concluderen dat $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ en dat dit kleiner is dan $\frac{3}{8}$, omdat de stukjes van $\frac{1}{9}$ kleiner zijn dan die van $\frac{1}{8}$.

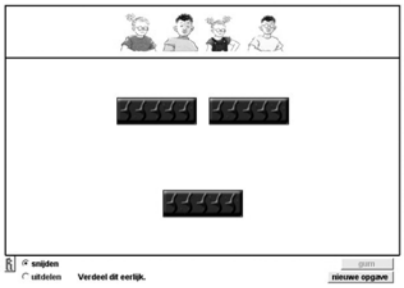
Bewerkingen met breuken

Leerlingen moeten breuken leren kennen als kale wiskundige objecten, waarbij de gelijknamigheid moet worden beredeneerd.

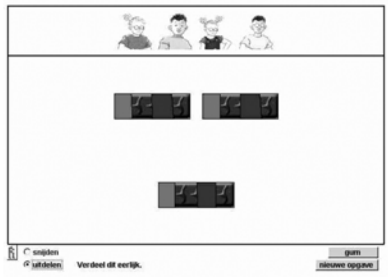
Het traditionele breukenonderwijs kan worden gekenschetst door de nadrukkelijke aandacht voor het inoefenen van procedures voor de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Wij betogen hier dat het goed zou zijn om de aandacht in eerste instantie minder op deze procedures te vestigen, maar ons meer te richten op het verwerven van getalrelaties door breuken in context te laten verkennen. Op deze wijze ontwikkelen kinderen een 'basisrelatienet' waarmee het begrip breuk stukje bij beetje als wiskundig object wordt ontwikkeld. In dit opzicht zien we het ontwikkelen van procedures voor de verschillende bewerkingen meer als een uitbreiding van dit relatienet en het bijbehorende begrip van breuk als wiskundig object.

Optellen en aftrekken

Het eerlijk verdelen vormt een context waarbij de leerlingen op een voor hen herkenbare manier wordt gevraagd breuken te construeren. Een dergelijke verdeelsituatie is bijvoorbeeld het delen van drie repen met vier kinderen. In figuur 6a en 6b is aangegeven hoe dit in het computerprogramma 'Eerlijk verdelen' is vormgegeven.
Wanneer leerlingen hier werkelijk gaan verdelen, kiezen ze er bijvoorbeeld voor om alle drie de repen in vieren te delen. Zo ontstaan twaalf stukjes van $\frac{1}{4}$. Ieder krijgt, bij uitdelen, drie keer zo'n stukje.



figuur 6a: eerlijk verdelen



figuur 6b: ieder krijgt 3 $\times \frac{1}{4}$

De deling kunnen we beschrijven als ‘3 : 4’. We zien verder dat het verdeelresultaat kan worden beschreven als: ‘$3 \times \frac{1}{4}$’ of als ‘$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$’ of als $\frac{3}{4}$. Wanneer de leerlingen bij het verdelen van de repen anders te werk gaan komen ook oplossingen naar voren als ‘$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$’of ‘$1 - \frac{1}{4}$’.

Vier objecten met z’n vijven delen geeft de volgende oplossingen:

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$1 - \frac{1}{5}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}$

Zes objecten met z’n achten delen leidt tot:

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 6 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Vijf objecten met z’n zessen delen geeft de volgende verdeelresultaten:

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$1 - \frac{1}{6}$

figuur 7: weetjes ontstaan uit verdelen

Het verkennen van de situatie waarbij vier kinderen drie repen verdelen, leidt al tot enkele weetjes rond relaties tussen breuken. Deze weetjes worden verder uitgebreid als bijvoorbeeld ook het verdelen van vier objecten met z’n vijven, vijf objecten met z’n zessen en zes met z’n achten, worden bekeken (fig. 7).

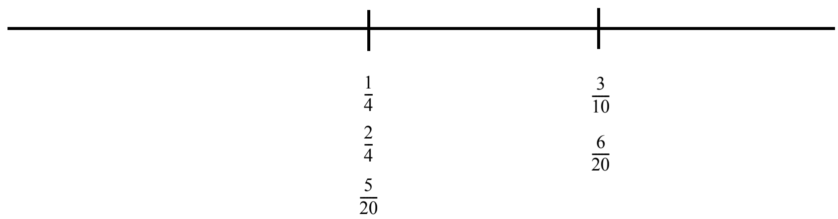
En zo ontwikkelen de leerlingen een lokaal relatienet dat ze in staat stelt flexibel te rekenen met eenvoudige breuken, zonder dat ze daar expliciete rekenregels of algoritmen voor nodig hebben. Daar hebben leerlingen lange tijd meer aan dan aan het gebruiken van algemeen geldende rekenregels. Die rekenregel is daarom pas veel later aan de orde. Dat neemt niet weg dat het verkennen van de gevonden getalrelaties wel de mogelijkheid biedt alvast wat aan algemene rekenregels te ‘ruiken’.

Dit kan bijvoorbeeld gebeuren wanneer leerlingen ontdekken dat ieder bij het verdelen van drie repen met z'n vieren net zoveel krijgt als bij het verdelen van zes repen met z'n achten.

De basis voor het rekenen met breuken wordt dus gevormd door het basisrelatienet. Vervolgens kan het optellen en aftrekken worden uitgebreid door gebruik te maken van beredeneerd gelijknamig maken. Sommige leerlingen zullen na verloop van tijd gaan doorzien dat de regel 'teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen' altijd opgaat. Wanneer ze zover zijn maken ze de overstap naar het algoritme. Daaraan voorafgaand kan het optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken aan de orde komen in opgaven die het karakter hebben van probleemsituaties, waarvoor nog geen standaard-oplossingsmethode bestaat. We grijpen daarbij terug op het meten met breukenstroken. We laten dit zien aan de hand van de som $\frac{3}{10} - \frac{1}{4}$.

De leerlingen zoeken naar een strook waarvan zowel $\frac{1}{4}$ als $\frac{3}{10}$ deel genomen kan worden. Dit vraagt hetzelfde soort redeneringen als in de les 'Breukenstroken maken' (zie kader op pagina 42). Leerlingen moeten op zoek gaan naar een manier om zowel $\frac{1}{4}$ als $\frac{3}{10}$ uit dezelfde strook te maken.
Aan de ene kant moet zo'n strook bestaan uit 4 of uit bijvoorbeeld 8, 12, 16 of 20 stukjes. De leerlingen herkennen hier wellicht de tafel van 4 en begrijpen dat deze rij zo ver kan worden voortgezet als nodig. Aan de andere kant, om $\frac{3}{10}$ te maken moet het strookje in 10 of bijvoorbeeld 20, 30, 40 of 50 stukjes gedeeld worden. Een in twintig stukjes gedeelde strook biedt dus uitkomst, want $\frac{1}{4}$ deel komt overeen met 5 stukjes van deze strook - ofwel met $\frac{5}{20}$ deel - en $\frac{3}{10}$ deel komt overeen met 6 stukjes - $\frac{6}{20}$ deel. Het verschil is dus $\frac{1}{20}$ deel, dus weten we dat $\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

Een vergelijkbare aanpak, maar op een formeler niveau, sluit aan bij het zoeken naar breuken die op dezelfde plaats op de getallenlijn staan (fig. 8). Hierbij zijn de indelingen van de stroken geabstraheerd, omdat ze niet meer nodig zijn om betekenis te geven aan de breuken. En als de gelijknamige breuken gevonden zijn, wordt al snel duidelijk dat het verschil $\frac{1}{20}$ is.



figuur 8: het verschil bepalen op de getallenlijn

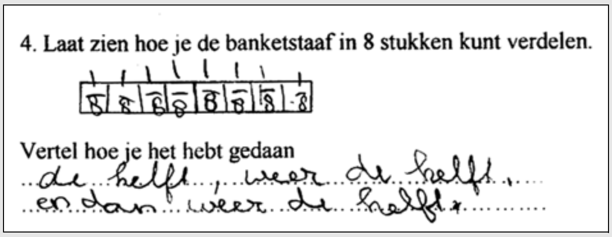
Het aan de orde stellen van een dergelijke formele aanpak heeft overigens alleen zin wanneer leerlingen voldoende thuis zijn in de breuken. En dan ligt voor een aantal van hen de rekenregel 'gelijknamig maken' voor het oprapen.

Maar ook als dit niet het geval is kunnen we sommen als $\frac{3}{10} - \frac{1}{4}$ best met de leerlingen bespreken. Deze opgave laat namelijk ook tal van informele en globale aanpakken toe.
Zo zullen enkele leerlingen bedenken dat $\frac{1}{4}$ ook gezien kan worden als $\frac{2\frac{1}{2}}{10}$.

Dat scheelt maar $\frac{\frac{1}{2}}{10}$ met $\frac{3}{10}$. Verder zal een schattende aanpak snel leiden tot de vaststelling dat $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{10}$ erg dichtbij elkaar liggen en dat het verschil daarom klein zal zijn.

Breukenstroken maken
Om leerlingen te laten nadenken over het gelijknamig maken van breuken, vragen we ze om zelf breukenstroken te maken. We gebruikten daarvoor een les over een bakker die banketstaven maakt en deze op verzoek van de klant voorsnijdt. Het idee hierachter is dat leerlingen moeten gaan nadenken over hoe je dat handig doet. Zo kun je een banketstaaf in zessen delen, door te bedenken dat je zesden krijgt door halven in drieën te delen of door eerst in drieën te delen en de stukjes van een derde te halveren. In de les wordt dan een overgang gemaakt van het handelen met stroken naar het beredeneren, waarmee allerlei gelijknamige breuken en breukrelaties door de leerlingen ontdekt worden.

Neem het volgende voorbeeld uit deze les: ‘Beschrijf hoe je een banketstaaf in twaalven zou verdelen.’ Een aantal leraren heeft met deze les geëxperimenteerd en meldt dat het een les vol ontdekkingen was.
Leerlingen doorzien dat $\frac{1}{8}$ kleiner is dan $\frac{1}{4}$, en ontdekken dat $\frac{8}{8}$ een hele staaf is (fig. 9). Ze ontdekken ook dat je bij $\frac{1}{15}$ eerst in drieën en daarna in vijven deelt of andersom. Ze zien dat het iets te maken heeft met tafels.



figuur 9: de eerste stappen op weg naar redeneren over gelijkwaardigheid

Het inzicht dat je bij $\frac{1}{15}$ eerst in drieën en daarna in vijven kunt delen vormt de basis voor de redenering dat $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$, omdat $\frac{1}{15}$ drie keer zo klein is als $\frac{1}{5}$. In het verlengde hiervan ligt het type redeneringen over gelijkwaardigheid die wij proberen uit te lokken, omdat leerlingen hier gekende getalrelaties inzetten en herkennen in het mentale indelen. Voorlopig hebben de leerlingen het echter over vijftien stukjes en niet over vijftienden.

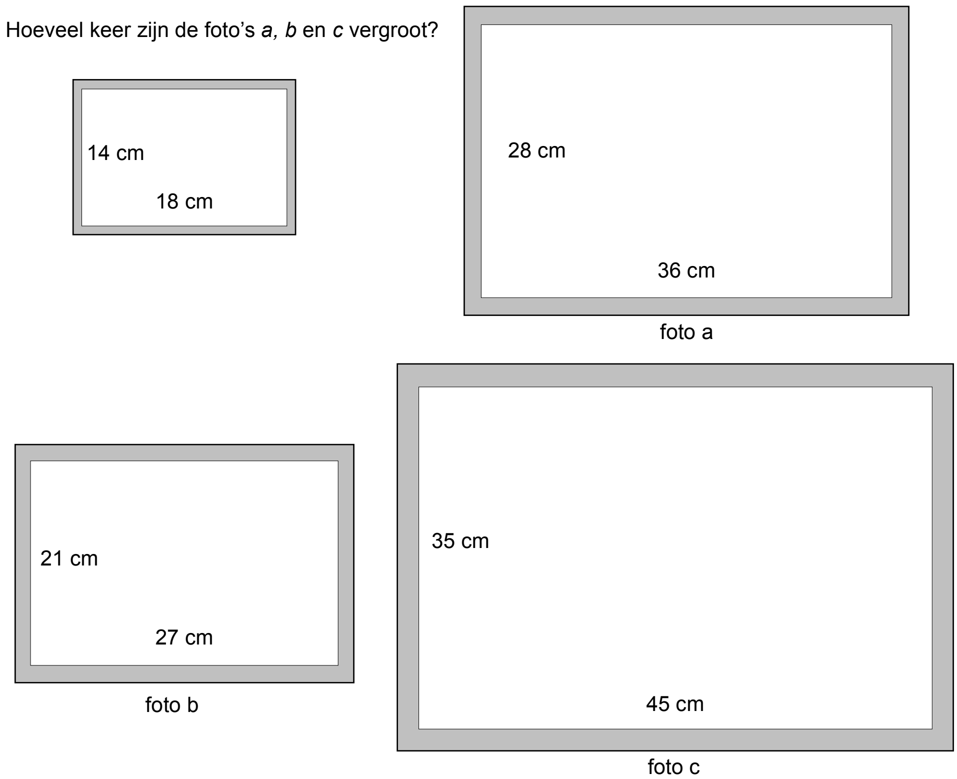
Vermenigvuldigen met breuken
In het algemeen geldt dat we slechts beperkt aandacht willen besteden aan het delen en vermenigvuldigen van breuken. Onzes inziens ligt de prioriteit wat dit betreft bij het rekenen met kommagetallen, waarbij breuken in kommagetallen kunnen worden omgezet. Dit laatste is een kerninzicht dat kan worden afgeleid uit de oorsprong van breuken als het resultaat van een verdeling.

Bij het vermenigvuldigen zijn er grofweg drie manieren om de vermenigvuldiging te interpreteren: als herhaald optellen, als deel van, of als (vergrotings)factor. Leerlingen zijn bekend met de bewerking vermenigvuldigen vanuit het rekenen met gehele getallen en kennen dit vooral als herhaald optellen. Deze betekenis van het vermenigvuldigen biedt soelaas bij situaties als ‘vier mensen eten ieder $\frac{3}{4}$ pizza’ en ‘een stapel van vier kisten van ieder $\frac{2}{3}$ meter hoog’. Het gaat hier om de sommen $4 \times \frac{3}{4}$ en $4 \times \frac{2}{3}$. Veel leerlingen zullen snel bedenken dat je in het eerste geval $\frac{12}{4}$ of 3 pizza’s krijgt en in het tweede geval $\frac{8}{3}$ meter. Het vermenigvuldigen is aanzienlijk moeilijker als we de volgorde van de factoren omdraaien. $\frac{2}{5} \times 5$ is moeilijk te interpreteren en dat geldt ook voor $\frac{2}{3} \times 4$. Het probleem hier is dat ‘$\frac{2}{5}$ κεερ’ moet worden geïnterpreteerd als ‘$\frac{2}{5}$ deel van’. Inzien dat

een deel van iets nemen op hetzelfde neerkomt als met $\frac{2}{5}$ vermenigvuldigen vormt in het algemeen een grote barrière. Het idee van vermenigvuldigen als herhaald optellen biedt hier onvoldoende soelaas. Daarbij komt dat leerlingen de ervaring hebben dat vermenigvuldigen altijd groter maakt, terwijl dit bij het vermenigvuldigen met breuken kleiner dan één niet het geval is.
Het vermenigvuldigen met een breuk vormt dus een aanzienlijk probleem. Er zijn evenwel voldoende momenten waarop deze problematiek aan de orde kan worden gesteld. Bijvoorbeeld:
- in de context van prijzen, wanneer je de berekening van 2 kilo à € 3,50 vergelijkt met die van $2\frac{1}{2}$ kilo à € 3,05;
- in de context van oppervlakteberekening, waar de lengte of de breedte gemengde getallen kunnen zijn;
- door de communitatieve eigenschap te bespreken $6 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 6$;
- in de context van kommagetallen en maatwisseling (zie figuur 13).
- door bij procentrekening de 1 procent procedure te koppelen aan het vermenigvuldigen met breuken, door bijvoorbeeld te vragen of je bij 17 procent van 265, de berekening $17 \times \frac{265}{100}$ kunt herschrijven als $\frac{17}{100} \times 265$.

Wanneer vermenigvuldigen gezien wordt als herhaald optellen, is de betekenis van '$\frac{1}{2}$ ×' niet vanzelfsprekend. We doen er dus goed aan het vermenigvuldigen als herhaald optellen uit te breiden naar gemengde getallen op basis van analogieredeneringen: $2\frac{1}{2}$ keer gaat net zo als twee keer.
We kiezen er ook voor om het concept vermenigvuldigen te verbreden door gebruik te maken van analogie. Een context die zich hiervoor leent is het vergroten en verkleinen. Dit inzicht in 'vermenigvuldigen als vergroten' is overigens een kwestie die al in eerdere leerjaren aan de orde zou kunnen komen.

Om verder betekenis te geven aan vermenigvuldigen zoals '$2\frac{2}{5} \times 6$', ontwikkelden we een les rondom het vergroten van foto's (fig. 10).



figuur 10: opgave uit de les 'Foto's vergroten'

Leerlingen worden hier uitgelokt om te redeneren in termen van 'twee keer zo groot', en op een gegeven moment bijvoorbeeld ook 'anderhalve keer zo groot'. Het vermenigvuldigen met een breuk krijgt betekenis als een vergrotingsfactor. Uiteindelijk wordt de situatie ook omgekeerd. Leerlingen mogen andere lijsten bedenken en gaan daarbij uit van een bepaalde vergrotingsfactor die ze zelf mogen kiezen. Vervolgens kan het verkleinen van een foto aan de orde komen en op deze manier betekenis kunnen geven aan vermenigvuldigingen als $\frac{1}{2} \times 20$, waar een van de factoren kleiner dan één is.

Delen met breuken
Bij het delen van breuken kunnen we verschillende wegen volgen waarbij de ene context zich meer zal lenen voor de ene aanpak en een andere voor een andere. In sommige contexten zal delen als *afpassen* een vanzelfsprekende aanpak bieden. In de uitwerking kan dit ook de vorm aannemen van 'opvermenigvuldigen', of net zolang herhaald optellen tot het deeltal is bereikt. Meer formeel kan er ook een directe relatie worden gelegd tussen delen en vermenigvuldigen. We proberen de deling dan op te lossen door naar de *bijpassende vermenigvuldiging* te zoeken. De derde manier is om de *deling op te vatten als een verhouding*. Ook deze inzichten in hoe je delingen kunt opvatten rekenen we tot de kerninzichten

Koffie schenken
In een koffiekan gaat $1\frac{1}{2}$ liter koffie. In een mok gaat $\frac{1}{4}$ liter. Hoeveel mokken koffie gaan er uit de koffiekan? In deze opgave is sprake van delen al zullen veel leerlingen zich dit niet realiseren. Ze gaan afpassen en schematiseren daarbij hun redeneringen wellicht in een soort verhoudingstabel. Er gaan dus zes mokken uit de koffiekan..

1 mok	$\frac{1}{4}$ liter
2 mokken	$\frac{1}{2}$ liter
4 mokken	1 liter
6 mokken	$1\frac{1}{2}$ liter

figuur 11

Leerlingen moeten bewustgemaakt worden dat ze hier aan het delen zijn. Daarvoor gebruiken we weer de analogie met gehele getallen. Daar is delen onder meer afpassen. Ook in figuur 11 is sprake van afpassen. Hier is sprake van de som $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$. De vraag is overigens of we het onderwijs wel moeten richten op het op deze wijze, via de verhoudingsdeling, herkennen van een formele deling in deze situatie. Wij pleiten ervoor om die weg in ieder geval voor leerlingen te openen, die hiertoe gemakkelijk in staat zijn (zie ook hoofdstuk 4). Een van de argumenten hiervoor is dat het onderwijs zich ook moet richten op het verwerven van de formele wiskunde als systeem. Verder is het herkennen van formele bewerkingen in situaties van belang wanneer de zakrekenmachine wordt gebruikt. Deze laat namelijk slechts formele bewerkingen toe. We kunnen als opstap naar het formele delen van breuken ook gebruikmaken van het gegeven dat het delen de inverse bewerking is van het delen.

Wanneer leerlingen 56 : 8 uitrekenen, refereren ze nogal eens aan hun kennis van de tafel van 8 en gaan op zoek naar het aantal keren dat 8 moet worden genomen om 56 te krijgen. Met andere woorden, ze vertalen de deling '56 : 8' in de stipsom '... × 8 = 56'. Iets dergelijks kunnen we doen bij de som $3 : \frac{2}{5}$. We zoeken

naar een antwoord op de stipsom '... × $\frac{2}{5}$ = 3'. Door handig proberen komen we snel aan een antwoord:
$5 \times \frac{2}{5} = 2$,
$6 \times \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$,
$7 \times \frac{2}{5} = 2\frac{4}{5}$,
$8 \times \frac{2}{5} = 3\frac{1}{5}$,
$7\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = 3$.
We merken op dat ook het gebruiken van vermenigvuldigen als inverse van delen niet tot een standaardaanpak leidt. Dat is in het algemeen ook niet nodig, maar we willen, zoals eerder aangegeven, deze weg voor enkele leerlingen expliciet openhouden.

We kiezen er daarom voor het delen betekenis te geven in de context van het eerlijk verdelen, als de beschrijving van een verhoudingssituatie. De som '4 : 5' kan dan worden geïnterpreteerd als 'vier dingen met z'n vijven delen'. Het denken in termen van verhoudingen maakt duidelijk dat dit gelijkwaardig is aan bijvoorbeeld '8 met z'n tienen' of 'twaalf met z'n vijftienen'. Op dezelfde manier kan de som '$\frac{1}{3} : \frac{4}{9}$' als een verhouding geïnterpreteerd worden: '$\frac{1}{3}$ met z'n $\frac{4}{9}$–en' is gelijkwaardig aan 'drie met z'n vieren' en dat laatste staat weer voor '3 : 4'. Bij het verkennen van het eerlijk verdelen ontstonden allerlei weetjes en zagen veel leerlingen dat 3 : 4 (drie verdelen met z'n vieren) leidde tot het verdeelresultaat $\frac{3}{4}$. Meer algemeen ontwikkelen leerlingen door deze situaties inzicht in de samenhang tussen delen en breuken. Deze kennis kan vervolgens voor sommige leerlingen ingezet worden bij het vinden van het kommagetal bij een bepaalde breuk. De breuk $\frac{3}{16}$ bijvoorbeeld, kan worden geïnterpreteerd als de deling 3 : 16, en de rekenmachine geeft aan dat het bijbehorende kommagetal 0,1875 is.

Kerninzichten bij kommagetallen

Voor kommagetallen gaat het om het kerninzicht dat het ook hier om een relatief getal gaat, waarbij de waarde afhangt van de maat (benoeming). Verder is hier een kerninzicht dat kommagetallen gebaseerd zijn op decimale verfijning.

Al vrij jong maken leerlingen kennis met kommagetallen in de vorm van geld en - vaak wat later - in de vorm van meetresultaten. Een geldbedrag als € 24,98 wordt door leerlingen in het algemeen gelezen als 24 euro en 98 cent. Het gaat voor hen in deze situatie om twee door een komma gescheiden getallen. Wanneer een eenvoudige inwisselregel voor centen wordt aangehouden - 100 centen maakt een euro - gaat het rekenen met geld in het algemeen goed. De prijs van twee cd's van € 24,98 kan zo worden uitgerekend door 48 euro en 196 cent te vertalen in 48 euro, nog een euro en 96 cent. De twee cd's kosten samen € 49,96.

Dat hier een probleem ligt zien we bijvoorbeeld als we leerlingen vragen 1,65 en 1,9 te vergelijken. Als kommagetallen gezien worden als twee getallen die gescheiden zijn door een komma, ligt de conclusie voor de hand dat 1,65 groter is; 65 is immers groter dan 9.

Meer algemeen leidt onvoldoende begrip van kommagetallen tot het betekenisloos hanteren van allerlei regeltjes, omdat onduidelijk is waarop deze zijn gebaseerd. Denk bijvoorbeeld aan het onder elkaar plaatsen van de komma's bij het optellen en aftrekken en het bepalen van het aantal cijfers achter de komma bij het vermenigvuldigen. Net als bij breuken zoeken we de oplossing in het betekenis geven en het redeneren.

Decimaal verfijnen
Leerlingen moeten de structuur van kommagetallen leren doorzien. Dit betekent dat zij zicht moeten krijgen op het systematisch verfijnen. We wezen in het voorgaande al op de verfijning in de gangbare inhoudsindeling, liter, halve liter, kwart liter. Leerlingen moeten ervaren dat het handig is om bij het systematisch verfij-

nen telkens voor dezelfde verfijning te kiezen. Bij de inhoudsindeling gaat het om herhaald halveren. Dit lijkt de meest voor de hand liggende systematische verfijning; leerlingen die met stroken meten kiezen daar vaak voor, en zoals we in hoofdstuk 2 zagen, ook de oude Egyptenaren. Bij kommagetallen wordt herhaald in tienen gedeeld; er wordt *decimaal verfijnd*.[2] Dit decimaal verfijnen is zowel de basis voor de kommagetallen, als voor het metrieke stelsel. Die keuze voor decimaal verfijnen boven halveren is uiteraard niet willekeurig. Het past mooi binnen ons tientallige positiestelsel dat inmiddels wereldwijd gebruikt wordt.

Meten, metriek, kommagetallen en het tientallig stelsel zijn dus nauw met elkaar verbonden. Dat is prachtig, omdat het meten daarmee het rekenen met kommagetallen ondersteunt, maar ook omdat kennis van het getalsysteem helpt om greep te krijgen op relaties tussen maten in het metrieke stelsel. Maar we moeten oppassen. Omdat dit soort dingen veel op elkaar lijken moeten we ervoor waken dat het geheel voor de leerlingen niet tot een grote brij wordt.

Leerlingen moeten overzicht houden over de veelheid aan getalrelaties en maten, en alle relaties daartussen. Een middel om dit te verwezenlijken kan gevonden worden in aandacht voor het feit waarom *kommagetallen zijn uitgevonden*. Dit betekent onder meer dat zij moeten leren doorzien dat het systematisch verfijnen een meerwaarde heeft. Dit betekent dat ze leren dat:
– je op deze manier onbeperkt kunt verfijnen, waarmee in principe onbeperkte precisie mogelijk is;
– deze situatie analoog is aan het werken met gehele getallen, waardoor rekenprocedures die voor gehele getallen zijn ontwikkeld ook bruikbaar zijn voor kommagetallen en waardoor het rekenen met gehele getallen en het rekenen met kommagetallen op een natuurlijke manier in elkaar overlopen.

Om leerlingen de structuur van kommagetallen te laten achterhalen ontwikkelden we de lessenserie ‘Een tiende van een tiende’. Uitgangspunt van deze lessenserie is het idee dat je metingen kunt verfijnen via herhaald delen door tien. In eerste instantie worden in de les de meetresultaten genoteerd met ‘gewone tiendelige breuken’, om aan de hand daarvan het verfijnen te bespreken (zie pagina 48).

Leerlingperspectief
Om te zien waar voor leerlingen moeilijkheden liggen als het gaat om zaken die voor ons vanzelfsprekend zijn, moeten we soms onze eigen kennis opzij zetten en de situatie proberen te beschouwen vanuit het standpunt van de leerlingen. Het is echter moeilijk om de eigen kennis ‘te vergeten’ en deze door de ogen van een leerling te bekijken. Bovendien maken de leerlingen het ons in dit opzicht niet al te makkelijk. Omdat ze zich in het algemeen door volwassenen laten leiden, kunnen mogelijke conceptuele barrières gemakkelijk verborgen blijven. Wanneer we de inbreng van leerlingen in het onderwijs echter vergroten, vergroten we ook de kans dat dit soort conceptuele barrières wel zichtbaar wordt.

In de hierboven genoemde lessenserie doen zich twee van dergelijke situaties voor. We zien dat het voor leerlingen helemaal niet vanzelfsprekend is om bij verfijnen te kiezen voor het delen door tien. Bovendien vinden ze het niet allemaal vanzelfsprekend om steeds dezelfde factor te gebruiken voor het verfijnen; wanneer je de eerste keer door tien hebt gedeeld kun je bij de volgende verfijning best door acht of twaalf delen. Dat gebeurde vroeger ook toen verschillende maten wel aan elkaar gerelateerd waren, maar zonder dat er telkens sprake was van een enkele verfijningsfactor.

De tweede situatie waar een barrière zichtbaar wordt, doet zich voor wanneer leerlingen 25 centimeter moeten uitdrukken in meters. Een aantal van hen komt niet spontaan op het idee om honderdsten te gaan gebruiken. In plaats daarvan geven ze oplossingen als ‘tweeëneenhalf tiende’. En hoewel een dergelijke een oplossing wel van het nodige inzicht getuigt, blijkt het uitbreiden van tienden naar honderdsten niet zo vanzelfsprekend als wij geneigd zijn te denken. En dat zou ook wel eens kunnen gelden voor de uitbreiding van twee naar drie decimalen.

In de in de voorbeeldles ‘Een tiende van een tiende’ geschetste benadering wordt gewerkt met *gewone tiendelige breuken*, dat wil zeggen met notaties als ‘twee stroken + $\frac{7}{10}$ strook’, en ‘$\frac{95}{100}$ strook’. Het voordeel van deze notatie is dat de ‘tienden’, ‘honderdsten’ en ‘duizendsten’ expliciet worden genoteerd. Bij kommagetallen gaat dit indirect, via de positie van de cijfers. Het koppelen van kommagetallen aan gewone tiendelige breuken biedt ook mogelijkheden voor het bepalen van de orde van grootte door gebruik te maken van referentiegetallen. Zo kan de koppeling van 0,72 aan $\frac{72}{100}$ verhelderen dat dit bijna $\frac{75}{100}$ is en dat is weer $\frac{3}{4}$, waarmee naar voren komt dat 0,72 ongeveer $\frac{3}{4}$ is. Op analoge wijze kan zo ook snel gezien worden dat 0,19 ongeveer gelijk is aan $\frac{20}{100}$ en dus ongeveer $\frac{1}{5}$ is.

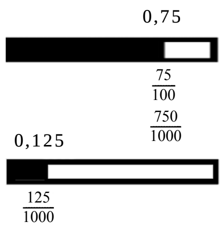
Ten slotte dient te worden opgemerkt dat kommagetallen, net als breuken in de praktijk, *relatieve getallen* zijn. Kommagetallen zijn immers *tiendelige breuken*. Maar er is ook een andere manier om het relatieve karakter zichtbaar te maken. De benoeming, die bij breuken kenmerkend is voor het relatieve karakter, is hier de maat die aan het getal is toegevoegd. Als van iets wordt aangegeven dat het 0,762 weegt, zegt dit getal feitelijk niets. Pas wanneer er ‘kilogram’ aan wordt toegevoegd, wordt het duidelijk.

Bewerkingen met kommagetallen

De analogie tussen rekenen met gehele getallen en met kommagetallen maakt dat rekenen met kommagetallen vaak als eenvoudiger wordt gezien dan rekenen met breuken. De leerlingen moeten de structuur van de kommagetallen dan wel goed doorzien. Onze keuze om het kerninzicht dat kommagetallen ontstaan door decimaal verfijnen centraal te stellen, is mede bepalend voor het leren rekenen met deze getallen.

Optellen en aftrekken met kommagetallen

Voor het optellen en aftrekken van kommagetallen willen we niet te snel overstappen naar het ‘onder elkaar zetten’. Uiteraard is het prima als er leerlingen zijn die deze methode met inzicht kunnen gebruiken. Maar inzichtelijker achten wij het rekenen via de ‘omweg’ van het metrieke stelsel en het gebruikmaken van maatwisseling, of door uit te gaan van inzicht in de structuur van kommagetallen. De som ‘0,75 + 0,125’ komt bijvoorbeeld voort uit het meten[3] van een lengte van 0,75 meter en daarachter een lengte van 0,125 meter. Via maatwisseling kunnen hier millimeters van worden gemaakt. 750 en 125 millimeter moet worden samengenomen. Dat geeft 875 millimeter. Het terugrekenen naar meters geeft 0,875 meter.
We kunnen hier overigens ook werken met gewone breuken. Die laten zich makkelijk naast de kommagetallen op een strook zetten. Wanneer we bij $\frac{75}{100}$ ook $\frac{750}{1000}$ plaatsen, ontstaat een optelling van $\frac{750}{1000}$ en $\frac{125}{1000}$ (fig. 12).



figuur 12: ‘0,75 + 0,125’ op twee stroken

En zo komen we tot $\frac{75}{100} + \frac{125}{1000} = \frac{875}{1000} = 0{,}875$.

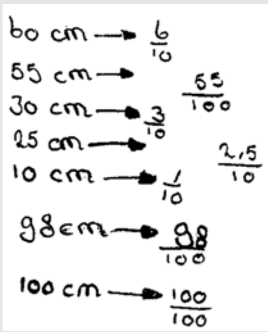
Lessenserie 'Een tiende van een tiende'

De leerkracht begint de eerste les met: 'Hoe zou men vroeger land opgemeten hebben?' De leerlingen worden teruggeplaatst in de tijd dat er nog geen metriek stelsel was. De leerkracht suggereert dat de leerlingen alleen de meter als maat hebben en vraagt hen hoe het meten dan gaat. De leerlingen stellen voor stukken ijzerdraad van een meter te gebruiken; in de klas meten ze met stukjes touw van een meter. De tafels blijken bijna twee keer een touwtje te zijn; 1 touwtje plus $\frac{4}{5}$ touwtje. Een van de leerlingen introduceert de omschrijving '$1\frac{4}{5}$ touwlengte'. De lerares vraagt haar hoe je met zo'n touwtje preciezer kunt meten. De leerlingen komen met suggesties als in vieren, in zessen, in vijven, in achten, in tienden of in twaalfden, en er wordt gediscussieerd over de handigheid of onhandigheid van de verschillende opties. Zo kan handig in achten gedeeld worden door herhaald halveren, en biedt in twaalfden delen tal van mogelijkheden voor verdere onderverdelingen. Ten slotte vertelt de lerares dat er in het verleden is gekozen voor een onderverdeling in tien stukjes.

Dan gaan de leerlingen aan het meten met stroken waar al een onderverdeling in tien stukjes op staat. Zo wordt een ansichtkaart opgemeten, die blijkt $\frac{1}{3}$ strook. Weer roept dit een discussie op rond de kwestie van de fijnere onderverdeling. En weer wordt de discussie afgesloten met de vaststelling dat in het verleden ook hier voor een onderverdeling in tienden wordt gekozen.

Daarna wordt de verbinding met meters en centimeters gelegd: de grote strook is 1 meter, de kleine 10 centimeter. In de klas wordt besproken hoe een dergelijk klein strookje verder kan worden onderverdeeld. Ook hier moet in tienen worden gedeeld, en de leerlingen zien snel dat een tiende van het kleine strookje $\frac{1}{100}$ meter is.

Dan mogen de leerlingen aan de slag met strookjes van 60 cm, 55 cm, 30 cm en 25 cm. Deze lengtes mogen worden uitgedrukt in 'strooklengtes' of 'touwlengtes'. Veel kinderen weten de strookjes van 60 en 30 centimeter te benoemen in termen van hele stroken of in termen van tienden. Het uitdrukken van de andere lengtes in strooklengtes vereist wat meer creativiteit. (fig. 13)



figuur 13: centimeters omzetten in gewone tiendelige breuken met een strook van 1 meter als maat

Tisse formuleert bij 25 centimeter: $\frac{2}{10}$ en $\frac{1}{2}$ tiende. Andere kinderen maken hier gebruik van de breuk $\frac{1}{20}$ als de helft van $\frac{1}{10}$. Ruben kiest nog een andere notatie. Volgens hem noteer je deze strooklengte als $\frac{2,5}{10}$.
Mathijs is een van de leerlingen die de overstap naar honderdsten meteen maakt en bij de strook van 25 centimeter uitkomt op $\frac{25}{100}$ van een strook. Hij licht daarbij toe hoe tien stukjes van een honderdste passen in $\frac{1}{10}$ strook.

Vermenigvuldigen met kommagetallen

Bij het vermenigvuldigen van kommagetallen spelen vergelijkbare moeilijkheden als bij de bewerking bij breuken. Een som als 5 × 0,132 is redelijk gemakkelijk te interpreteren als herhaalde optelling. Dat ligt anders als het kommagetal vooropstaat, zoals bij 0,132 × 5. Daar is veel moeilijker betekenis aan te geven, omdat de overheersende betekenis van vermenigvuldigen het herhaald samennemen van even grote porties is. Verder speelt hier ook dat de overheersende perceptie van vermenigvuldigen is dat dit groter maakt, en ook dat geldt niet wanneer wordt vermenigvuldigd met een kommagetal kleiner dan één.

In betekenisvolle contexten waar sprake is van vermenigvuldigen zijn leerlingen vaak in staat zinvolle antwoorden te formuleren. Het is voor hen echter niet altijd duidelijk dat het om vermenigvuldigen gaat. Dit doet zich bijvoorbeeld voor in de volgende situatie, die we eerder bespraken in hoofdstuk 1. De leerlingen krijgen de vraag om een redelijk precieze schatting te maken van de prijs van de appels (fig. 14).

figuur 14: wat is de prijs van de appels?

De leerlingen vinden allerlei aanpakken, maar zien in de situatie geen vermenigvuldiging (zie hoofdstuk 1). Dat is waarschijnlijk ook de reden dat ze niet in staat zijn de zakrekenmachine in te zetten om de te betalen prijs uit te rekenen.

Het is wellicht mogelijk leerlingen de bewerking vermenigvuldigen te leren zien door de context te vereenvoudigen. ‘Stof kost € 5,00 per strekkende meter. Hoeveel kost een stuk van 0,76 meter?’

figuur 15

Via maatwisseling kan de prijs per strekkende centimeter worden berekend. Een centimeter kost 5 cent of € 0,05 en dus kost 76 centimeter 76 × € 0,05, of 76 × 5 cent ((fig. 15).

Op deze manier zijn we uitgekomen op een bekend type vermenigvuldiging: ‘een geheel getal keer iets’. Dat roept de vraag op of het niet mogelijk is direct te vermenigvuldigen met behulp van de rekenmachine. Intoetsen van 76 × 0,05 levert 3,80 en dat gebeurt ook bij 0,76 × 5. Ook andere vermenigvuldigingen kunnen worden uitgeprobeerd en de leerlingen kunnen steeds nagaan wat het antwoord betekent. Zo verkennen ze met de hulp van de zakrekenmachine stukje bij beetje het gebied van de kommagetallen. Hiermee kunnen bijvoorbeeld relaties worden gevonden tussen het verkleinen van een van de factoren in een vermenigvuldiging met factor 10, 100, enzovoort, en het effect op het antwoord. Verder kan de context hier ook betekenis geven aan dit soort fenomenen. De zakrekenmachine wordt ook hier ingezet en daarom moet telkens de beweging gemaakt worden van context naar formele bewerking. Er moet dan duidelijk zijn geworden welke bewerking er onder ligt.

Delen met kommagetallen

Bij het delen met kommagetallen zijn er, net als bij breuken, drie benaderingen om de bewerking met gehele getallen uit te breiden naar kommagetallen. Het gaat hierbij om het afpassen, het beschouwen van het delen als de inverse van het vermenigvuldigen en het delen als verhouding. De som ‘2 : 0,25’ kan dan bij-

voorbeeld worden opgelost. Er wordt dan gekeken hoe vaak 0,25 uit 2 gaat. Een som als '0,45 : 0,15 kunnen we bijvoorbeeld oplossen door gebruik te maken van de inverse bewerking (vermenigvuldigen) en te zoeken naar het getal dat met 0,15 moet worden vermenigvuldigd om 0,45 te krijgen. Op deze manier wordt de som '... × 0,15 = 0,45'. Door proberen of gebruik te maken van de relatie tussen 15 en 45, komen we er snel achter dat het antwoord 3 is.
We kunnen echter de som '0,45 : 0,15' ook zien als een verhouding: '0,45 op de 0,15'. Deze benadering biedt de mogelijkheid om beide getallen met 100 te vermenigvuldigen, zodat de verhouding wordt aangegeven als '45 op de 15', of '45 met z'n vijftienen', als we aan de verdeelcontext denken. Dit leidt uiteindelijk tot de deling '45 : 15', waarin nog louter gehele getallen voorkomen.

Kerninzichten bij procenten

Procenten zijn ontstaan vanuit het 'op 100 stellen' en zijn dus standaardverhoudingen. Dit is een belangrijk kerninzicht bij procenten. Verder kunnen procenten als een breuk een deel-geheel relatie beschrijven. Ook hebben ze een relatief karakter en hebben altijd ergens betrekking op. Daarnaast is het goed ons te realiseren dat procenten een multiplicatief karakter hebben. Het nemen van een percentage kan worden vervangen door het vermenigvuldigen met een breuk of kommagetal. Omdat bij procenten alles in honderdsten wordt uitgedrukt, kunnen we ze ook beschouwen als standaardbreuken.
Het beschouwen van procenten als standaardverhoudingen leidt tot andere aanpakken dan het beschouwen van procenten als standaardbreuken.

Procenten als standaardbreuken
In het dagelijks leven worden veelal mooie ronde percentages gebruikt. Dat laat bijvoorbeeld het bericht in de 'Metro' (fig. 16).


CIJFER
80 procent van de Nederlanders weet hoeveel geld hij op zak heeft.

figuur 16: bericht uit 'Metro' (25 november 2004)

In dit soort gevallen worden procenten vaak gekoppeld aan eenvoudige breuken. Leerlingen leren dat 50 procent staat voor de helft, 25 procent voor een kwart en 75 procent voor driekwart. Soms wordt ervoor gekozen deze mooie ronde percentages en hun relaties met eenvoudige breuken te gebruiken als introductie op procenten. Het leren van procenten op school begint dan bij de kennis die de leerlingen in het dagelijks leven al over procenten hebben opgedaan. Vervolgens worden de genoemde relaties tussen eenvoudige breuken en procenten uitgebreid. De leerlingen leren dan bijvoorbeeld de gelijkwaardigheid van $33\frac{1}{3}$ procent en een derde en van 20 procent en een vijfde. Vervolgens komt 80 procent naar voren als $\frac{4}{5}$ deel. Het ligt voor de hand het onderwijs in procenten op deze manier te beginnen, want zo wordt aangesloten bij noties van leerlingen en ontstaat geen scheiding tussen de procenten op school en daarbuiten. Maar deze werkwijze heeft ook iets vreemds. Als we namelijk percentages alleen gebruiken in gevallen waarin ook breuken voldoen, is er eigenlijk geen noodzaak voor het gebruiken van procenten.

Waarom hebben breuken het in de loop van de geschiedenis af moeten leggen tegen procenten? De belangrijkste reden is dat procenten een vaste schaal bieden. Stel dat we geen procenten hadden, dan zouden we soms iets met kwarten beschrijven, soms met vijfden, en soms - als het preciezer moet - met twaalfden of twintigsten.
Al die verschillende breuken door elkaar is lastig. Je kunt bijvoorbeeld niet mak-

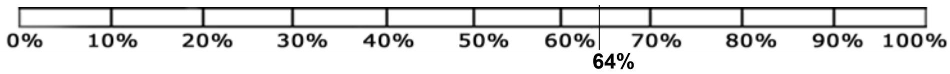
kelijk gegevens vergelijken. Bijvoorbeeld als de ene krant het heeft over $\frac{5}{12}$ en een andere over $\frac{2}{5}$, kunnen ze het dan over dezelfde gegevens hebben?

Procenten zijn een soort standaardbreuken. Door alles steeds in honderdsten uit te drukken maken we het mogelijk om gegevens in één oogopslag te vergelijken. Bovendien geven deze getallen een beter zicht op de relatieve orde van grootte dan wanneer het met breuken wordt uitgedrukt.
Daarbij is het natuurlijk geen toeval dat gekozen is voor een schaal van 0 tot 100, in plaats van bijvoorbeeld voor een schaal van 0 tot 25, want honderdsten passen bij ons systeem van de gehele getallen. We zouden natuurlijk ook alles kunnen uitdrukken in tienden, maar dat is een vrij grove schaal. De schaal van 0 tot 100 is ons heel vertrouwd, en precies genoeg voor dagelijks gebruik. Wanneer we nog nauwkeuriger willen zijn kunnen we overstappen naar duizendsten - wat ook past bij ons getalsysteem - via ‘promilles’ of door percentages te geven met cijfers achter de komma. Er is dus een goede reden om naast breuken ook nog procenten te gebruiken. Het lijkt ons belangrijk dat leerlingen zich dat ook realiseren.

Verder is het belangrijk om ronde percentages ook te leren kennen als breuken. De strook is daarbij in onze ogen een goed hulpmiddel. We zouden graag zien dat een in tien stukken gedeelde strook als een vaste referentie gaat functioneren (fig. 17).

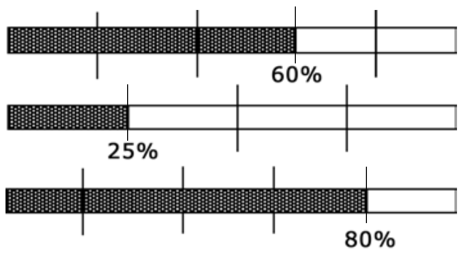
figuur 17: een in twee gedeelde strook als referentie

Door een percentage zoals 64 procent (in gedachten) op de strook te plaatsen, kun je zien om welk deel van het geheel het gaat (fig. 18).



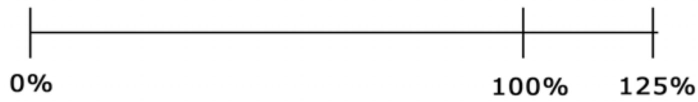
figuur 18: 64 procent strook

Vervolgens kunnen deze referentiepunten worden aangevuld met eenvoudige breuken als $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ of $1\frac{1}{2}$, die als percentages kunnen worden weergegeven. Als leerlingen een globale notie hebben van de grootte van een percentage, kan dat snel geplaatst worden. Door de relatie met breuken te gebruiken, kan nog een ander beeld van de percentage ontstaan (fig. 19). 60 Procent is ook $\frac{6}{10}$, of $\frac{3}{5}$, of je kunt ook denken aan 3×20 procent, en dan is 60 procent dus $\frac{3}{5}$. Vergelijkbare getalrelaties zouden ook moeten worden opgeroepen door andere handzame percentages, zoals bijvoorbeeld 25 of 80 procent.



figuur 19: redeneren vanuit ankerpunten

Voor percentages boven de 100 is de getallenlijn meer aangewezen om de situatie te beschrijven dan de strook (fig. 20). De strook staat namelijk altijd voor de eenheid en kan mogelijk dus verwarrend worden wanneer er nog een stukje strook om 125 procent af te beelden. Overigens kan de relatie met breuken hier ook helpen bij het schattend positioneren van het percentage op de getallenlijn en bij het zich realiseren dat er '$\frac{1}{4}$ bij' komt.



figuur 20: 125 procent op de getallenlijn afgebeeld

Procenten als standaardverhoudingen
Procenten zijn ook standaardverhoudingen. Ze bieden een vaste schaal om verhoudingen te vergelijken. Neem het volgende voorbeeld waar verschillende verhoudingen moeten worden vergeleken (fig. 21).

Welke reep is het zoetst?

	gewicht	hoeveel suiker
Happers reep	40 gram	12 gram
Crispy Choc reep	25 gram	5 gram
Graan-fruit biscuits	20 gram	8 gram

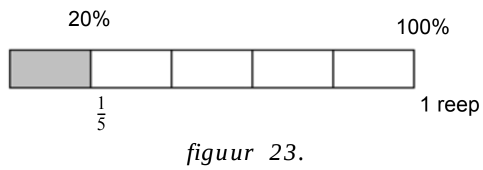
figuur 21: opgave uit de les 'Lekker zoet'

Door de drie verhoudingen 'op 100 te stellen', kunnen we zeggen welk percentage van de repen suiker is en wordt het dus makkelijker om ze te vergelijken (fig. 22). We kunnen vervolgens vaststellen dat Graan-fruit het zoetste is.

	gewicht	hoeveel suiker	percentage suiker
Happers reep	100 gram	30 gram	30%
Crispy Choc reep	100 gram	20 gram	20%
Graan-fruit biscuits	100 gram	40 gram	40%

figuur 22

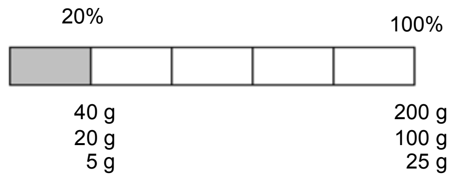
Wanneer procenten geïnterpreteerd worden als standaardbreuken, beschrijven ze een deel-geheel relatie. Neem het voorbeeld van de Crispy Choc (fig. 23): '20 procent van de reep is suiker'. Hier kan 20 procent worden geïnterpreteerd als het deel van de reep dat suiker is tegenover het geheel van ingrediënten. Hierbij past het volgende beeld.



figuur 23.

Bovendien kunnen procenten ook een verhouding beschrijven, ze zijn dan standaardverhoudingen. Bij de Crispy Choc zagen we dat 20 procent suiker was. Hier hadden we het over de verhouding tussen de hoeveelheid suiker en de hoeveelheid andere ingrediënten. '20 procent suiker' geeft dus hier bijvoorbeeld de volgende verhoudingen aan: 100 g Crispy Choc bevat 20 gram suiker, 200 gram Crispy Choc bevat 40 gram suiker, 25 gram Crispy Choc bevat 5 gram suiker,' enzovoort. Hierbij past het beeld zoals in figuur 24.

Procenten lenen zich voor twee vormen van verhoudingsgewijs redeneren. In de eerste plaats zijn procenten uitgevonden om verhoudingen te beschrijven. Zo staat 25 procent voor 25 op de 100, maar bijvoorbeeld ook voor 1 op de 4 of 150 op de 600. De gestandaardiseerde verhouding ‘op de honderd’ is ten slotte ingevoerd om deel-geheel verhoudingen waarvan de gehelen verschillend zijn met elkaar te vergelijken. We kunnen, door gebruik te maken van procenten, bijvoorbeeld nagaan dat 12 gram suiker in 40 gram Happers reep zoeter is dan 5 gram suiker in 25 gram Crispy Choc reep. In het ene geval is namelijk sprake van 30 procent suiker en in het andere van 20 procent.



figuur 24

In de tweede plaats bieden de procenten zelf een lineaire schaal. Zo is 40 procent twee keer zoveel als 20 procent en de helft van 80 procent. Terwijl de hoeveelheden die in een bepaald geval corresponderen met 20 en 40 procent samengeteld precies overeenkomen met 60 procent. Beide verhoudingsperspectieven lenen zich voor het berekenen van een percentage. De eerste manier van verhoudingsgewijs redeneren wordt hierboven gebruikt om het percentage suiker in de Happers reep te berekenen door de verhouding 12 op de 40 via de gelijkwaardige verhoudingen 24 op de 80 en 6 op de 20 te vervangen door 30 op de 100. Het tweede type verhoudingsgewijs redeneren kan worden gevolgd door te bedenken dat 10 procent 4 gram van het totaal is en 12 gram dus 30 procent.

Het relatieve karakter van procenten

Net als breuken gaat het bij procenten ook om relatieve getallen. Bij procenten ligt dat in het algemeen voor de hand. Een percentage wordt altijd ergens van genomen, en als percentages worden vergeleken is duidelijk dat het gaat om percentages die van dezelfde hoeveelheid genomen zijn. Soms wordt echter het relatieve karakter van procenten niet gezien, en daarom is het goed dit relatieve karakter van procenten nadrukkelijk aan de orde te stellen. In het volgende voorbeeld wordt verhelderd wat het gevaar is van het gebruiken van procenten als absolute getallen.

De pil

Een krantenbericht meldt dat vrouwen die in de overgang ‘de pil’ blijven slikken om overgangsklachten te voorkomen 60 procent meer kans hebben op borstkanker. Het lijkt erop dat niemand zich realiseert dat het hier om een relatief getal gaat. Nergens in het artikel, noch in de discussie die daarna in de krant wordt gevoerd, komt aan de orde waar die 60 procent naar verwijst. Er wordt eigenlijk net gedaan of 60 procent een absoluut getal is. Dat is niet zo, want bij 60 procent gaat het altijd om 60 procent van iets. En het maakt nogal wat uit wat dat iets is. Wanneer bijvoorbeeld de kans op borstkanker 1 op 1.000.000 is, dan wordt deze kans 1,6 op 1.000.000, dat wil zeggen ongeveer 1 op 700.000.
Als onze informatie klopt, is de kans op borstkanker 11 op de 100; dan is de situatie ernstiger. Dan leidt het pilgebruik tot een situatie waarbij de kans ongeveer 17 op de 100 wordt. Toch lijkt het verschil tussen 11 op de honderd en 17 op de honderd minder dramatisch dan de als absoluut getal geïnterpreteerde 60 procent suggereert.

Het multiplicatieve karakter

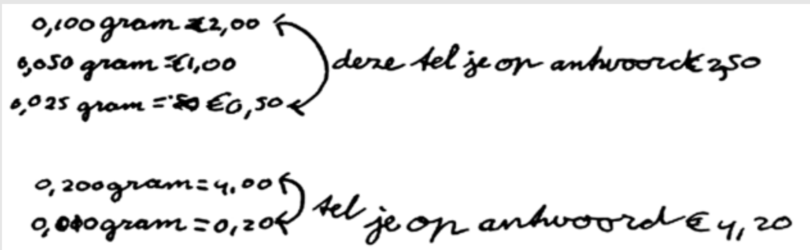
Leerlingen kennen procenten vooral uit contexten rond kortingen. Bij dergelijke contexten ligt de volgende werkwijze voor de hand.

Snoepjes voor diabetici

Snoepjes voor diabetici kosten € 20,- per kilo. Die snoepjes worden meestal niet per kilo verkocht, maar in kleinere zakjes. Bijvoorbeeld zakjes van 125 gram of 210 gram.

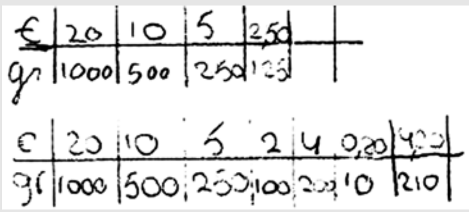
In een gesprek met de leerkracht en (later) zelfstandig, berekenen de leerlingen de prijs van de zakjes en proberen hun redeneringen overzichtelijk te noteren, bijvoorbeeld dat 125 gram een achtste deel van een kilogram is en 210 gram ruim $\frac{1}{5}$ deel.
Bij het verhoudingsgewijs redeneren wordt bijvoorbeeld eerst aangegeven wat de prijs van 100 gram is om vervolgens de prijs van 25 en 10 gram uit te rekenen en te noteren. Als dit gebeurd is kan het antwoord makkelijk gegeven worden.

De leerkracht spreekt met de leerlingen over het overzichtelijk opschrijven van wat er bedacht en uitgerekend is. Als de kinderen hier denken in termen van de breuken $\frac{1}{8}$ of $\frac{1}{5}$, kan het antwoord vaak snel verkregen worden door een deling te maken. De meeste kinderen kiezen evenwel voor een aanpak waarbij min of meer een verhoudingstabel ontstaat (fig. 25).



figuur 25: Nico's werkwijze

In de volgende lessen wordt geredeneerd binnen de context, terwijl de tabel of strook gebruikt wordt om de berekeningen die in de redenering naar voren komen overzichtelijk uit te voeren. In de tabel worden zo bijvoorbeeld regel voor regel tussenresultaten opgeschreven, alleen in vergelijking met de 'tabel' die de meeste kinderen zelf hebben gemaakt is de tabel een slag gedraaid en is overbodige informatie weggelaten (fig. 26).



figuur 26: Wendy's verhoudingstabellen

Later wordt ook gekeken hoe de zakrekenmachine gebruikt zou kunnen worden om de tabel te verkorten. Op dat moment moet er nagedacht worden over het rekenen met kommagetallen. Hoe kun je bedenken dat 0,21 × 20 een berekening op de machine is die tot de prijs van 210 gram drop leidt?

Met behulp van het kortingspercentage wordt de korting uitgerekend en vervolgens van de oude prijs afgetrokken. Zo bestaat het gevaar dat leerlingen procenten associëren met optellen en aftrekken, waardoor ze het bijvoorbeeld moeilijk vinden om om te gaan met percentages boven de 100 procent.

Wij vinden het belangrijk dat een deel van de leerlingen ook kennismaakt met het multiplicatieve karakter van procenten. Wanneer met procenten op een hoger niveau wordt gerekend, worden ze niet meer als ‘deel van’ of als verhouding gezien, maar wel als factor.
Dit is bijvoorbeeld van belang om de zakrekenmachine efficiënt te leren gebruiken bij het oplossen van procentenopgaven. 23 procent van € 21,76 kan bijvoorbeeld worden uitgerekend door 0,23 × 21,76 met de rekenmachine uit te rekenen. In contexten waar de percentages boven de 100 uitkomen, zoals bij prijsverhogingen en rente, is dit karakter van procenten ook van belang. Het helpt dan om de zakrekenmachine in te zetten. Kortingsopgaven lokken niet snel uit tot een dergelijke multiplicatieve werkwijze, omdat de situatie andere handelingen suggereert, ook als een zakrekenmachine wordt gebruikt. Dit heeft onder meer te maken met het kleiner maken dat het delen als bewerking in beeld brengt. Veel leerlingen zijn dan ook geneigd hier eerst te delen door 100 om zo 1 procent te bepalen, om vervolgens met het gevraagde aantal procenten te vermenigvuldigen.

Kerninzichten bij verhoudingen

Bij verhoudingen gaat het om het kerninzicht evenredigheid, dat wil zeggen dat een verhouding staat voor een eindeloze reeks van getallenparen met een gelijke verhouding tussen de getallen. Dit betekent dat uit delen van de - soms vrijwel onzichtbare - getallen op elkaar altijd hetzelfde antwoord komt.
De verhoudingstabel is een schema om het werken met de verhoudingen te ondersteunen. Dit wordt door de leerlingen ontwikkeld als overzichtelijke manier van noteren.

De verhouding ‘2 : 3’ staat in feite voor een oneindig aantal getallenparen zoals ‘4 : 6’, ‘6 : 9’of ‘9 : 12’. Deze getallen hoeven daarbij uiteraard niet geheeltallig te zijn en dus geven ‘0,02 : 0,03’, ‘0,2 : 0,3’ en ‘$\frac{2}{3}$: $\frac{3}{3}$’ dezelfde verhouding. En hoewel verhoudingen in het onderwijs in de regel worden beschouwd als getalsmatige verhoudingen, komen kinderen veel eerder en vaker in aanraking met niet-getalsmatige verhoudingen. In feite vangt het verwerven van verhoudingen al heel vroeg aan. Jonge kinderen blijken goed in staat verhoudingsgewijs te redeneren bij bijvoorbeeld het spelen met speelgoed of het kijken naar de televisie. Een speelgoedautootje wordt met gemak herkend als een auto en datzelfde geldt voor de bijbehorende speelgoedgarage. Juist het besluiten welke auto niet en welke wel in de garage past, toont hoe leerlingen met verhoudingen werken.
Pas enkele jaren na deze eerste verkenning van verhoudingen in het dagelijkse leven komen getalsmatige verhoudingen aan de orde. Om het verhoudingsgewijs redeneren te ondersteunen noteren de leerlingen deze getallen op overzichtelijke wijze. Uit het overdenken van deze schematische weergave van de situatie en het redeneren ontstaat uiteindelijk de verhoudingstabel. Ook hierbij spelen levensechte contexten een centrale rol, zoals in het voorbeeld op pagina 54, waar de prijs van zakjes snoep voor diabetici moet worden uitgerekend.

Belangrijk bij de situatie in het kader is dat leerlingen binnen de context blijven redeneren om zo betekenis te kunnen blijven geven aan de verhoudingen en de evenredigheid die daaruit voortkomt. Verder speelt hier ook het overzichtelijke noteren van de berekeningen die in de redenering naar voren komen een belangrijke rol in het verwerven van inzicht. Vandaar dat dit ook speciale aandacht binnen het onderwijs moet krijgen. Dat betekent overigens niet dat we telkens verhoudingstabellen voor leerlingen willen klaarzetten. We kiezen er liever voor de leerlingen te stimuleren om zelf te bedenken hoe ze de situatie kunnen schematiseren. Het onderwijs richt zich in onze ogen namelijk niet zozeer op het oefenen van rekenregels bij het werken met de verhoudingstabel, maar op het verhoudingsgewijs redeneren en het nadenken over het overzichtelijk noteren van de oplossingsmanieren van een gesteld probleem.

Afsluiting

In dit hoofdstuk stelden we kerninzichten voor breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen centraal. Daarmee gaven we aan dat we ons willen richten op inzicht in de materie en het redeneren van leerlingen over breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Een van deze kerninzichten die bij alle genoemde leerstofgebieden past is het relatieve karakter. De getallen krijgen pas een betekenis als duidelijk is waarop ze betrekking hebben. Dat neemt niet weg dat we voor sterkere rekenaars het verwerven van procedures met kale breuken en kommagetallen als mogelijkheid expliciet openlaten.
Het strookmodel en de daarvan afgeleide getallenlijn is een middel om de overstap te maken van contextgebonden rekenen met breuken, verhoudingen, procenten, en kommagetallen naar procedures voor de bewerkingen met breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. We kiezen hierbij expliciet voor de (dubbele) strook en (dubbele) getallenlijn als modellen, omdat die breuken naast verhoudingen, kommagetallen en procenten in beeld brengt (zie hoofdstuk 2). Het meten is daarbij een belangrijke context, omdat die de strook en de getallenlijn als het ware genereert.

Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen worden met name ook wiskundige objecten als we het onderwijs richten op het ontwikkelen van een relatienet aan getalrelaties. Die vormen dan ook de basis voor het verwerven van bewerkingen met breuken, verhoudingen, procenten, en kommagetallen. Het gaat daarbij dus - voor enkele leerlingen - om het ontdekken van algemene rekenregels als generalisaties van eerdergevonden getalrelaties en niet om het inoefenen van rekenregels. Die vormen dan ook de basis voor het verwerven van bewerkingen met breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Het gaat daarbij dus niet om het inoefenen van rekenregels, maar om het - voor enkele leerlingen - ontdekken van algemene rekenregels als generalisaties van eerder gevonden getalrelaties.

Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen leren kennen als wiskundige objecten maakt het mogelijk dat leerlingen uiteindelijk doordringen tot de wiskunde achter rationale getallen. Dit is evenwel niet de enige reden om ook kale breuken, verhoudingen, kommagetallen en procenten aan de orde te stellen. Ook het gebruik van de zakrekenmachine dwingt ons om leerlingen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen als pure getallen te laten zien, omdat deze alleen effectief kan worden ingezet als leerlingen de getallen als zodanig leren kennen.
Het is een gegeven dat niet alle leerlingen hierin even ver zullen komen. Het idee van het ontwikkelen van een adequaat relatienet aan getalrelaties komt hieraan tegemoet. Maar dit is niet de enige manier om rekening te houden met verschillen tussen leerlingen. Daar is veel meer over te schrijven en dat doen we dan ook in het volgende hoofdstuk.

Noten

[1] Dit programma is te vinden op het Rekenweb.

[2] Dit laatste noemen we wel ‘herhaald decimeren’, hoewel er commentaar op is dat dit taalkundig niet helemaal correct zou zijn. Decimeren verwijst immers naar het nemen van een tiende deel en niet naar de activiteit van het in tienen delen. Wanneer we er echter van uitgaan dat het hier gaat om het creëren van een nieuwe maat, dan klopt het echter weer precies. In feite zit hier de crux, uiteindelijk gaat het niet om de activiteit van het in tienen delen, maar om het construeren van een geschikte ondermaat.

[3] In de context is 0,125 preciezer gemeten dan 0,75 en het is dus ook de vraag of het zinvol is verschillende aantallen decimalen bij elkaar op te tellen, aangezien er sprake is van verschillende nauwkeurigheden. Toch kan de context steun bieden bij die maatwisseling en daar gaat het hier om. Dit preciezer meten komt in de context tot uitdrukking in millimeters tegenover centimeters. Met gewone tiendelige breuken komt dit tot uitdrukking in duizendsten versus honderdsten.

Hoofdstuk 4 - Differentiatie

Inleiding

De verschillen tussen leerlingen in de bovenbouw van de basisschool zijn groot en bij lastige onderwerpen als breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen zal een leerkracht daar voortdurend mee worden geconfronteerd. De leerkracht heeft de moeilijke taak om rekening te houden met deze verschillen om zowel de zwakke als de goede rekenaars in de klas niet te kort te doen.

We kunnen op veel manieren omgaan met differentiatie. We zien dat veel leerkrachten en teams hierbij kiezen voor het werken met niveaugroepen. De meest vergaande vorm hiervan is dat een klas wordt opgedeeld in drie of meer groepjes die aan hun eigen rekenonderwerpen werken en apart instructie krijgen. Wij denken dat zo'n vergaande opdeling geen verstandige aanpak is, vooral omdat het instellen van aparte instructiemomenten betekent dat de tijd die de leerkracht voor instructie heeft, verdeeld moet worden over verschillende groepjes. De leerkracht mist daarmee de rust om als dat nodig is diep op een onderwerp in te gaan, en de kans is groot dat de instructie daardoor blijft steken op het niveau van uitleggen hoe je de som doet. De nadruk ligt dan op het oefenen van procedures, in plaats van op het ontwikkelen van begrip.
Differentiatie in de rekenles kan beter worden gerealiseerd door alle leerlingen te laten meedoen aan klassengesprekken, maar wel onderscheid te maken bij het zelfstandig werken. Een dergelijke differentiatieopzet kent een aantal elementen, die we hier langslopen.

Klassengesprekken
Eén of hooguit twee keer per week is er een klassengesprek met de hele klas, gericht op het ontwikkelen van inzicht. Met klassengesprek bedoelen we hier een echte discussie, met veel inbreng van de leerlingen. Vaak zal het startpunt een wat lastiger rekenprobleem zijn, waarbij de aanpak nog niet vastligt. De leerkracht geeft leerlingen eerst tijd om - bij voorkeur in een groepje - een oplossing te zoeken voor het probleem en in de discussie daarna worden de aanpakken met elkaar vergeleken. Het rekenprobleem dient als aanleiding om kinderen hun inzichten onder woorden te laten brengen; het gaat er daarbij niet om dat de meest efficiënte, doch de 'beste' aanpak moet worden gevonden. De discussie die de opgave oproept zorgt ervoor dat kinderen hun inzichten aanscherpen of nieuwe ideeën ontwikkelen. Wij denken dat alle leerlingen kunnen meedoen aan dergelijke klassengesprekken, maar dan moet het gesprek wel gericht zijn op kernideeën en niet op rekenprocedures.

Zelfstandig werken
Bij het zelfstandig werken maken leerlingen niet allemaal dezelfde opgaven. Ze beginnen bijvoorbeeld wel allemaal aan de opdracht die verband houdt met wat in het klassengesprek van die week aan de orde kwam, maar sterkere rekenaars kunnen daarna zelfstandig ingewikkelder opdrachten aan. Terwijl de leerlingen zelfstandig aan het werk zijn, kan de leerkracht met een klein groepje bepaalde zaken apart doornemen.

Rekenen op eigen niveau
Belangrijk is dat de leerlingen ruimte wordt gegeven om op hun eigen manier te rekenen, zowel in de klassengesprekken als bij het zelfstandig werken. Leerlingen die moeite hebben met procenten, mogen procentopgaven bijvoorbeeld met de procentenstrook uitrekenen. Een sterkere rekenaar vereenvoudigt zo'n procentenstrook echter al snel tot een lijn met een paar getallen, of heeft zo'n model helemaal niet meer nodig. Verderop in dit hoofdstuk zal worden besproken dat we ook zouden moeten accepteren dat kinderen met verschillende *uitkomsten* komen: het ene kind vindt de precieze uitkomst, terwijl een ander kind met een

benadering komt. Het zwaartepunt moet, zoals gezegd, liggen bij de klassengesprekken. Niet zozeer in lestijd - want één les met een intensief klassengesprek per week laat nog heel wat tijd over voor andere activiteiten - maar wel in de zin dat de klassengesprekken bepalend zijn voor de ontwikkeling die kinderen doormaken. Het zelfstandig werken in de overige lessen zou hierop afgestemd moeten zijn. Dat we het zwaartepunt leggen bij de klassengesprekken vloeit voort uit de keuze die we eerder maakten voor het centraal stellen van inzicht en redeneren boven het oefenen van rekenprocedures.
In dit verband moeten we ons bezinnen op wat we onder 'instructie' verstaan. Vaak komt instructie neer op het klassikaal bespreken van een bepaald type opgaven, als inleiding op het zelfstandig oefenen daarvan. Dit is echter heel wat anders dan wat we hierboven bedoelden met een klassengesprek. Met die beperkte betekenis van instructie in gedachten zouden we willen pleiten voor minder instructie en voor meer klassendiscussies. De instructie zou op veel dagen misschien beperkt kunnen blijven tot een korte toelichting op wat de leerlingen zelfstandig moeten gaan doen, terwijl er één keer in de week flink tijd wordt uitgetrokken voor discussie.

Een dergelijke opzet verschilt van de aanpak in de huidige methoden. Daarin worden vaak drie of vier klassikale gesprekken per week beschreven, maar deze gesprekken gaan meestal niet over fundamentele kwesties. In de methoden is de leerstof fijnmazig uitgelijnd met een zorgvuldige opbouw in de opgaven, waardoor de leerlingen steeds kleine nieuwe stapjes maken. De keerzijde van een dergelijke aanpak is dat leerlingen niet worden gestimuleerd om het geheel in ogenschouw te nemen. Het is in onze ogen belangrijk om met de leerlingen regelmatig discussies te houden die verder gaan, bijvoorbeeld door fundamentele vragen te stellen bij de inzichten en rekenprocedures waar de leerlingen inmiddels vertrouwd mee zijn, of door leerlingen problemen voor te zetten waarin als het ware vooruit wordt gelopen op wat er komen gaat.

De belangrijkste vraag die een dergelijke opzet oproept is: kan dat wel, klassengesprekken houden met de hele klas waar zowel de zwakke als betere leerlingen iets van leren? Wij geloven dat het inderdaad kan, maar alleen als de leerkracht zich richt op de kern en die kern is begrip, niet de beheersing van rekenprocedures. In dit hoofdstuk gaan we na wat dat in de praktijk betekent en we formuleren een aantal handvatten voor dergelijk onderwijs.

Klassengesprekken vanuit de inbreng van leerlingen

Klassengesprekken starten bijna altijd vanuit een contextprobleem. Uiteindelijk gaat het echter niet om dat probleem, maar om de ideeën die kinderen ontwikkelen door over zulke problemen te discussiëren. Leerlingen moeten dus alle ruimte krijgen om hun ideeën onder woorden te brengen.

Klassengesprekken vormen het hart van het reken-wiskundeonderwijs. Natuurlijk is ook oefenen belangrijk, maar het echte leren van kinderen - in de zin van bijstellen van ideeën en ontdekkingen doen - vindt vooral plaats in klassikale discussies. Als het goed gaat vindt zo'n discussie voor een groot deel plaats tussen leerlingen. De leerkracht heeft echter een sleutelrol. Ze bemiddelt door bijvoorbeeld suggesties van kinderen te herformuleren en zorgt ervoor dat de discussie gaat over de punten die zij belangrijk vindt. Bij voorkeur zijn niet haar ideeën het onderwerp van gesprek, maar de ideeën die de leerlingen inbrengen.

Er zijn echter grote verschillen tussen leerlingen. Kun je eigenlijk, met zulke grote verschillen wel een hele klas dezelfde problemen voorzetten? Is het niet zo dat sommige leerlingen direct al de oplossing weten, terwijl andere leerlingen een discussie over die oplossing misschien niet eens kunnen volgen? Hoe kun je er als leerkracht voor zorgen dat ieder kind zoveel mogelijk leert van de rekenproblemen die we leerlingen voorzetten?

In deze en de volgende paragraaf proberen we een aantal aanwijzingen te formuleren voor het houden van klassengesprekken.

Presenteer opgaven op een open manier
Een echt contextprobleem zal altijd op verschillende manieren kunnen worden opgelost. De leerkracht zou dat moeten laten doorklinken in de manier waarop ze het probleem introduceert: het gaat niet om het vinden van *de* oplossing, maar om het zelf bedenken van een aanpak. Een voorbeeld hiervan staat op pagina 62.

Verderop in dit hoofdstuk komt het probleem terug van de sticker op de zak appels, dat al in hoofdstuk 1 werd genoemd. Dit voorbeeld laat zien dat ook zwakke rekenaars het antwoord op een vraag kunnen vinden, als we maar niet eisen dat ze per se het precieze antwoord geven. Opgaven met lastige getallen hoeven we dus niet uit de weg te gaan, maar we moeten leerlingen wel altijd een vangnet bieden. In het algemeen is de beste aanpak de problemen in een heel concrete context aan te bieden, zodat leerlingen terug kunnen vallen op wat ze al weten van dergelijke situaties.

Probeer de redeneringen van leerlingen te begrijpen
Het allerbelangrijkste is misschien wel dat een leerkracht moet willen weten hoe leerlingen denken. Dat lijkt nogal vanzelfsprekend, want waarom zou een leerkracht anders kinderen vragen hoe ze geredeneerd hebben? Maar leerkrachten hebben altijd bepaalde bedoelingen met een les en luisteren daarom soms onbedoeld meer vanuit 'past deze oplossing in mijn betoog?', dan vanuit: 'snap ik echt wat dit kind bedoelt?'.
De leerkracht moet uitstralen dat het belangrijk is om echt te snappen wat iemand inbrengt, en dat niet alleen zij, maar iedereen in de klas de redenering moet kunnen volgen. Alleen in zo'n cultuur zullen kinderen geïnteresseerd raken in de redeneringen van medeleerlingen en die willen vergelijken met hun eigen ideeën. Kinderen voelen haarfijn aan of een leerkracht echt geïnteresseerd is in wat zij dachten of alleen maar wacht op bepaalde oplossingen.

Ga moeilijke opgaven niet uit de weg
Het gaat bij breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen om lastige leerstof. De verleiding is dan groot om de problemen beperkt en overzichtelijk te houden. Dat betekent bijvoorbeeld: geen problemen opgeven met breuken en procenten door elkaar, ervoor zorgen dat de verhoudingstabel klaarstaat als hij nodig is, of eerst even ophalen wat de leerlingen over procenten weten. Zo'n aanpak lijkt logisch, maar we verleggen daarmee de taak naar het oefenen van rekenregeltjes in plaats van dat we de leerlingen uitdagen om na te denken over de situatie.

Discussie is pas zinvol als de problemen die we leerlingen voorzetten niet triviaal zijn. De leerkracht moet dus moeilijke vragen of lastige opgaven niet uit de weg gaan. Wie leerlingen de ruimte geeft om zelf oplossingen te bedenken, staat vaak verbaasd over hoever ze komen. Ook voor zwakke rekenaars geldt dat ze regelmatig moeten worden uitgedaagd met lastige vragen. Misschien moeten we zeggen: juist zwakke rekenaars moeten met zulke vragen worden uitgedaagd, want slimmere kinderen stellen zichzelf al moeilijkere vragen.

De kernlessen die we elders beschreven hebben geven voorbeelden van rekenproblemen die niet eenvoudig zijn, maar leerlingen genoeg houvast bieden.[1] Een van de opgaven uit die lessen staat beschreven op pagina 64.

Er moet ruimte zijn voor proberen en nadenken
Leerlingen moeten tijd krijgen om een paar minuten in hun groepje te overleggen, want ze moeten allemaal over het probleem hebben nagedacht voordat de klassikale discussie begint. De leerkracht kan een willekeurig groepje vragen wat ze in het groepje inmiddels hebben bedacht.

Presenteer opgaven op een open manier

De opgave hieronder werd eerder besproken in hoofdstuk 2 en wijkt niet erg af van opgaven die in de rekenmethoden staan. Het verschil is dat er in de methode vaak bij staat wat voor soort oplossing verwacht wordt.

> Snoepjes voor diabetici zijn duur. Ze kosten € 20,- per kilo. Die snoepjes worden meestal niet per kilo verkocht, maar in kleinere zakjes. Er zijn zakjes van:
> 125 gram
> 200 gram
> Reken van elk zakje uit hoeveel het kost.

In de methode zal bijvoorbeeld al een verhoudingstabel klaarstaan. Inderdaad is rekenen via de verhoudingstabel een mogelijke aanpak:

gewicht	1000 gr	100 gr	25 gr	125 gr
prijs	€ 20,-	€ 2,-	€ 0,50	€ 2,50

Als de opgave open wordt aangeboden, blijken kinderen echter ook met andere redeneringen te komen, bijvoorbeeld een oplossing via breuken:
- 125 gram is $\frac{1}{8}$ kg. Je kunt € 20,- delen door 8 en je hebt meteen het antwoord.
- 200 gram is $\frac{1}{5}$ kg. Je kunt € 20,- delen door 5.

Of leerlingen gebruiken wel een verhoudingsredenering, maar ze noteren het anders:

1 kilo kost	€ 20,-
100 gram	€ 2,-
25 gram	€ 0,50
125 gram	€ 2,50

De genoemde oplossingen komen in zekere zin op hetzelfde neer, maar leerlingen ervaren het als totaal verschillende rekenmanieren. Door de oplossingen te laten vergelijken, wordt duidelijk wat de overeenkomsten en verschillen zijn. Nog belangrijker is dat leerlingen door de open aanbieding gestimuleerd worden om zelf een aanpak te zoeken, in plaats van dat ze een voorgeschreven aanpak proberen te volgen.

Het open aanbieden van de opgave zou in dit geval dus neerkomen op:
- Weglaten van alles wat in de richting van een bepaalde rekenaanpak stuurt. Mocht er bijvoorbeeld een verhoudingstabel in het rekenboek staan, dan kan de leerkracht het probleem via het bord introduceren en pas later het rekenboek erbij halen.
- Alle oplossingen van leerlingen of aanzetten daartoe, verwelkomen en samen met de leerlingen onderzoeken of je zo tot een antwoord kunt komen.
- Duidelijk maken dat er bijna altijd verschillende rekenmanieren mogelijk zijn.

Soms gaat de les in twee stappen - de leerlingen overleggen in hun groepje en daarna volgt een klassikale discussie - maar een herhaalde afwisseling van groeps- en klassikaal overleg is meestal beter. Heel vaak zien we namelijk dat het eerste groepsoverleg niet zoveel oplevert, ook als er een uitgebreid gesprek over de situatie aan vooraf is gegaan. Vaak weten de kinderen niet hoe ze het probleem aan moeten pakken, en het komt regelmatig voor dat ze zelfs nog niet goed weten wat eigenlijk het probleem is. Dat geeft niet, want als de leerkracht ziet dat de leerlingen niet weten hoe ze moeten beginnen kan ze de discussie weer even klassikaal maken. Praten over de eerste pogingen biedt meestal de gelegenheid het probleem zó aan te scherpen dat leerlingen aan de slag kunnen.

Houd de grote lijn in de gaten
Rekenproblemen open aanbieden betekent dat de begeleidende en sturende rol van de leerkracht cruciaal wordt. Een open discussie kan immers verschillende kanten opgaan, en vaak komen in de discussie dingen naar boven die op zich interessant zijn, maar die de klas af zouden houden van de discussie waar het deze les eigenlijk om gaat. Het zal dus regelmatig voorkomen dat de leerkracht bepaalde discussies afkapt door de vraag naar iets anders te verleggen. Als een leerling een punt inbrengt dat op zich belangrijk is maar niet past binnen de discussie van dat moment, is het goed om dat punt ergens in een hoek van het bord te noteren als iets om later op terug te komen.
De grote lijn moet trouwens voor de leerlingen ook duidelijk zijn. De leerkracht dient ervoor te zorgen dat het alle leerlingen duidelijk is wat het probleem is waar het deze keer om gaat, en rondt aan het eind bij voorkeur de discussie af door samen te vatten wat de klas heeft ontdekt.

Bied herkansing: kom vaak terug op fundamentele zaken
Ook al liep een les nog zo goed, het is een illusie om te denken dat daarmee een punt voor eens en altijd is afgehandeld. Niet alleen de zwakke rekenaars hebben er behoefte aan dat dingen worden herhaald.
In het rekenonderwijs is het eigenlijk heel makkelijk om herhaling in te bouwen zonder dat leerlingen zich gaan vervelen, want de discussie kan steeds vanuit een nieuw contextprobleem worden gevoerd. Als we een week of een maand na een geslaagde les leerlingen een opgave voorzetten die - in onze ogen - vergelijkbaar is met een eerdere opgave, dan is dat in de ogen van de leerlingen een heel nieuw probleem. Hooguit komen ze er in de loop van de les achter dat 'het eigenlijk net zoiets is als toen we ...', maar dat ervaren ze eerder als een ontdekking dan dat ze teleurgesteld zijn.

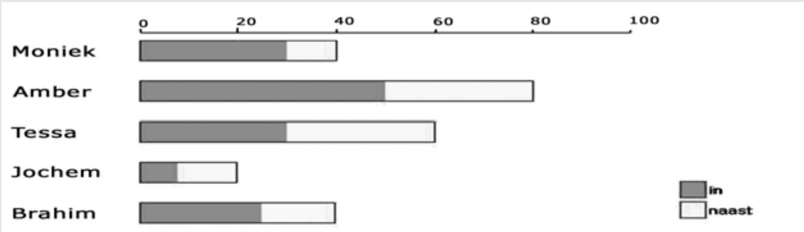
Leg relaties met eerdere lessen
Het is handig om ontdekkingen die in de loop van de tijd gedaan worden een naam te geven. Zo kwam Tarik in de lessen rond kommagetallen (zie hoofdstuk 3) met de suggestie om de kilometerteller van een tractor te gebruiken om de grootte van een stuk land op te meten. De leerkracht kwam daar later regelmatig op terug met opmerkingen als: 'Denk nog eens aan de kilometerteller van Tarik'. Niet alleen is zoiets stimulerend voor de kinderen die het hebben ingebracht - Tarik, een zwakke rekenaar, glom van trots als 'zijn' kilometerteller werd genoemd - maar het helpt de leerlingen ook in te zien dat zij, en de klas als geheel, een leerproces doormaken.

Het gaat niet om dit ene probleem, het gaat om de wiskunde
In realistisch reken-wiskundeonderwijs leren kinderen rekenen door problemen op te lossen. Op het moment dat de leerkracht met zo'n probleem komt telt natuurlijk alleen maar die ene opgave en de oplossing die je als leerling daarvoor kunt bedenken. Uiteindelijk gaat het echter niet om de concrete rekenproblemen, het gaat om de ideeën die je als kind bijvoorbeeld ontwikkelt door oplossingen te zoeken of door over verschillende aanpakken te discussiëren.

Natuurlijk is dat het perspectief van de leerkracht; we kunnen van kinderen niet verwachten dat ze op dezelfde manier tegen de rekenlessen aankijken. Toch ontstaat in een klas die veel tijd besteedt aan het gezamenlijk oplossen van problemen, na verloop van tijd ook bij de leerlingen het inzicht dat niet die losse rekenprobleempjes de kern zijn, maar dat hun eigen leerproces de kern is. Dit is echter een soort verschuiving die pas na heel wat tijd bereikt zal worden.

Ga moeilijke opgaven niet uit de weg

De volgende opgave (fig. 1) is voor leerlingen in groep 7 een hele kluif.



figuur 1

> Wie kan de meeste doelpunten maken met een basketbal? Vijf kinderen hebben vanmorgen geoefend. Hierboven zie je hoe vaak ze raak gooiden. Alleen, je kunt niet zo goed zien wie het het *allerbeste* kan, want de kinderen gooiden niet even vaak.
> Opdracht: Maak een lijstje met de kinderen op volgorde van 'beste' naar 'minst goed'.

Het probleem is lastig omdat alle staven een verschillende lengte hebben. Ook zijn de getallen niet simpel. Het probleem kan zowel via breuken als via verhoudingen worden opgelost:
– Via breuken gaat dat bijvoorbeeld aldus: je kunt de verhouding tussen het aantal doelpunten en het totaal aantal keren gooien vertalen in een breuk. Moniek gooit $\frac{3}{4}$ van haar ballen raak, Amber $\frac{3}{8}$, Tessa de helft, Jochem minder dan de helft en Brahim $\frac{2}{3}$.
– Via verhoudingen: je kunt redeneren via 'stel dat iedereen evenveel ballen zou hebben gegooid' en op die manier de prestaties van de verschillende spelers vergelijkbaar maken.

Juist omdat het een stevig probleem is, biedt de opgave de mogelijkheid om fundamentele dingen te bespreken:
– Het gaat om verhoudingen. Het gekleurde stuk voor 'in' bij Amber is groter dan bij Moniek, maar gooit Amber dan ook beter?
– Breuken zijn een manier om absolute aantallen om te zetten in een relatieve maat.
– Je kunt prestaties omrekenen via een redenering van 'stel dat ...'.

Momenten waarop kinderen zich realiseren dat ze een ontdekking hebben gedaan, dat wil zeggen momenten waarop ze zich realiseren dat ze anders zijn gaan denken, zijn heel belangrijk. Kijken naar je eigen leerproces heet reflectie, en die reflectie is een belangrijke factor in het leren dat daar weer op volgt.

Differentiatie in klassengesprekken

Ieder kind moet mee kunnen doen aan de klassengesprekken, maar op zijn eigen manier. De leerkracht moet inspelen op de verschillen tussen kinderen.

De punten die we in de vorige paragraaf bespraken, zorgen ervoor dat een open klimaat ontstaat waarin kinderen zich uitgedaagd voelen om zelf over rekenproblemen na te denken in plaats van te wachten op uitleg. Vergelijkbare aanwijzingen zijn te formuleren voor het omgaan met verschillen tussen kinderen.

Ieder kind kan meedoen

Natuurlijk, in elke klas zijn er kinderen die graag hun mond opendoen en kin-

deren die het vervelend vinden als ze een beurt krijgen. Daar tussenin zitten veel kinderen die best willen meedoen aan de discussie, maar 'ze hoeven niet zo nodig'. Dergelijke verschillen binnen een klas zijn logisch, en het zou veel moeite kosten om alle leerlingen evenveel te laten zeggen in een klassengesprek. Dat laatste lijkt ook niet echt nodig, want meedoen wil niet per se zeggen dat je je als leerling in de discussie mengt. Meedoen betekent in de eerste plaats dat je meedenkt. De belangrijkste voorwaarde hiervoor is dat kinderen zich lid van de groep moeten voelen. Als dat het geval is, zullen ze mee willen doen aan het klassengesprek, ook al bestaat dat meedoen soms vooral uit luisteren.
Soms zullen bepaalde kinderen de discussie niet helemaal kunnen volgen. Dat zulke momenten voorkomen, is niet te vermijden, gezien de enorme verschillen binnen een willekeurige bovenbouwgroep. Ze zijn in onze ogen echter geen argument om kinderen niet mee te laten doen met het gesprek. En natuurlijk is het ook niet erg dat een kind bij een klassengesprek wel eens wegdroomt.

Ieders bijdrage verdient het serieus genomen te worden
Een leerkracht zal er meestal niet zoveel moeite mee hebben om de bijdrage van verschillende kinderen op waarde te schatten. Die ziet bijvoorbeeld een zwakke rekenaar worstelen met het probleem en is tevreden met elk stapje dat het kind zelfstandig zet. Klasgenoten zijn echter soms hard in hun oordeel en lachen om een opmerking die ze stom vinden. De leerkracht speelt op dit punt een cruciale rol. Vaak kan ze duidelijk maken dat die 'stomme' opmerking ook op een redenering gebaseerd is en eigenlijk helemaal zo stom niet is. Belangrijker is nog dat ze zorgt voor een klassencultuur waarin het er niet om gaat de slimste te willen zijn. Je eigen oplossing is natuurlijk belangrijk, maar proberen te begrijpen hoe andere leerlingen het probleem aanpakken, en hun redenering daarbij proberen te volgen, is minstens zo belangrijk.

De sfeer moet niet competitief zijn. Kinderen zouden niet te veel naar elkaars presentaties moeten kijken, maar vooral naar wat ze zelf bijleren. Iemand die een muziekinstrument leert bespelen vergelijkt zich ook niet met een beroepsmusicus; het is stimulerender om te kijken naar wat je eerst nog niet kon, en nu wel.

Speel in op de verschillen tussen kinderen
Kinderen hebben hun eigen voorkeuren in hun aanpak van rekenproblemen. Er zijn leerlingen die bijvoorbeeld graag een strook tekenen, terwijl andere leerlingen liever sommetjes op hun kladblaadje schrijven. En als er een keus is tussen rekenen via breuken of verhoudingen, zijn het waarschijnlijk vaak dezelfde kinderen die naar de verhoudingstabel grijpen. Als de leerkracht zulke verschillen opmerkt, is het aardig er ook aandacht aan te besteden, om op die manier te benadrukken dat iedereen zijn eigen rekenmanieren mag ontwikkelen.

Er zijn natuurlijk nog veel meer verschillen tussen kinderen waar een leerkracht op zal letten. Als bijvoorbeeld een kind dat niet zo vaak zijn mond opendoet met een suggestie komt, zal een leerkracht daar vanzelfsprekend meer aandacht aan besteden dan aan de reactie van een kind dat altijd volop meedoet aan de discussie.

Ook voor de betere rekenaars zijn rekenproblemen zelden triviaal
Er zijn kinderen die meestal al snel een aanpak zien. Het zijn de kinderen die soms ook direct zien dat er meer dan één manier is om het probleem aan te pakken, en die bijvoorbeeld zoveel overzicht hebben dat ze begrijpen dat een aanpak via breuken op hetzelfde neerkomt als een aanpak via verhoudingen. Toch zijn rekenproblemen ook voor slimme kinderen zelden triviaal. Misschien is het probleem zelf niet moeilijk, maar aan anderen uitleggen wat je oplossing is, en je argumenten voor die oplossing onder woorden brengen, is vaak een hele klus. Het zal dan ook weinig voorkomen dat slimme kinderen weigeren om mee te doen aan een klassengesprek. Dat veronderstelt echter wel dat het onderwerp een echt probleem is en niet simpelweg de vraag hoe je het zoveelste sommetje van een bepaald type moet uitrekenen.

Trouwens, ook slimme kinderen hebben vaak een heel weinig effectief aanpakgedrag. Dat zien we bijvoorbeeld wanneer we aan goede rekenaars in groep 6 pittige problemen voorleggen. Slimme kinderen blijken er zo aan gewend te zijn dat ze opgaven zonder moeite uit hun hoofd aankunnen, dat veel kinderen bij deze pittige opgaven niets op hun kladblaadje schrijven en daardoor geen oplossing vinden. Er mag ook wel eens een les zijn om met name de betere leerlingen te steunen.

Wij zijn van mening dat open klassengesprekken zowel de zwakke als de betere rekenaars kunnen stimuleren, maar af en toe een les speciaal kiezen vanuit het perspectief van de sterkere rekenaars is natuurlijk prima. Met de les 'Tegels leggen' (pagina 67) hebben we geprobeerd daarvan een voorbeeld te geven. De les is bedoeld om kinderen na te laten denken over het vermenigvuldigen van breuken. Een som als $2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4}$ hoort wat ons betreft niet tot de kerndoelen van het rekenonderwijs op de basisschool, in ieder geval niet in zijn kale, formele vorm. Toch zijn er genoeg kinderen die dergelijke sommen ook op dat formele niveau aankunnen. De les 'Tegel leggen' gaat over een heel concrete situatie - een terrasje volleggen met tegels - zodat alle leerlingen mee kunnen doen aan de les, maar hij kan met name de betere leerlingen laten zien hoe je breuken met breuken kunt vermenigvuldigen.

Rekening houden met de verschillen tussen kinderen, terwijl de verschillen in rekenbegrip en rekenvaardigheid in vrijwel elke klas aanzienlijk zijn, is niet eenvoudig. De sleutel ligt in onze ogen in het open aanbieden van rekenproblemen. Open in de zin dat er verschillende manieren overblijven om het probleem aan te pakken, maar vooral ook open in de zin dat het initiatief bij de leerlingen wordt gelegd. De leerkracht moet uitstralen dat het er niet om gaat dat leerlingen de oplossing vinden die zij in haar hoofd heeft, maar om zelf een oplossing te bedenken. Als kinderen zelf de verantwoordelijkheid nemen voor het oplossen van een probleem, zullen ze hun eigen kennis inzetten in plaats van te wachten op instructie over een passende aanpak. En ook al zijn de verschillen in kennis misschien groot, elk kind kan tenminste een deel van de oplossing vinden.

Het is echter niet makkelijk om het initiatief bij leerlingen te leggen. Leerkrachten voelen zich meestal veel meer thuis in de rol van uitlegger, in de rol van de expert die weet hoe het moet en manieren zoekt om dingen duidelijk te maken. Wanneer leerlingen veel inbreng hebben is het niet goed te plannen hoe de les zal verlopen, ook al probeert de leerkracht vooraf te bedenken waar leerlingen mee zullen komen. Een voorwaarde is bovendien dat de leerkracht voldoende overzicht heeft over de stof en er op durft te vertrouwen dat ze het gesprek hoe dan ook altijd wel weer kan brengen op de punten waar het die les om moet gaan. Ook van de kinderen worden andere dingen gevraagd. In plaats van te mogen wachten op uitleg, wordt van hen verwacht dat ze zelf zoeken naar oplossingen en dat ze daarover in discussie gaan met medeleerlingen. Dit zal overigens in veel klassen een omslag zijn, en eentje die niet van de ene op de andere dag gerealiseerd kan worden.

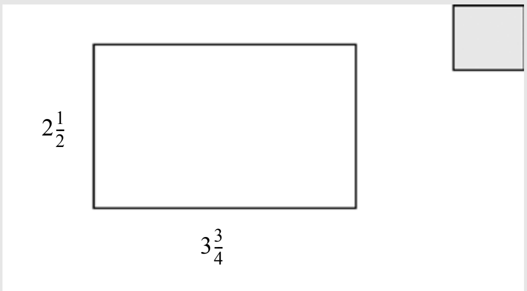
Differentiatie naar precisie

Laat leerlingen schattingen maken en globaal rekenen. De sterkere rekenaar doet het vervolgens precies.

Aan één vorm van differentiatie willen we hier speciaal aandacht besteden, omdat het een vorm is die niet erg gebruikelijk is.
Bij rekenproblemen denken we meestal aan opgaven die weliswaar zo open zijn dat verschillende oplossingsmanieren mogelijk zijn, maar waarbij het uiteindelijk gaat om het vinden van één bepaald antwoord. We kunnen echter de opgave ook op een andere manier open presenteren, namelijk door variatie in antwoorden te accepteren.

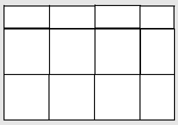
Speciaal voor de betere rekenaars: Tegels leggen

Het volgende probleem kan dienen om met leerlingen vermenigvuldigingen als $2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4}$ te verkennen. Zulke vermenigvuldigingen horen niet bij de kerndoelen, zeker niet in kale vorm. Toch moeten ze aan de orde worden gesteld, want de betere rekenaars kunnen dit type vermenigvuldigingen best aan. We hebben een probleem gekozen dat zo concreet is, dat alle leerlingen tot op zekere hoogte een antwoord kunnen vinden, maar de betere rekenaars maken misschien de stap naar een meer formele redenering.
Iemand wil grote, bijzondere tuintegels kopen voor een terrasje. Die tuintegels passen helaas niet netjes op de plek die ze gekozen heeft, want ze passen $2\frac{1}{2}$ keer in de ene richting en $3\frac{3}{4}$ keer in de andere richting (fig. 2). Hoeveel tegels zijn er nodig?



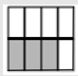
figuur 2

– Elk kind zal waarschijnlijk kunnen bedenken dat je het in ieder geval afkunt met twaalf hele tegels, want als je 3 × 4 tegels neemt kun je aan de randen een stuk afsnijden.
– Kinderen zullen ook wel bedenken dat je met de afgesneden stukken nog iets kunt doen. Via tekenen of redeneren kan de conclusie zijn dat je ook aan tien hele tegels al voldoende hebt.
– Dat kan er toe leiden dat de kinderen ook willen weten wat nu de precieze uitkomst is: een getal tussen 9 en 10, maar hoeveel? Voor de praktische situatie doet dat er niet toe, want je kunt bij een tuincentrum alleen hele tegels kopen, maar als 3 × 4 een precieze uitkomst heeft, dan heeft $2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4}$ waarschijnlijk ook een precieze uitkomst. Waar het uiteindelijk op neerkomt is de vraag hoe groot de tegel is in de rechter bovenhoek van de tekening hieronder, een tegel die $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ groot is (fig. 3).



figuur 3: Tegels leggen

De grootte van die tegel kan worden gevonden door hem in kleine stukjes te verdelen (fig. 4).



figuur 4

De sticker op de zak appels uit hoofdstuk 1 is een voorbeeld van een probleem dat we op een dergelijke open manier aan kunnen bieden. De vraag is niet: 'Hoeveel moet je betalen voor deze zak appels?', maar: 'Hoeveel kost deze zak

ongeveer?'. Leerlingen kunnen op hun eigen manier naar een antwoord zoeken, en al naar gelang hun rekenkennis zal hun antwoord minder of meer precies zijn.
Hoever hun uitkomst afligt van de precieze uitkomst is daarbij niet zo belangrijk, maar wel de argumentatie waarmee ze hun schatting onderbouwen.

> De prijssticker op een zak appels laat zien wat het gewicht is van de appels en wat ze per kilo kosten. Er zit echter een vlek op de uiteindelijke prijs. Wat zou je ongeveer moeten betalen (fig. 5)?

figuur 5

Bij een dergelijke opgave gaat het niet om het antwoord, maar om de manier waarop kinderen hun antwoord beargumenteren: het moet minder dan € 1,20 zijn, want ..., het is ongeveer driekwart van € 1,20, want ..., 100 gram kost 12 cent, dus ...

Door opgaven open aan te bieden maken we op een heel natuurlijke manier ruimte voor differentiatie. Zwakke rekenaars komen misschien niet verder dan een grove benadering, terwijl andere leerlingen de precieze uitkomst vinden. Vaak kan het één trouwens overlopen in het ander: leerlingen beginnen met een schatting en vinden van daaruit manieren om hun antwoord te verfijnen.

Een ander voorbeeld waarmee we het idee van differentiatie naar precisie kunnen illustreren, is:

> Als je iets koopt, betaal je tegelijk wat belasting, die belasting heet BTW. Een heleboel jaren was het tarief $17\frac{1}{2}$ procent. Dus als een televisie eigenlijk € 400,- zou moeten kosten kwam daar nog $17\frac{1}{2}$ procent van € 400,- bovenop. Hoeveel moet je dan betalen voor die televisie?

Kan men eisen dat alle kinderen aan het eind van de basisschool zo'n opgave kunnen uitrekenen? Zo'n opgave vraagt om formeel rekenen met nogal lastige getallen. Wat kunnen we eigenlijk wel eisen?

We zouden kunnen besluiten dat in de rekenles opgaven beter beperkt kunnen blijven tot sommen met ronde percentages als 20 procent, 25 procent en 50 procent. Zulke percentages komen in het dagelijks leven redelijk vaak voor - denk aan de uitverkoop - en ze zijn erg belangrijk bij het schatten en flexibel rekenen. Als we echter alleen maar opgaven zouden geven met ronde percentages, gaan we voorbij aan de kern van het procentbegrip, want met louter zulke percentages zou het begrip procent nooit zijn uitgevonden. De samenleving zou het immers hebben afgekund met simpele breuken als $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{4}$.
Een tweede argument om niet alle procentopgaven te versimpelen tot sommen met ronde percentages, is dat we daarmee de leerlingen niet voorbereiden op de wereld buiten de school. Kinderen zouden bij een percentage als $17\frac{1}{2}$ procent immers niet opeens met de handen in het haar mogen zitten.
Een derde argument, ten slotte, is dat we de betere rekenaars op deze manier te kort doen. Er zijn genoeg leerlingen die de stap naar de formele rekenregels zonder problemen kunnen maken. Voor hen heeft $17\frac{1}{2}$ procent net zoveel betekenis als 23 of 25 procent.

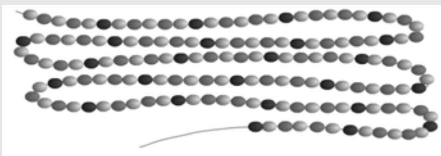
Ook zwakke rekenaars kunnen meedoen

Helga en Maaike haalden de afgelopen jaren altijd een lage score op de Cito-toets. Ze hebben allebei nog steeds moeite met sommetjes als 18 – 12, stof van groep 4. Rekenen vinden ze geen leuk vak. De leerkracht van groep 7 geeft hen extra aandacht en helpt hen met speciaal uitgezochte opdrachten, maar Helga en Maaike doen verder grotendeels mee met het programma van groep 7. In dit kader vindt u een paar momenten uit het jaar, beschreven door de leerkracht, Lia Oosterwaal.

Helga en Maaike

Om de kommagetallen te introduceren laat ik de leerlingen twee lessen meten met stroken die te groot zijn (zie hoofdstuk 3). De vraag in de eerste les is: als je een tafeltje moet opmeten met een lange strook, hoe zou je die strook dan onderverdelen? En in de tweede les: als je nu een tien keer zo klein strookje hebt, maar je moet je gum opmeten, hoe zou je dat kleine strookje dan weer onderverdelen? Maaike heeft opgelet in die lessen, maar zich niet echt in de discussies gemengd.
In de derde les geef ik opgaven als: Kun je 60 cm schrijven als het zoveelste deel van een strook van 1 meter? En kun je het ook bij 25 cm?
Die 60 cm is $\frac{6}{10}$ van de grote strook, daar is iedereen het over eens. De 25 cm zorgt voor discussie. Robin zegt dat het '$\frac{2}{10}$ en een half' is. Tisse: '$\frac{2}{10}$ en een halve tiende'. Maaike: 'Ja maar, zo schrijf je het niet op', en even later: 'Het is $\frac{2}{10}$ en dan $\frac{1}{5}$'. Ik laat Maaike zien hoeveel $\frac{1}{5}$ strook is.
Andere leerlingen formuleren uiteindelijk hoe het zit: 25 cm is 25 van die kleine stukjes van $\frac{1}{100}$, dus het is $\frac{25}{100}$. En 60 cm is $\frac{6}{10}$ van een meter, maar ook $\frac{60}{100}$. Ik teken de lange strook van een meter, het strookje van $\frac{1}{10}$ meter en het stukje van 1 centimeter dat daar weer $\frac{1}{10}$ van is. Iedereen lijkt het te snappen, ook Maaike, dus die twee lange lessen waren niet voor niets. Ik laat ze nog wat opgaven maken.
Later, bij het begin van de gymles komt Maaike tegen me aan zitten en zegt stralend: 'Ik snap het. Ik kan nu rekenen. Ik snap het voor de eerste keer.'
Zo'n zelfde ervaring heb ik met Helga. Helga rekende de eerste groepslessen niet echt mee en ze beklaagde zich regelmatig dat ze geen leuk groepje heeft. Vandaag kijkt ze zuur; er zijn nieuwe rekengroepjes gemaakt en ze is er niet blij mee. Ik zie haar echter opleven als ik kleurenkopieën uitdeel met een plaatje van een slinger voor in de kerstboom. De ballen zijn gekleurd in een herhaald patroon van groen-rood-groen-rood-groen-blauw, maar de kinderen doorzien dat patroon nog niet.

Ik vraag de klas welke kralen blauw zijn. Dat is een makkie, want dat zie je zo: nummer 6, nummer 12, enzovoort. Dus gewoon de tafel van 6 gebruiken. Lastiger is de vraag of ze ook iets kunnen voorspellen over de plek van de groene ballen. Opeens reageert Helga met: je ziet dat die groene steeds naast de blauwe zit en als blauw nummer 6 is dan is groen steeds nummer 5. Op dat moment gaat er ook voor andere kinderen een lampje branden. Ze ontdekken het patroon, steeds weer redenerend vanuit die opvallende blauwe kraal van Helga (fig. 6).



figuur 6

In de pauze buiten glimt Helga nog van trots. Zij had de klas het idee van de opvallende kraal gegeven en gemerkt dat die stap nodig was voor de oplossing. Ze kon rekenen! Later merkte ik dat Helga de smaak te pakken kreeg. Ik hoorde haar steeds vaker tijdens de lessen.
Natuurlijk ging er bij mij ook een lampje branden: voor Helga zijn kleuren heel belangrijk, dus daar moet ik meer aandacht aan geven. Ik ging ook op het bord bijvoorbeeld meer kleuren gebruiken.

Rond Pasen gaan we zakjes met eitjes vullen. Ik vraag kinderen zelf te bepalen hoeveel procent witte, pure en melkeitjes er in een zakje gaan. Ze mogen ook het aantal eitjes per zakje bepalen. Het is mooi om te zien hoe goed ook zwakke rekenaars als Helga en Maaike dit kunnen. Helga: 'We doen 20 eitjes in een zakje. 50 procent is melk, dat zijn 10 eitjes. Dan blijven er 10 eitjes over. We willen 10 procent puur; dat zijn er 2. Nu zijn er nog 8 eitjes over en die zijn dan wit. Er zijn 40 procent witte eitjes, want 50 eraf 10 is 40.'

Het alternatief is om lastige percentages niet uit de weg te gaan, maar leerlingen te vragen om, net als bij het vermenigvuldigen van kommagetallen, een gefundeerde schatting te maken.

Hoeveel is $17\frac{1}{2}$ procent van € 400,- ongeveer?

Mogelijke antwoorden van leerlingen kunnen zijn: ?
- Het is bijna 20 procent, dus $\frac{1}{5}$; 400 : 5 = 80, dus de uitkomst is ongeveer € 80,-.
- 10 procent van € 400,- is € 40,-; 5 procent van € 400,- is daar weer de helft van, dus € 20,-;
- 15 procent is dan € 60,-. Het is iets meer dan € 60,-.

Dergelijke antwoorden lijken ons meer dan voldoende. Ze laten bovendien zien dat de leerlingen inzicht hebben in de relaties tussen procenten en breuken.

Er zijn natuurlijk ook manieren om de precieze uitkomst te vinden:
- 10 procent van € 400,- is € 40,-; $7\frac{1}{2}$ procent is $\frac{3}{4}$ van 10 procent, dus er komt nog € 30,- bij;
- 1 procent van € 400,- is € 4,-; $17\frac{1}{2}$ procent is dus $17\frac{1}{2}$ maal € 4,-.

Die laatste aanpak is rekenen via de 1 procent-regel. Hij is toe te passen bij elke procentopgave en lijkt in onze ogen als volwassene zo vanzelfsprekend, dat we geneigd zijn om alle leerlingen even die regel te leren. Het feit dat zoveel kinderen moeite hebben met procentsommen bewijst echter dat ‘even’ de 1 procent-regel aanleren niet zoveel zin heeft.
Differentiatie naar precisie is geen wondermiddel waarmee alle differentiatieproblemen verdwijnen. Het is een vorm die past bij de meer algemene benadering van de differentiatieproblematiek die we bepleiten. Die benadering komt erop neer dat leerlingen veel ruimte krijgen om hun eigen oplossingen te zoeken en gestimuleerd worden om op eigen kracht zo ver mogelijk te komen.

Differentiatie bij zelfstandig werken

Niet alle leerlingen maken dezelfde stof. Zet begaafde en hoogbegaafde kinderen tijdens het zelfstandig werken aan andere ‘voor’ hen meer uitdagende taken. Bekijk oefenopgaven kritisch. Kies opgaven die passen bij wat kinderen begrijpen.

We zijn in dit hoofdstuk vooral ingegaan op de rol van klassengesprekken in differentiatie, omdat juist die klassengesprekken als problematisch worden ervaren en omdat sommige modellen van klassenorganisatie erop neerkomen dat gezamenlijke klassengesprekken vermeden worden. Wat het zelfstandig werken betreft is er waarschijnlijk meer overeenstemming.
Dat het goed is om tijdens het zelfstandig werken niet alle leerlingen dezelfde stof te laten doen, wordt waarschijnlijk door de meeste leerkrachten wel onderschreven, al wil dat niet zeggen dat het eenvoudig is om zoiets te organiseren.
Alle methoden bieden differentiatiemogelijkheden via bladzijden met herhalingsopgaven en verrijkingsstof. Onze indruk is dat leerkrachten daar goed mee uit de voeten kunnen, maar ook dat ze onvoldoende soelaas bieden voor de twee uitersten waar elke leerkracht mee te maken heeft: de zwakke rekenaars en de begaafde rekenaars.

De zwakste rekenaars

De zorg voor zwakke rekenaars heeft twee belangrijke elementen: het bieden van extra hulp, en een kritische bezinning op de opgaven die we hen laten maken.
Ook al kunnen ook zwakkere rekenaars meedoen aan de klassengesprekken, dat wil niet zeggen dat zij er hetzelfde van opsteken als de rest van de klas. Zwakkere rekenaars hebben extra hulp nodig van de leerkracht, en die hulp kan het gegeven worden door leerlingen die moeite hebben met de stof in een groepje apart te

nemen. De andere leerlingen werken op dat moment bijvoorbeeld zelfstandig aan eigen rekentaken. In een dergelijk ondersteuningsgroepje kan de leerkracht nogmaals terugkomen op een klassengesprek en nagaan wat leerlingen daar precies van opgestoken hebben. Vaak zal het zinvol zijn om leerlingen nog een keer een vergelijkbaar probleem voor te leggen.

Het tweede element dat we noemden is minstens zo belangrijk. In de huidige methoden wordt veel ruimte gegeven aan het inoefenen van vrij abstracte rekenprocedures zoals bijvoorbeeld: het optellen of vermenigvuldigen van breuken, omrekenen van procenten naar breuken en kommagetallen en rekenen met kommagetallen. Voor dergelijke onderwerpen geldt dat zwakke rekenaars zulke opgaven misschien wel aan zouden kunnen, maar dan alleen als de opgave binnen een duidelijke context wordt gezet. In de rekenboeken blijft de verbinding naar een contextsituatie vaak beperkt tot een enkel plaatje boven een rijtje sommen. De suggestie die daaruit spreekt is voor een deel van de leerlingen voldoende om betekenis te geven aan de sommen die volgen, maar voor zwakke rekenaars geldt dat niet.

Een ander punt om rekening mee te houden bij de keuze van opgaven is dat kinderen geleidelijk een relatienet moeten kunnen opbouwen. In dit discussiestuk is bijvoorbeeld op verschillende plaatsen betoogd dat kinderen eerst vertrouwd moeten zijn met eenvoudige breuken als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$ voordat we ze sommen geven met andere breuken. Dit geldt met name voor het oefenen tijdens het zelfstandig werken. Het is verstandig om zwakkere rekenaars vooral met eenvoudige breuken te laten oefenen, omdat die eenvoudige breuken ook voor hen betekenis hebben.
Het is dus belangrijk om heel kritisch te kijken naar de oefenopgaven die we zwakke rekenaars laten maken. Inslijpen van een rekenprocedure heeft weinig zin als die procedure voor een kind geen betekenis heeft, en het zou een misverstand zijn om te denken dat door oefenen begrip ontstaat. Het is dus nodig om opgaven te kiezen die passen bij wat de leerlingen begrijpen. Juist bij de zwakke rekenaars moeten we ons richten op de kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen, en de formele rekenprocedures horen niet tot de kern.

Begaafde kinderen
De Stichting Leerplanontwikkeling (SLO), geeft een pakket ‘compacten en verrijken van de rekenles’ uit dat speciaal bedoeld is voor het werken met begaafde en hoogbegaafde kinderen. De auteurs pleiten ervoor om begaafde leerlingen gewoon mee te laten doen met klassengesprekken, maar de stof die ze zelfstandig maken vergaand aan te passen. Oefenstof en herhaling kunnen voor een groot deel worden geschrapt en de andere opgaven zouden een meer open en uitdagend karakter moeten krijgen. De auteurs hebben bij de vier meest gebruikte reken-wiskundemethoden, te weten ‘Alles telt’, ‘De wereld in getallen’, ‘Pluspunt’ en ‘Rekenrijk’, volledige compactingprogramma’s ontwikkeld. Deze zijn uitgewerkt in routeboekjes. De leerlingen zien zo per les wat ze moeten doen en wat ze mogen overslaan. Dit sluit aan bij wat wij in dit discussiestuk betogen voor het reken-wiskundeonderwijs in zijn geheel: er moet minder nadruk komen op oefenen en meer op begrip.

Klassengesprekken zijn een centraal element in het onderwijs, en de opgaven die we leerlingen voorzetten zouden meer open en meer uitdagend kunnen zijn. Natuurlijk is de uitwerking niet hetzelfde, want voor begaafde leerlingen kan oefenstof worden geschrapt omdat zij die stof al beheersen, terwijl voor gewone en zwakke rekenaars een beperking zinvol is omdat ze te weinig leren van het maken van oefensommen. We pleiten voor de meeste leerlingen dan ook niet zozeer voor minder oefenen als wel voor anders oefenen.

Begaafde en hoogbegaafde kinderen moeten tijdens het zelfstandig werken aan andere, voor hen meer uitdagende taken worden gezet. Voor een deel kunnen dat opdrachten zijn uit de eigen methode en voor een deel zal de leerkracht moeten putten uit materiaal dat speciaal voor begaafde kinderen is ontwikkeld. Tegelijkertijd moet er echter voor worden gezorgd dat leerlingen cruciale stappen in de leergangen niet overslaan. De compactingprogramma's van de SLO kunnen steun bieden bij het kiezen van de stof voor de betere leerlingen.

Conclusie

Bij breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen speelt de differentiatieproblematiek waarschijnlijk nog sterker dan bij andere rekenonderwerpen. Het gaat om stof waarbij inzicht het allerbelangrijkst, is en dat betekent dat ijverig oefenen de kloof tussen zwakke en sterke rekenaars niet kleiner zal maken. Door de nadruk te verschuiven naar klassengesprekken wordt die kloof overigens niet gedicht; het is zelfs goed mogelijk dat de betere rekenaars bij zo'n aanpak nog meer vooruitgaan dan zwakke rekenaars. In zekere zin profiteren de zwakke rekenaars echter toch het meest: leren rekenen verandert van moeizaam inoefenen van onbegrepen procedures in een proces van ontdekken hoe dingen in elkaar zitten.

Een groot deel van het hoofdstuk besloeg een schets van het interactieve onderwijs dat we hierbij voor ogen hebben. We gaven die schets de vorm van concrete aanwijzingen voor leerkrachten, maar we beseffen heel goed dat de omslag die nodig is niet gemaakt kan worden op basis van alleen maar een papieren beschrijving. Zo'n omslag - want dat is het - vereist een grote inspanning van iedereen die bij het onderwijs betrokken is: leerkrachten, Pabo-docenten, schoolbegeleiders, ontwikkelaars en schoolboekauteurs. We hopen in de reacties op dit discussiestuk te horen of onze visie gedeeld wordt en welke stappen ondernomen kunnen worden om dit ideaal van interactief onderwijs dichterbij te brengen.

Noot

[1] Zie voor een aantal van de kernlessen de TAL-bovenbouwpagina op www.rekenweb.nl/leraren

Hoofdstuk 5 - Tot slot

Overzicht

In dit boekje formuleerden we keuzen voor het inrichten van het onderwijs in breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Maken van keuzen is nodig, want het programma voor rekenen-wiskunde in de bovenbouw van de basisschool lijkt overladen. Bovendien zijn er grote verschillen tussen leerlingen in kennis en vaardigheid, en leerkrachten vinden het vaak niet eenvoudig om daarmee om te gaan.

De stelling die we aan de lezer voorleggen is, dat de genoemde problemen vereisen dat het reken-wiskundeonderwijs in de bovenbouw zowel vakinhoudelijk, als organisatorisch wordt bijgesteld. Vakinhoudelijk zou het onderwijs meer moeten worden gericht op het ontwikkelen van inzicht, en minder op het oefenen van vaardigheden. Wat de organisatie betreft pleiten we er met name voor dat meer ruimte wordt gemaakt voor open discussies over fundamentele wiskundige kwesties.

Via het beschrijven van kerninzichten - in hoofdstuk 3 - hebben we geprobeerd om duidelijk te maken wat het betekent om het onderwijs te richten op het ontwikkelen van inzicht. We betoogden dat breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen aanvankelijk voor leerlingen alleen betekenis hebben binnen een bepaalde context. Later kunnen deze getallen voor de leerlingen wiskundige objecten worden waarmee op een meer formeel niveau geredeneerd kan worden. Leerlingen ontwikkelen op dat niveau een netwerk van relaties, waarin bijvoorbeeld $\frac{3}{4}$ gekoppeld is aan 3 van de 4, aan 75 procent, en aan 0,75, maar ook aan 6 van de 8, aan het dubbele van $\frac{3}{8}$, enzovoort. In het huidige onderwijs wordt te snel de stap gemaakt naar het inoefenen van rekenprocedures, wat als gevaar heeft dat breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen hun betekenis verliezen. Als leerlingen weten dat $\frac{3}{4}$ hetzelfde is als 75 procent, dan is dat regelmatig kennis waar onvoldoende inzicht onder ligt.

Kiezen voor werken aan kerninzichten en getalrelaties heeft consequenties. Deze zijn uitgewerkt in de hoofdstukken 2 en 4. In hoofdstuk 2 beschreven we hoe belangrijk het is om de leerstofonderdelen in samenhang te onderwijzen. Wiskundig gezien zijn er grote overeenkomsten tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. Leerlingen moeten die overeenkomsten gaan zien, maar ook de verschillen.
In hoofdstuk 4 ging het om de differentiatieproblematiek. Wij betoogden dat leerlingen een eigen netwerk van getalrelaties ontwikkelen en dat dit netwerk voor de ene leerling rijker gevuld zal zijn dan voor de andere. Dat hoeft echter geen probleem te zijn; zeker niet als we ook het globaal rekenen toestaan en waarderen. We lieten met een aantal voorbeelden zien dat ook moeilijkere problemen op een voor alle leerlingen zinvolle manier aan de orde gesteld kunnen worden.

Om de kern van het onderwijs in breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen beter tot z’n recht te laten komen moet, denken wij, het onderwijs anders worden ingericht. We denken daarbij aan de volgende zaken:

– Ontwikkelen van inzicht via discussielessen met de groep. Voor dergelijke open lessen moet één- of tweemaal per week ruimte worden gecreeerd. Alle leerlingen van de groep zouden aan deze lessen moeten meedoen.
– Minder nadruk op het aanleren en inoefenen van procedures. Dit betekent ook dat anders wordt omgegaan met het oefenmateriaal in methoden.
– Niet het antwoord telt, maar veel meer de redeneringen achter het antwoord.
– Schattend rekenen en globaal redeneren moeten een volwaardige plaats krijgen.

- Leerlingen werken tijdens het zelfstandig werken deels aan verschillende taken.
- Zwakke rekenaars worden ondersteund door de stof van de stof in kleine groepjes nogmaals te bespreken.

Discussiestuk

Dit boek is geschreven om discussie uit te lokken. We namen op heel wat plekken een standpunt in, maar we willen daarmee niet suggereren dat nu het laatste woord is gezegd. Juist het tegendeel geldt: de lezer wordt expliciet uitgenodigd om te reageren op deze standpunten. Daarbij stellen we ons voor dat de eigen situatie als uitgangspunt wordt genomen om de voorstellen te toetsen. We horen bijvoorbeeld graag van leraren in het basisonderwijs of zij ervaring hebben met wat hier wordt voorgesteld, en waarom zij er in hun situatie juist wel of juist niet voor kiezen. We willen ook horen wat er eventueel in de beschrijving ontbreekt, en of men bijvoorbeeld van mening is dat we bepaalde problemen over het hoofd hebben gezien.

We horen ook graag de reacties van anderen die zich intensief met het reken-wiskundeonderwijs bezighouden, zoals lerarenopleiders en schoolbegeleiders. Vanuit hun beroep ervaren ze hoe leraren of aanstaande leraren zich ontwikkelen en welke impulsen geschikt zijn om deze ontwikkeling te stimuleren. We zijn benieuwd naar reacties vanuit dit perspectief.

Onderwijs ontwikkelen is geen klus die vanachter het bureau mag worden bedreven: observeren in de klas, en praten met leerkrachten is van essentieel belang. De ideeën die op deze manier zijn ontstaan hebben wij vastgelegd in dit boek. Daarmee gaat de discussie een volgende fase in. We hopen dat de reacties op dit discussiestuk de basis zal kunnen vormen voor een nieuwe, aangescherpte versie.

Begrippenlijst

Factor
Bij vermenigvuldigingen spreken we van factoren. Bij vergroten en verkleinen gebruiken we de term factor voor het getal dat de maat van vergroting of verkleining aangeeft. Bijvoorbeeld bij het vergroten van foto's spreken we van factor om te refereren naar het getal waarmee de lengte en de breedte van de foto worden vermenigvuldigd. Als een foto $2\frac{1}{2}$ keer zo groot wordt, worden de afmetingen daarvan met een factor $2\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd en worden ze dus $2\frac{1}{2}$ keer zo groot (zie ook *lineair verband*).

Gewone tiendelige breuk
De term *gewone* tiendelige breuk gebruiken we in dit boekje voor gewone breuken waarvan de noemer een macht van tien is (10, 100, 1000, enzovoorts), zoals bijvoorbeeld $\frac{3}{10}$, $\frac{45}{100}$. We hebben het woord 'gewone' toegevoegd om aan te geven dat we hier niet de kommanotatie bedoelen.

Guided reinvention
(Zie *geleid heruitvinden*.)

Geleid heruitvinden
Het begrip heruitvinden (Freudenthal gebruikte meer de Engelse term 'guided reinvention') is een sleutelbegrip in realistisch reken-wiskundeonderwijs. Wiskunde is stukje bij beetje uitgevonden, vaak uit de behoefte om bepaalde problemen op te lossen. Door leerlingen deze uitvindingen als het ware te laten herbeleven, zien ze de noodzaak of meerwaarde van dit deel van de wiskunde in. Zo wordt recht gedaan aan het idee dat wiskunde een menselijke activiteit is en vooral ook een manier van denken en problemen oplossen.

Klassengesprek
Met een klassengesprek bedoelen we een echte discussie met de hele klas met veel inbreng van de leerlingen, gericht op het ontwikkelen van inzichten. Vaak zal het startpunt een wat lastiger rekenprobleem zijn waarbij de aanpak nog niet vastligt. Daardoor kunnen kinderen een beroep doen op de inzichten die ze zelf hebben. Door daarmee te redeneren kunnen ze nieuwe relaties leggen, en dus nieuwe inzichten ontwikkelen.

Lineair verband
We spreken van een lineair verband tussen twee grootheden als ze recht evenredig zijn. Dat betekent dat als je de een met een bepaalde factor vergroot de andere met dezelfde factor wordt vergroot. Bijvoorbeeld, er is een lineair verband tussen gewicht en prijs. Als 1 kilo appels € 1,20 kost, betekent het bijvoorbeeld dat een zak twee keer zo zwaar is ook twee keer zo duur is.

Maatwisseling
Berekeningen met kommagetallen in contextsituaties kunnen vaak vereenvoudigd worden door van maat te wisselen. Zo kan 4,62 meter bijvoorbeeld worden opgevat als 462 cm of 4620 millimeter. Maatwisseling heeft betrekking op een omzetting van het volledige getal. Het onderscheidt zich daarmee van het splitsen van getallen in een deel voor en een deel achter de komma, waar je afzonderlijk mee rekent.

Meetgetal
Een meetgetal is een getal dat een maat weergeeft. Het wordt dus altijd gevolgd door de maateenheid waarop dit betrekking heeft. Bijvoorbeeld bij 0,25 m of $\frac{3}{4}$ m zijn 0,25 en $\frac{3}{4}$ meetgetallen. In de context van 'Ieder krijgt $\frac{3}{4}$ brood' kunnen we $\frac{3}{4}$ ook zien als meetgetal als we het brood als maateenheid beschouwen.

Redeneren
Redeneren is de mentale activiteit van het zoeken naar argumenten om aannamen te onderbouwen, het leggen van relaties (tussen begrippen), of het ontdekken van nieuwe inzichten. Door het redeneren zijn kinderen bezig met inzichten en daarmee kunnen ze ook nieuwe inzichten construeren en dus echt leren.

Relatief getal
Wanneer breuken, verhoudingen, procenten of kommagetallen in een context worden gebruikt hebben ze altijd betrekking op een bepaalde eenheid: '$\frac{1}{3}$ van de Nederlanders', '20 procent van de prijs', '2,7 kilometer', enzovoort. De werkelijke waarde is afhankelijk van de eenheid en de getallen geven hier een deel-geheel-relatie weer. Om dit aspect aan te duiden spreken we van 'relatieve getallen'. Daartegenover stellen we de rol van deze getallen als absolute getallen wanneer we afzien van de context en alleen kijken naar relaties met andere getallen: '25 procent is meer dan 20 procent', '0,5 + 0,25 = 0,75'. Naast de benamingen relatief en absoluut gebruiken we ook de aanduidingen benoemde getallen en getallen als wiskundig object (zie ook wiskundig object).

Relatienet
De term relatienet wordt gebruikt om te refereren naar een netwerk van getalrelaties. Die ontstaan door relaties tussen getallen in contextsituaties te generaliseren.

Rationaal getal
Rationale getallen zijn getallen die genoteerd kunnen worden als een verhouding tussen twee hele getallen. Ze kunnen dus geschreven worden als een breuk. Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen zijn verschillende verschijningsvormen van rationale getallen.

Stambreuk
Stambreuken zijn breuken met teller 1.

Standaardiseren
Standaardiseren houdt in dat verhoudingen en breuken in makkelijk vergelijkbare getallen worden uitgedrukt. We standaardiseren verhoudingen door er procenten van te maken en de verhouding dus 'op 100' te zetten. Breuken kunnen we standaardiseren door ze te schrijven in termen van tienden, honderdsten, duizendsten, enzovoorts. Procenten en kommagetallen zijn dus gestandaardiseerde getallen.

Tiendelige breuk
De term tiendelige breuken wordt wel gebruikt om kommagetallen aan te duiden. Wij gaan ervan uit dat een tiendelige breuk op verschillende manieren genoteerd kan worden, bijvoorbeeld met een kommagetal (zoals 0,123) of een gewone tiendelige breuk (zoals $\frac{123}{1000}$). Wanneer we een getal aanduiden met tienden, honderdsten, duizendsten, enzovoort, spreken we van een tiendelige breuk.

Verdelen
De term verdelen wordt in dit boekje in algemene zin gebruikt, om alle deelsituaties aan te duiden.

Verhoudingsgetal
Een verhouding kan worden weergegeven door '3 : 5' of '3 op de 5'. Dit noemen we verhoudingsgetallen. We spreken ook wel van een verhoudingsnotatie.

Verhoudingssituatie
Een verhoudingssituatie is een contextsituatie waarbij een verhouding aanwezig is. Een verdeelsituatie zoals 'drie broden verdelen met z'n zevenen' is ook een verhoudingssituatie, omdat er een verhouding in staat, namelijk die tussen het aantal broden en het aantal mensen onder wie het verdeeld wordt.

Wiskundig object
Naast de benamingen relatief en absoluut (zie *relatief getal*) gebruiken we ook de aanduidingen benoemde getallen en getallen als wiskundig object. In wezen gaat het hier om dezelfde indeling, maar benadrukken we nu een ander aspect. Breuken en kommagetallen verschijnen in contextsituaties altijd met de bijbehorende eenheid, bijvoorbeeld '$\frac{1}{3}$ pizza', '1,63 meter' of '$\frac{1}{4}$ tank benzine'. Om het contextgebonden karakter van deze getallen te benadrukken spreken we van benoemde getallen. Aanvankelijk hebben deze getallen voor de leerlingen alleen betekenis in combinatie met deze benoemingen. Geleidelijk aan ontwikkelen de leerlingen echter een netwerk aan getalrelaties waaraan de getallen hun betekenis ontlenen en dus als zelfstandige objecten kunnen worden beschouwd. We spreken dan van getallen als wiskundige objecten.