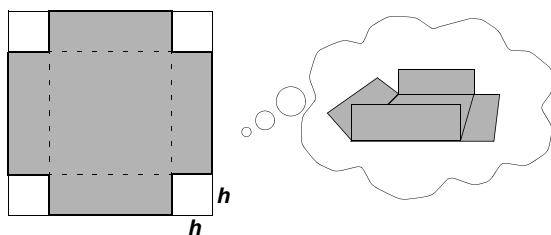


Wat te bewijzen is (40)

Rubriek

Een populair optimaliseringsprobleem uit de wiskunde op school betreft een doosje dat wordt gemaakt uit een stuk karton, een kwestie van vierkantjes losknippen en vouwen. Het idee is al behoorlijk oud: ik kwam het onlangs tegen in een algebraboek uit 1933, bestemd voor de eerste (!) klas van het toenmalige VMO (HBS en gymnasium). Nog sterker, het staat daar al in paragraaf 5 van het eerste hoofdstuk, maar dan niet met het oogmerk om een maximale inhoud te vinden, maar om een formule op te stellen die de inhoud uitdrukt in de hoogte van het doosje.



Het stuk karton is 20 bij 20 cm. Stel de zijde van het uitgeknipte vierkantje h cm – dat wordt de hoogte van het doosje – en stel de inhoud (in cm^3) gelijk aan I .

De beoogde formule (ik volg nu even het boek) wordt:

$$I = h \times (20 - 2h) \times (20 - 2h) \text{ of kort } I = h(20 - 2h)^2$$

Na nog een ander, meetkundig ingekleed voorbeeld volgt dan een paragraaf met veel opgaven, waarin de leerling zelf formules moet opstellen bij in korte teksten gegeven verbanden tussen twee of drie grootheden. Achter in het boek, zo'n vijftig paragrafen verder in het hoofdstuk *grafische voorstellingen*, komt het doosje terug. Ik citeer vrijwel letterlijk: *In een klas van 19 leerlingen krijgt iedere leerling een vierkant stuk dun karton van 20 cm lengte mee naar huis met de opdracht daar een doosje van te maken* (zoals hierboven aangeduid). *De leerlingen nemen elk een andere breedte voor de opstaande rand, te beginnen met $\frac{1}{2}$ cm en opklimmend met $\frac{1}{2}$ cm tot $9\frac{1}{2}$ cm. Op die manier komen de leerlingen op school met 19 verschillende doosjes ...*

De lezer voelt de bui al hangen: er wordt op gewezen dat wel te zien is dat de doosjes niet allemaal dezelfde inhoud hebben, dat het er op lijkt of ze, gerangschikt naar opklimmende hoogte eerst groter worden en daarna weer kleiner, kortom dat er een doosje bij is met een maximale inhoud. Vervolgens wordt bovenstaande formule van stal gehaald en gebruikt om een h - I -tabel op te stellen. Bij die tabel is dan op millimeterpapier een grafiek getekend en zowel de tabel als de grafiek voeden het vermoeden dat als de hoogte in de buurt van $3\frac{1}{2}$ cm ligt, de inhoud op zijn grootst is. Het exacte optimum wordt niet bepaald, en dat kan ook moeilijk want er is sprake van een derdegraadsfunctie. Tegenwoordig zou je zo'n opgave liever met een

hogere klas doen. De formule is dan dienstig als je de GR wilt gebruiken en die geeft desgevraagd een tabel of grafiek. De optimale h -waarde kan eenvoudig worden opgevraagd en mijn TI-83 geeft dan niet 3.5, maar 3.3333349. Leerlingen zullen dan geneigd zijn om te geloven dat die optimale waarde eigenlijk $3\frac{1}{3}$ is, dat is precies $\frac{1}{6}$ van de zijde van het kartonnen vierkant.

Er kan dan nog wat verder worden geëxperimenteerd waarbij 20 vervangen wordt door een ander getal. Het vermoeden dat de afgeknipte vierkante hoekjes steeds $\frac{1}{6}$ van de zijde van het karton moeten zijn, dringt zich op. Dit alles kan een mooie inleiding vormen op een opgave binnen de differentiaalrekening: het kartonnen vierkant krijgt de zijde a en de leerling wordt gevraagd te *bewijzen* dat de inhoud maximaal is voor $h = \frac{1}{6}a$.

Verzin eens een list

Ik ga zo'n vierhonderd jaar terug in de tijd, de differentiaalrekening is nog niet geboren. Voor het oplossen van optimaliseringsproblemen (als van het doosje) moet ik een list verzinnen. De list die hier werkt, is de volgende. Stapel vier identieke doosjes op elkaar en er ontstaat een blok met een vierkant grondvlak van $a - 2h$ bij $a - 2h$ en met hoogte $4h$. Omdat nu de som van de drie ribben die in één punt samenkomen constant is, namelijk $2a$, zal het product ervan (dus 4 keer de inhoud van één doosje) maximaal zijn als de drie ribben aan elkaar gelijk zijn. En dat betekent: $a - 2h = 4h$ ofwel $h = \frac{1}{6}a$.

Op de een of andere manier heb ik nu het gevoel dat ik het beter begrijp dan als ik het probleem oplos met de standaardmethode 'differentiëren naar h en afgeleide nul stellen'. Maar ja, ik gebruik hier wel een stelling – 'eerlijke' verdeling van een getal in drieën levert het maximale product – die weliswaar plausibel is, maar eerst bewezen moet worden. Ik maak me er hier vanaf met een verwijzing naar een vroege aflevering van deze rubriek (die van maart 1999).

Doosje uit een rechthoek

De superioriteit van de methode die door Leibniz in 1684 wereldkundig is gemaakt, blijkt echter als ik het vierkant stuk karton vervang door een rechthoek met ongelijke zijden, zeg van a en b cm ($a < b$). De stapeltruc werkt nu niet omdat $a - 2h < b - 2h$ voor iedere waarde van h .

Er zit nu weinig anders op dan het differentiëren van

$$I = h(a - 2h)(b - 2h)$$

Ik pas Leibniz' productregel toe voor een trio:

$$\begin{aligned} I'(h) &= (a - 2h)(b - 2h) - 2h(b - 2h) - 2h(a - 2h) \\ &= 12h^2 - 4(a + b)h + ab \end{aligned}$$

Dat wordt dus een vierkantsvergelijking kraken.

Eerst even kijken naar de discriminant:

$$D = 16(a+b)^2 - 48ab = 16(a^2 - ab + b^2)$$

Die is zeker positief, want bijvoorbeeld:

$$a^2 - ab + b^2 = (a-b)^2 + ab$$

Deze controle is eigenlijk overbodig, want de volledige derdegraadskromme, waarvan een deel het verband tussen I en h illustreert, gaat door $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}a, 0)$ en $(\frac{1}{2}b, 0)$ en dat betekent dat er één lokale top is en ook één dal. Denkend aan het doosje ben ik alleen geïnteresseerd in het punt waarvan de h -coördinaat tussen 0 en $\frac{1}{2}a$ ligt. De top aldaar correspondeert met de kleinste wortel van de vergelijking $I'(h) = 0$ en dat is:

$$\frac{1}{6}(a+b) - \frac{1}{6}\sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

Even checken: voor $a = b$ wordt dit $\frac{1}{6}a$, okay.

Rationale oplossingen

Een leraar die een doosjessom wil opgeven aan zijn leerlingen, kiest twee (ongelijke) gehele getallen voor a en b . Als hij dit blind doet, is de kans heel groot dat de optimale x -waarde irrationaal is. Hoe kan hij ervoor zorgen dat het vraagstuk een 'mooie' (ofwel rationale) oplossing heeft? Het komt er op neer dat hij a en b zo wil kiezen, dat $a^2 - ab + b^2$ een kwadraat (van een geheel getal) is. Misschien heeft hij een gelukkige hand en kiest hij $a = 5$ en $b = 8$. Dat geeft $a^2 - ab + b^2 = 49$ en dat leidt dan tot de optimale waarde $h = 1$. De vraag is nu of er meer van zulke mooie keuzes zijn. Dit is typisch een probleem dat we diophantisch noemen. De naamgever Diophantos loste dit soort problemen op ingenieuze wijze op, maar tegenwoordig wordt bij de aanpak van zo'n probleem bij voorkeur gebruik gemaakt van elementaire algebra en analytische meetkunde. Dat gaat dan zó.

Stel: $a^2 - ab + b^2 = c^2$ met a, b, c geheel.

Daaruit volgt:

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \quad \text{met } x = \frac{a}{c} \quad \text{en } y = \frac{b}{c}$$

Het komt er nu op aan om punten met rationale coördinaten te vinden op een tweedegraadskromme. Aan de vergelijking is te zien dat de lijnen $x - y = 0$ en $x + y = 0$ symmetrie-assen van de kromme zijn en het kwadratische gedeelte moet dus ook te schrijven zijn als

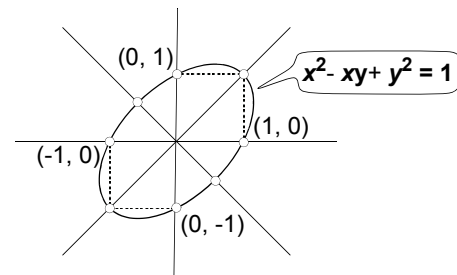
$$p(x+y)^2 + q(x-y)^2$$

Inderdaad blijkt dit te kloppen voor $p = \frac{1}{4}$ en $q = \frac{3}{4}$.

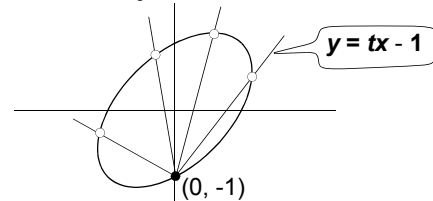
Nu weet ik dat de kromme een ellips is. Die ellips snijdt de coördinaatassen in de roosterpunten $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ en $(0, -1)$ en de lijn $x = y$ in $(1, 1)$ en $(-1, -1)$.

Ik merk nog op dat de punten op de andere symmetrie-as irrationaal zijn: $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$ en $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$.

Om nu oneindig veel rationale punten te vinden, wil ik een parametervoorstelling van de ellips opstellen, waarbij x en y rationale functies van de parameter t zijn.



Dit kan worden bereikt door een lijn om een roosterpunt van de ellips te laten draaien en het tweede snijpunt uit te drukken in de richtingscoëfficiënt van die lijn. Ik neem nu voor het draaipunt $(0, -1)$ en de richtingscoëfficiënt zal de parameter t zijn.



De vergelijking van de draaiende lijn is dan $y = tx - 1$. Substitutie van $y = tx - 1$ in de ellipsvergelijking geeft:

$$x^2 - x(tx - 1) + (tx - 1)^2 = 1$$

Dat $x = 0$ hieraan voldoet, ongeacht de waarde van t , is op (meetkundige) voorhand duidelijk. Na uitwerken kan ik dus delen door x en zo komt er

$$(t^2 - t + 1)x = 2t - 1$$

Daaruit en uit $y = tx - 1$ vind ik de coördinaten van het tweede snijpunt en daarmee de parametervoorstelling:

$$x = \frac{2t-1}{t^2-t+1} \quad \text{en} \quad y = \frac{t^2-1}{t^2-t+1}$$

Bij elke rationale waarde van t krijg ik zo een rationaal punt van de ellips. Vervang ik nu t door $\frac{m}{n}$, met m en n geheel, dan vind ik:

$$x = \frac{2mn-n^2}{m^2-mn+n^2} \quad \text{en} \quad y = \frac{m^2-n^2}{m^2-mn+n^2}$$

Terug naar de diophantische vergelijking:

$$a^2 - ab + b^2 = c^2$$

Daarvan ken ik nu oneindig veel oplossingen:

$$a = 2mn - n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 - mn + n^2$$

met m, n natuurlijke getallen. Voor wie het niet vertrouwt, ligt hier een mooie algebra-oefening: substitueer deze vormen voor a, b en c en werk uit.

Andere geheeltallige oplossingen dan die beschreven worden door bovenstaande formule, zijn er niet.

Bij de keuze van m en n voer ik een beperking in. De voorwaarde $a < b$ is gelijkwaardig met $2n < m$. En om 'gelijkvormige' oplossingen uit te sluiten, neem ik voor m, n onderling ondeelbare getallen.

Zo krijg ik de tabel:

m	n	a	b	c	h
3	1	5	8	7	1
4	1	7	15	13	$1\frac{1}{2}$
5	1	9	24	21	2
5	2	16	21	19	3
6	1	11	35	31	$2\frac{1}{2}$
7	1	13	48	43	3
7	2	24	45	39	5
7	3	33	40	37	6
8	1	15	63	57	$3\frac{1}{2}$
8	3	39	55	49	$7\frac{1}{2}$

De verhouding h staat tot a

Bij het doosje met vierkante bodem (het randgeval $a = b$) is de optimale hoogte van het doosje gelijk aan $\frac{1}{6}a$. Hoe zit dat bij een doosje met niet-vierkante bodem?

Ik ga terug naar de laatste kolom van de tabel waarin de optimale hoogte (h) van het doosje is genoteerd. Als ik de verhouding h/a bekijk voor die gevallen, dan blijkt de variatie van de verhouding h/a verrassend klein te zijn. De uitkomsten, afgerond in twee decimalen achter de komma, zijn achtereenvolgens: 0,20; 0,21; 0,22; 0,19; 0,23; 0,23; 0,21; 0,18; 0,23; 0,19.

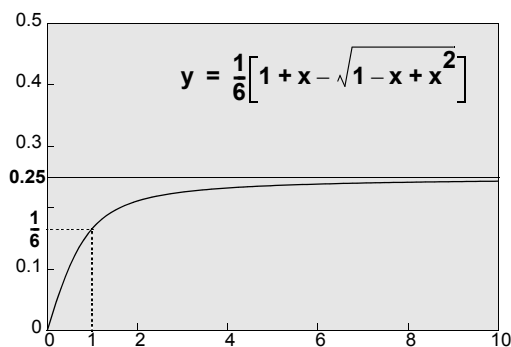
Dat vraagt om nader onderzoek! Om het gedrag van de verhouding h/a te bestuderen, bekommer ik me niet meer om rationale uitkomsten van h . Ik ga uit van een willekeurige rechthoek waarvan de lengte λ keer de breedte is, dus $b = \lambda a$ met $\lambda \geq 1$. De optimale waarde voor h kan nu worden uitgedrukt in λ en a :

$$h = \frac{1}{6}a[1 + \lambda - \sqrt{1 - \lambda + \lambda^2}]$$

De verhouding h/a is slechts afhankelijk van λ :

$$\frac{h}{a} = f(\lambda) = \frac{1}{6}[1 + \lambda - \sqrt{1 - \lambda + \lambda^2}]$$

Nu kan ik de GR of een ander programma gebruiken om via een grafiek het onderzoek te vervolgen:



Als ik dit op de TI-83 doe en de cursor over de grafiek laat wandelen, kom ik helemaal rechts op een y -waarde in de buurt van 0.243. Zou er sprake zijn van een horizontale asymptoot bij 0.25? En is de grafiek overal stijgend?

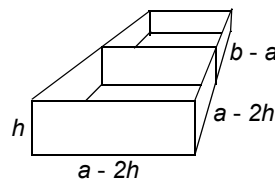
Beide vragen kunnen met ja worden beantwoord. Het is een mooie oefening in algebra en in differentiaalrekening om dit te verifiëren, ik laat dit aan de lezer. Het resultaat wetigt de stelling:

als h de optimale hoogte van het doosje en a de kortste zijde van het vel karton is, dan: $\frac{1}{6}a \leq h < \frac{1}{4}a$

Een nieuwe list

Kan ik dit resultaat *echt* snappen en zo ja, hoe?

Wel, ik plaats een tussenschotje in het doosje:

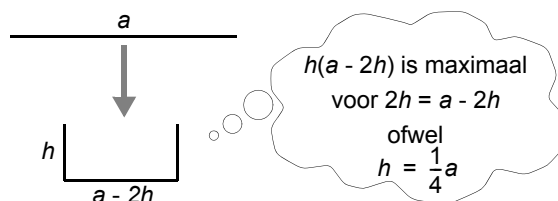


De inhoud wordt nu in twee delen gesplitst:

$$I(h) = \underbrace{h(a-2h)^2}_{V(h)} + \underbrace{h(a-2h)(b-a)}_{R(h)}$$

Van $V(h)$ weet ik dat zij maximaal is voor $h = \frac{1}{6}a$

De bepaling van het maximum van $R(h)$ komt neer op het vinden van het maximum van $h(a-2h)$ en dat is ook al een oude bekende uit de schoolboeken.



Hoe weet ik zeker dat de waarde van h , waarvoor de som $I(h) = V(h) + R(h)$ maximaal is, tussen de twee optimale waarden $\frac{1}{6}a$ en $\frac{1}{4}a$ moet liggen?

Denk aan de grafieken van V en R op het interval $[0, \frac{1}{2}a]$. Zij hebben de snijpunten met de h -as gemeenschappelijk en ze hebben allebei één top. De top van V ligt links van de top van R .

Voor $h = \frac{1}{6}a$ geldt $V'(h) = 0$ en $R'(h) > 0$, want R heeft zijn top daar nog niet bereikt, en dus $I'(h) > 0$.

Voor $h = \frac{1}{4}a$ geldt $R'(h) = 0$ en $V'(h) < 0$, want V is al over zijn top heen, en dus $I'(h) < 0$.

De h -waarde die $I'(h)$ nul maakt, ligt daarom tussen de genoemde h -waarden in! Hoe groter de factor $b-a$ in $R(h)$, hoe dichter die h -waarde bij $\frac{1}{4}a$ ligt.

Als a constant is en b onbeperkt aangroeit, nadert de waarde van h waarvoor $I(h)$ maximaal is, tot de grens $\frac{1}{4}a$.

Het ogenschijnlijk wat vergeelde doosjesprobleem blijkt een rijke 'proof'-tuin, waarin het dankbaar spitten is.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl