Wat kan er in de klas gebeuren als een leerling een verhaal of opdracht navertelt die hij of zij van horen zeggen heeft? Wiskundigen kennen dat wel: je hoort een mooi probleem en vertelt het door aan iemand anders. Hier komt een aantal aspecten bijeen: de opdrachten en verhalen die de klas op deze manier inkomen, maken vaak deel uit van de zeer lange traditie van plezierwiskunde, zijn uitdagend, gaan meestal over de grenzen van de schoolwiskunde heen en dragen bij aan het gevoel van eigenwaarde van de verteller. In deze zin is dit voor in de klas een activiteit die verschillende wiskundige aspecten integreert, aldus **Jan van Maanen**.

'Doorvertelwiskunde' – een activiteit die integreert

Net voor het begin van de les

Formeel is de les al enkele minuten geleden begonnen, met de bel die de wisseling van lokalen aangaf. Er komen nog steeds leerlingen binnen, de leraar zit nog aan zijn bureau en denkt na over het juiste moment om zijn stem te verheffen. Een van de leerlingen, een jongen, komt naar hem toe en zegt:

> Meneer, ik heb een som voor u. Wilt u hem maken?
> Leraar: Ja, graag, vertel maar.
> Jongen: Het is een vermenigvuldiging... Hij begint met $(x-a)(x-b)(x-c)$ en gaat zo door.
> De leraar speelt z'n rol goed, en begint te rekenen. Na een tijdje stopt hij, kijkt de jongen aan en zegt: Oh, ik zie het al, de uitkomst is nul; ik hoef niet verder te rekenen, want er is een factor $(x-x)$, en als in een vermenigvuldiging een van de factoren nul is, is het hele product nul.

De leerling lijkt tevreden. De leraar heeft het juiste antwoord gevonden, maar hij heeft er in ieder geval even over moeten nadenken. De leraar lijkt ook tevreden. Hij is de uitdaging aangegaan. Intussen is de klas compleet en kan de les beginnen.

De doorvertelproblemen

De vermenigvuldiging met uitkomst nul is misschien niet het prototype voor het soort probleem in wat ik 'doorvertelwiskunde' wil noemen. Toch heb ik ervoor gekozen het als eerste aan bod te laten komen.

De eerste reden om dat te doen, is dat het verhaal mij echt overkomen is in mijn tijd als leraar in het voortgezet onderwijs. Ik heb het 26-factorenprobleem zelfs meerdere keren gehoord, soms met jaren tussenruimte, en mijn diep nadenken voordat ik het antwoord 'zag' was steeds toneelspel, afgezien misschien van de eerste keer dat ik het probleem tegenkwam. In dat opzicht is dit probleem wel karakteristiek, aangezien ik het nu vrijwel alleen ga hebben over wiskunde die mij verteld is. 'Doorvertelwiskunde' gaat uiteraard verder dan de waarnemingen van één persoon, maar het persoonlijke perspectief is ook waardevol, want je kunt zelf waarnemen en bewijzen dat de traditie van de 'doorvertelwiskunde' nog steeds springlevend is.

De tweede reden om met deze vermenigvuldiging te beginnen, is dat deze naar voren kwam in een onderwijscontext, met een duidelijk doel: het uitproberen van de leraar. Veel van de volgende voorbeelden zijn afkomstig uit het onderwijs, en de functie in de klas van deze 'mondelinge' opdrachten is een van de hoofdonderwerpen van dit artikel.

Veel problemen uit de mondelinge traditie hebben een lange geschiedenis. Dat is niet het geval voor het vermenigvuldigingsprobleem; ik heb er in ieder geval geen vroege bronnen voor kunnen vinden, dus voor wat betreft de historische dimensie is dit probleem niet representatief. Andere ervaringen laten deze historische dimensie van de mondelinge traditie wel zien.

Na deze inleidende opmerkingen kan de kern van dit artikel worden geformuleerd: hoe vindt de traditie van 'doorvertelwiskunde' zijn weerslag in de ervaring van één individuele wiskundige, en wat kan de waarde zijn van doorvertelwiskunde, en dan met name de historische dimensie, in het wiskundeonderwijs?

Honderd 'vogels'

Het oudste probleem in mijn verzameling is door mijn vader meegenomen van zijn werk. Mijn vader heeft zijn hele carrière doorgebracht bij de posterijen, toen nog staatseigendom onder de naam PTT. Hij was een kantoorman die veel papierwerk deed. Afgezien van wat basiskennis van school (HBS met 'vijfjarigen cursus', met de nadruk op talen en boekhouden en zonder bètavakken), had mijn vader geen wiskundige achtergrond, of wiskundige interesse. Het was daarom nogal opvallend toen hij mij op een avond een probleem voorschotelde dat hij van een collega op z'n werk had gehoord. Als ik het me goed herinner, zat ik ergens in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs (ik was 16 of 17). Ik heb mijn vader toen hij al ruim met pensioen was, gevraagd of hij zich het voorval herinnerde, maar hij was het helemaal vergeten. Het probleem ging als volgt:

> Iemand heeft honderd gulden, en wil daar honderd dieren voor kopen. Hij kan kiezen tussen koeien, varkens en kippen. Een koe kost 5 gulden, een varken 1 gulden, en een kip 25 cent (een kwartje). Hoeveel moet hij er van iedere diersoort nemen?

Ik ging naar mijn kamer, en ik herinner me nog steeds dat, voordat ik ook maar iets opschreef, ik in de war werd gebracht door de combinatie van twee vergelijkingen en drie onbekenden; ook was ik verrast door het feit dat de extra voorwaarde dat de antwoorden geheeltallig moeten zijn, het oneindige aantal reële oplossingen terugbracht tot niet meer dan een paar. Ik was ook verrast door het feit dat ik moest redeneren om de oplossingen te vinden. Op school was wiskunde veel meer het nadoen van de leraar.

En voor wat betreft de wiskunde: het systeem

$$\begin{aligned} x+y+z &= 100 \\ 5x+y+0,25z &= 100 \end{aligned}$$

reduceert tot één vergelijking in x en z. Deze vergelijking, $16x = 3z$ moet geheeltallige oplossingen hebben, en hier kwam de niet-schoolse wiskunde om de hoek kijken. Aangezien 3 en 16 geen gemeenschappelijke factoren hebben, is de kleinste oplossing met positieve gehele getallen $x = 3$ en $z = 16$, hetgeen $y = 81$ geeft. De andere oplossingen zijn $(6, 62, 32)$, $(9, 43, 48)$, $(12, 24, 64)$ en $(15, 5, 80)$.

Dit probleem, dat bekend staat als het 'probleem van de 100 vogels', heeft in de loop der tijden de wereld afgereisd. Het komt in China al voor in het werk van Chang Ch'iu-chien, rond 485 n.Chr., zelfs met vogels (hanen, hennen, en kuikens) maar met andere prijzen $\left(5, 3, \frac{1}{3}\right)$. Chang Ch'iu-chien ziet al dat er voor deze prijzen drie drietallen gehele getallen zijn die het probleem oplossen. Vervolgens wordt het probleem aangetroffen in India (onder andere bij Mahavira in de negende eeuw, en bij Bhaskara II in de elfde eeuw), in Arabische teksten (onder andere Abu Kamil in de negende eeuw) en in Byzantium. De oudste Latijnse tekst *Propositiones ad acuendos juvenes* ('vraagstukken om (het verstand van de jeugd te scherpen') die wordt toegeschreven aan Alcuin van York (c. 732-804) is vrij vroeg. Het oudste manuscript waarin 'Alcuin' bewaard is gebleven, dateert uit de negende eeuw. 'Alcuin' heeft meerdere varianten van het probleem (zie Folkerts, 1978, p. 37), maar zijn Probleem 39 ligt duidelijk erg dicht bij de versie die ik hierboven aanhaalde. Het betreft een koopman die in het Oosten honderd dieren wil kopen voor honderd *solidi*. Acceptabele prijzen zijn: 5 *solidi* voor een kameel, 1 *solidus* voor een ezel, en twintig schapen voor 1 *solidus*. In dit geval is er een unieke oplossing $(19, 1, 80)$, die Alcuin geeft zonder hem af te leiden; ongeveer op dezelfde manier als waarop ik mijn oplossingen aan mijn vader gaf. Singmaster merkt op dat dezelfde prijzen voorkomen in het werk van Abu Kamil, maar dan voor eenden, kippen en mussen (Hadley & Singmaster, 1992, p. 120).

Het probleem ging blijkbaar uitgebreid rond. Na Alcuin zien we het bij veel van de grote wiskundigen uit de middeleeuwen en de Renaissance terug in een of andere vorm: Fibonacci, Regiomontanus, Pacioli, Rudolff, Apianus, Ries, Cardano, Tartaglia en later nog bij vele anderen. Euler neemt de honderd vogels op in zijn uitleg van Diophantische vergelijkingen (*Von der unbestimmten Analytic*, in zijn *Anleitung zur Algebra*, deel 2, sectie 2, hoofdstuk 1, vraag 4; Euler, 1770, 1911, pp. 342–344)

> Iemand koopt honderd stuks vee voor 100 Rthl. 1 os kost 10 Rthl., 1 koe 5 Rthl. 1 kalf voor 2 Rthl. en 1 schaap voor $\frac{1}{2}$ Rthl. Hoeveel ossen, koeien, kalveren en schapen waren er?

In de vergelijkingen

$$\begin{aligned} p+q+r+s &= 100 \\ 10p+5q+2r+\frac{1}{2}s &= 100 \end{aligned}$$

elimineert Euler de s en herformuleert de overgebleven vergelijking tot

$$r = 33-6p-3q+\frac{1-p}{3}$$

Aangezien r geheeltallig is, moet $p-1$ een veelvoud van 3 zijn, dus geeft Euler

$$\begin{aligned} p &= 3t+1 \\ q &= q \\ r &= 27-19t-3q \\ s &= 72+2q+16t \end{aligned}$$

Aangezien r niet negatief kan zijn, moet $19t+3q$ minder dan of gelijk zijn aan 27, wat alleen mogelijk is als $t = 0$ of $t = 1$. Het eerste geval ($t = 0$) geeft $p = 1$ en aangezien $r = 27-3q \geq 0$, kan q tussen 0 en 9 liggen. Het tweede geval ($t = 1$) leidt tot $p = 4$, en via $r = 8-3q \geq 0$ tot drie mogelijke waarden voor q, te weten 0, 1 en 2. Euler vindt in totaal dertien oplossingen. Als er van iedere soort minstens een dier moet zijn, blijven er in totaal tien oplossingen over.

Het repertoire uitbreiden

In de loop der jaren voegde ik verschillende problemen en verhalen toe aan mijn verzameling. Lessen en colleges waren de gelegenheden waar ik ze opving. Hier lopen we duidelijk tegen een definitieprobleem aan, want als ik alles wat ik tijdens colleges hoor als ‘doorvertelwiskunde’ zou bestempelen, zou de lengte van dit artikel alle grenzen van het redelijke overschrijden. Dus wat ik hier op zal nemen, zijn de onverwachte zijsprongen, het stukje over getaltheorie midden in een college over analyse, het onverwachte deel van het college.

Open vermoedens zijn goed materiaal voor zijsprongen. Op de universiteit was dit hoe de laatste stelling van Fermat en het vermoeden van Goldbach werden verteld. Ik zal me hier concentreren op Goldbach, waarover ons werd verteld dat dit een lang bestaand probleem was: “Los het op en je bent beroemd.” Een van de aantrekkelijke punten van het vermoeden is dat het makkelijk te onthouden is:

> Ieder even getal vanaf 4 kan worden geschreven als de som van twee priemgetallen.

Het vermoeden werd in 1742 door Goldbach opgeschreven in een brief aan Euler, met de uitdrukkelijke bedoeling om nieuwe wisundige theorie uit te lokken. Als wiskundeleraar haalde ik regelmatig het vermoeden van Goldbach aan – hopelijk niet steeds in dezelfde klas – als voorbeeld van een goed te begrijpen wiskundige bewering die nog steeds niet bewezen is. Het is in de wiskunde niet altijd even makkelijk om te bewijzen dat een bewering waar of onwaar is; en de roem is voor degene die de sleutel vindt – denk aan het geval van de laatste stelling van Fermat, waaraan sinds 1993 de naam van Andrew Wiles verbonden is.

Nog een van deze verhalen, verteld als zijsprong in een college (ik kan me niet meer herinneren waar het college over ging of wie het gaf), ging over het Hilberthotel. Het hotel heeft een oneindig aantal kamers, met de nummers 1, 2, 3 enzovoort. Als het hotel vol is, komt er iemand die een kamer zoekt. Geen probleem, het hotelmanagement verplaatst de mensen in kamer n naar kamer $n+1$ $(n \in \{1, 2, 3, \ldots\})$ of, als ze slim zijn, de mensen in kamer 10^n naar kamer 10^{n+1}, aangezien dat minder klachten zal geven.

Er komt een bus aan. Er zijn geen kamers gereserveerd, maar toch moeten er veertig klanten tevreden worden gesteld. Geen probleem om ze onderdak te bieden. Of de verplaatsingen van kamer n naar kamer $n+40$, of de verplaatsingen van kamer p^n naar kamer p^{n+1} (waarbij p een verzameling van veertig priemgetallen doorloopt), geven genoeg vrije kamers. En opnieuw is het Hilberthotel vol.

Wat nu als er een Hilbertbus, met een oneindig aantal passagiers, stopt op de parkeerplaats? Nu is de procedure van het hotel dat de gasten in kamer n “vriendelijk gevraagd” wordt naar kamer $2n$ te gaan, en de nieuwkomers krijgen de oneven kamers. En zo ging het verhaal door. Het eindigde met het geval waarin het hotel vol was en een oneindig aantal Hilbertbussen voorreed. Nu bepaalt de diagonaalmethode de volgorde waarin de nieuwkomers hun bus uit mogen en naar hun kamer toe kunnen. In de geheime taal van de wiskunde: een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is aftelbaar, en daar nauw aan verwant: de rationale getallen zijn aftelbaar.

Ik heb het Hilberthotel in mijn school gebruikt in mijn vijfde klas, waar ik de lessen begon met een kort – zo’n drie minuten lang – wiskundeverhaal dat buiten het normale onderwerp van de les lag. Het Hilberthotel heeft enkele weken gefigureerd (we hadden vier lesuren per week), waarbij de leerlingen steeds het nieuwe probleem waar het hotelmanagement tegenaan liep, als huiswerk meenamen.

En wat betreft de historische dimensie: ik weet niet wie deze plezierige en rijke transformatie van de theorie van aftelbare verzamelingen naar het Hilberthotel heeft ontworpen, maar de bijbehorende theorie is vrij recent. Het idee van aftelbaarheid is geïntroduceerd door Cantor in de jaren 1870. In mijn klas eindigde ik mijn serie over het Hilberthotel met een paar minuten over deze geschiedenis, en de toenemende strengheid en axiomatisering aan het einde van de negentiende eeuw. Als los kort verhaal zou dit weinig effect hebben gehad, maar nadat de fundering was gelegd, liep ook dit historische aspect goed.

Een andere aanwinst op het gebied van ‘doorvertelwiskunde’ komt uit een college van een collega. Aangezien ik een werkcollege zou geven over hetzelfde onderwerp, woonde ik het college bij. Dit college was bedoeld voor een algemeen publiek van aanstaande leraren biologie, natuur- en scheikunde. Het kon dus niet té wiskundig, scheikundig etcetera zijn. De docent had besloten een bewijs van de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ te geven, en wel een bewijs dat ik nog nooit eerder had gezien. Later ontdekte ik dat het afkomstig was uit een artikel van H.-J. Waschkies (1971), maar in eerste instantie hoorde ik ervan door ‘doorvertelwiskunde’. Hoewel het een recent bewijs is, is de stijl klassiek en past het goed bij het Griekse steentjesrekenen en technieken die door Nikomachos gebruikt werden.

Het bewijs is er een uit het ongerijmde (zie ook figuur 1). Gesteld dat $\sqrt{2}$ rationaal is, dan kan het in zijn meest vereenvoudigde vorm worden geschreven als $\frac{p}{q}$, dus we stellen dat p en q de kleinst mogelijke getallen zijn die voldoen aan $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Maak nu een vierkant van $p \times p = p^2$ steentjes. Aangezien $p^2 = 2q^2$, kan het grote vierkant van p^2 steentjes worden vervangen door twee kleinere vierkanten van elk q^2. Als je deze vierkanten tekent binnen de matrix van $p \times p$, de een linksonder, de ander rechtsboven, dan zullen als gevolg van symmetrie de twee $q \times q$-vierkanten (I+III en I+V in figuur 1) overlappen in een vierkant (I). Aangezien de twee $q \times q$-vierkanten alle steentjes uit de $p \times p$-matrix bevatten, is het aantal steentjes in (I+III) plus het aantal steentjes in (I+V) gelijk aan het aantal steentjes in (I+II+III+IV+V), en is daarom het aantal steentjes in I gelijk aan het aantal steentjes in II+IV. Dat echter is onmogelijk, aangezien de figuren I, II en IV vierkanten zijn, en II en IV congruent zijn; dit zou veronderstellen dat er een oplossing met kleinere getallen is voor $x^2 = 2y^2$ dan (p, q), terwijl wij veronderstelden dat (p, q) de kleinste was. We stellen vast dat er geen oplossing in integers is voor $x^2 = 2y^2$, met andere woorden dat $\sqrt{2}$ irrationaal is.

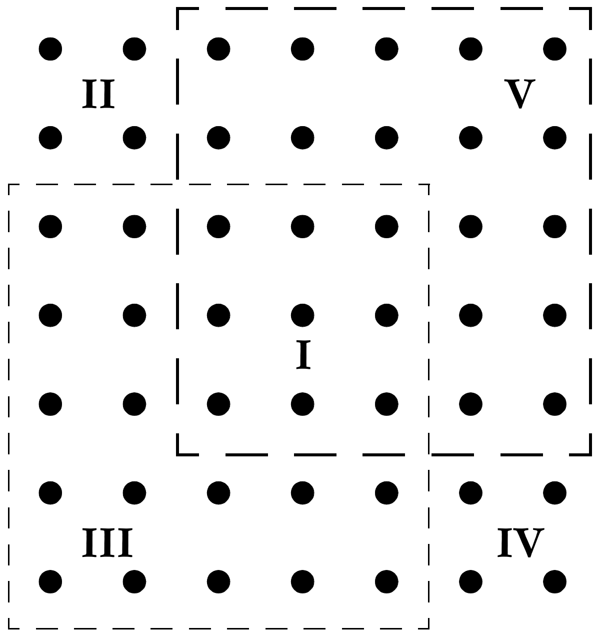

fig. 1 'Bewijs met steentjes' dat $\sqrt{2}$ irrationaal is.

Educatieve waarde

Ik open de discussie van de educatieve waarde van 'doorvertelwiskunde' met nog een voorbeeld.

Stelt u zich een klas met zestienjarigen voor tijdens de laatste les voor een vakantie, een les die gegeven moet worden zelfs al heb je het hele lesboek voor dat tijdvak al behandeld. Leerlingen stelden voor dat we problemen van buiten het boek zouden doen, problemen die zij en ik uit ons hoofd kenden. Ik ging hier graag op in, omdat dit me een goede activiteit voor een dergelijke les leek.

Ik herinner me één leerling en één probleem met name. De klas had besloten dat zij mij een probleem zouden voorleggen, en Liesbeth zei dat ze een goede opdracht wist. Wiskunde was niet Liesbeths favoriete vak, maar deze keer was ze vastbesloten en in een goede bui, en dit was het probleem waarmee ze op de proppen kwam:

> Je volgt een weg en bereikt een splitsing, waar je moet kiezen tussen twee routes om verder te gaan. De ene leidt naar geluk, de andere naar eeuwig verdriet. Twee broers bewaken de splitsing, ze weten allebei wat de bestemmingen van de wegen zijn. Een van de twee spreekt altijd de waarheid, een van de twee liegt altijd. Je mag één van hen één vraag stellen. Wie stel je welke vraag?

In Cartesiaanse stijl wil ik de lezer niet het plezier van het zoeken en vinden van een oplossing ontnemen. Dus laat mij nu proberen conclusies te trekken op basis van de voorgedragen voorbeelden.

Uitdaging

Wat me in eerste instantie opvalt, is het aspect van de uitdaging. Bij het zesentwintig-factorenprobleem en het probleem van de twee broers waren de leerlingen nieuwsgierig of de leraar in staat zou zijn het probleem op te lossen, net zoals ik me afvroeg welke leerlingen het juiste antwoord zouden hebben op het volgende antwoord in de serie over het Hilberthotel.

Onverwacht bewijs voor dit aspect van uitdagingen komt van een krantenadvertentie, waar problemen uit de mondelinge traditie worden gebruikt om de lezer uit te dagen en het bedrijf dat adverteert te etaleren als een uitdagende werkomgeving. Eiffel, een bedrijf dat zichzelf presenteert als consultant op financieel-economisch en economisch-juridisch gebied en dat actief is op drie terreinen (handel en industrie, banken en verzekeringen, openbare werken en non-profit) was via een advertentie in *Carp* 17 (1999) op zoek naar 'juridisch personeel met motivatie'. "Als jij m/v ook denkt dat het aardigste aan een probleem niet het probleem is, maar de oplossing, zou je wel eens heel goed bij Eiffel kunnen passen," etcetera.

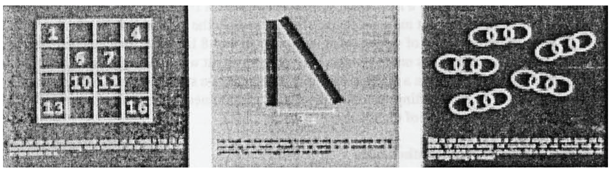

fig. 2 Afbeeldingen uit een personeelsadvertentie.

Grote teksten met zes illustraties die elk een min of meer wiskundig probleem bevatten. In figuur 2 staan drie van deze problemen afgebeeld: een magisch vierkant van 4×4 waarbij de acht ontbrekende nummers moeten worden aangevuld (dit doet me sterk denken aan het vierkant in Dürers *Melencholia* (1514)). In de tekst staat dat de som van iedere rij en iedere kolom

34 zou moeten zijn. Het tweede probleem gaat over een tien meter hoge boom die is afgebroken en drie meter van zijn wortel de grond raakt. De vraag is hoe hoog boven de grond de boom is afgebroken. De getallen zijn nog dezelfde als in de *Chiu Chang Suan Shu* uit de vroege Han-periode (tussen 202 voor Christus en 9 na Christus), alleen is het Chinese bamboe vervangen door een boom, maar dat was in Italië in de Renaissance al het geval (bij Calandri in 1491 bijvoorbeeld). Het derde probleem verwijst naar de activiteiten van het bedrijf, aangezien de lezer wordt gevraagd het grootste effect met de minste middelen te bereiken. De opdracht is om van vijf onderdelen met ieder drie verbindingen één ketting te maken. Een verbinding breken kost een gulden, hem weer sluiten een rijksdaalder. Wat is de goedkoopste manier?

Er zijn overal uitdagingen; het werk van het bedrijf wordt als uitdagend gepresenteerd, maar de belangrijkste uitdaging is toch die aan de lezer. Het bedrijf zoekt namelijk "high potential starters"; blijkbaar ben je dat niet als je deze wiskundige raadsels niet kunt oplossen.

Het gewone gemengd met het onverwachte

Een tweede karakteristiek waar ik graag op wil wijzen, is de mengeling van gewone en onverwachte elementen. Over het algemeen zijn de problemen in alledaagse taal geformuleerd. Maar de oplossing vereist ook vaak een ongewone stap, iets wat je over het hoofd kan zien. Welbekend is hier het probleem van de man die een wolf, een geit en een aantal kolen een rivier over moest brengen (Alcuin's Probleem 18; Hadley & Singmaster, 1992, p. 112). De oplossing hangt op het inzicht dat het wellicht nodig is dat een of meer van de passagiers de rivier meerdere malen oversteekt. Dat je aan de overkant bent, betekent niet dat je daar moet blijven. Het niet onderkennen van deze oplossing kan worden vergeleken met de apenval: een kokosnoot wordt uitgehold via een gat in de schil dat groot genoeg is voor de hand van een aap. De kokosnoot wordt ergens vastgemaakt, en er wordt wat rijst ingedaan. De aap steekt zijn hand erin, en pakt de rijst in zijn hand. Hierdoor is de diameter van de hand groter en past deze niet meer door het gat. De vrijheid is vlakbij (de aap hoeft alleen maar z'n hand te openen), maar wat dichtbij is, wordt vaak over het hoofd gezien.

Vergelijkbare verschijnselen spelen een rol bij het oplossen van problemen uit de mondelinge traditie. Een kijkje in de literatuur levert meer bewijs hiervoor; kijk bijvoorbeeld naar het probleem van het verdelen van acht liter wijn in twee porties van vier liter met behulp van schenkkannen van drie, vijf en acht liter. Ik heb van een wiskundeleraar gehoord dat dit probleem hem op een vliegreis werd voorgelegd door zijn buurman, een gepensioneerd acteur, toen die ontdekte dat hij een wiskundige was. Een ongewone stap is ook vereist in het probleem van het tekenen – zonder je potlood van het papier te halen – van vier rechte lijnen door negen punten die in een vierkant staan (drie lijnen van drie stippen).

De schoolwiskunde voorbij

De traditie van 'doorvertelwiskunde' stopt niet aan de grenzen van de schoolwiskunde. De twee broers van Liesbeth behoren tot het domein van de logica, de honderd vogels hebben wat getaltheorie nodig, en het Hilberthotel gaat over de cardinaliteit van verzamelingen. Dit grensoverschrijdende aspect is wat deze problemen hun bijzondere smaak geeft. Ze behandelen iets anders (terwijl schoolwiskunde iedere keer opnieuw dezelfde onderwerpen heeft) en dat impliceert ook dat ze voor iedereen openstaan. Goed nadenken zou genoeg moeten zijn.

Van alle tijden

Niet ieder verhaal of probleem dat komt aanwaaien is eeuwenoud, maar veel zijn dat wel. Als dat het geval is, kunnen leraren dat gebruiken om aan de sfeer van het probleem bij te dragen. 'Jongeren', in ieder geval een deel van hen, dachten al vóór het jaar 1000 na over het probleem van de wolf, de geit en de kool, en het probleem van de afgebroken boom is zelfs twee keer zo oud. Dit maakt wiskunde tot een heel bijzonder gebied. De kennis wordt door tijd noch ruimte gehinderd. Waarom vertellen we dat niet aan onze leerlingen?

Een interessante vraag komt hier op: wat maakt een nieuw verhaal of probleem geschikt om op te nemen in de bestaande collectie? Voor mij zijn de drie vierkanten die de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ bewijzen zo'n verhaal. In de eerste plaats omdat ik het hoorde op een onverwachte plaats, en in de tweede plaats omdat ik het een leuk verhaal vind om te vertellen. Waarom? Ik denk dat het een bewijs is dat aanspreekt omdat het veel effect bereikt met eenvoudige middelen.

Plezier

Als de toehoorder er bedacht op is en hij of zij de positieve aspecten van de problemen die komen aanwaaien, herkent, dan is plezier verzekerd. En met plezier is de beste manier om wiskunde te leren en te onderwijzen!

Jan van Maanen,
Freudenthal Instituut, Utrecht

Literatuur

Euler, L. (1770). *Vollständige Anleitung zur Algebra.* St. Petersburg/(1911). In Weber, H. (Ed.), *Opera Om-*

nia, Series 1, Vol. 1. Leipzig, Berlijn: B.G. Teubner.

Folkerts, M. (1978). Die ältesten mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen Propositiones Ad Acuendos Iuvenes, Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition, *Österreichische Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften*, 116, Band 6. Abhandlung. Wien.

Hadley, J., & Singmaster, D. (1992). 'Problems to sharpen the young. An annotated translation of *Propositiones ad acuendos juvenes,* the oldest mathematical problem collection in Latin, attributed to Alcuin of York', *The mathematical gazette,* 76 No. 475, 102-106.

Tropfke, J. (1980). Geschichte der Elementarmathematik, 4. Auflage, Band 1. In K. Vogel, K. Reich & H. Gericke (Eds.), *Arithmetik und Algebra.* Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Waschkies, H.-J. (1971). 'Eine neue Hypothese zur Entdeckung der inkommensurablen Grössen durch die Griechen', *Archive for History of Exact Sciences,* 7, 325-353.

Meet the future

Science & Technology Summit
18 november 2010 | World Forum Den Haag

Op donderdag 18 november aanstaande vindt in het World Forum in Den Haag *Meet the future, Science & Technology Summit* plaats. Deze conferentie staat geheel in het teken van baanbrekende wetenschap en technologie.

Het programma van *Meet the future* is veelzijdig en actueel, en het biedt lezingen en masterclasses van topsprekers uit binnen- en buitenland, zoals van de Amerikaanse ingenieur Steve Wozniak, een van de oprichters van Apple, de wetenschapper en expert in hoogbegaafheid Joseph Renzulli, en uit Nederland Robbert Dijkgraaf, directeur van de KNAW en gelauwerd wiskundige.

Meet the Future

Kennis is de grondstof van de Nederlandse economie. Zo'n driekwart van de kenniswerkers is bèta of technicus. Excelleren van mensen in wetenschap en technologie is dus essentieel voor de toekomst van Nederland. De bezoeker van *Meet the future* maakt kennis met de nieuwste technologische ontwikkelingen en visionaire gedachten, en ontmoet de mensen die deze toekomst vorm gaan geven. Internationale topsprekers, jong talent, docenten, ondernemers en politici laten in een divers programma het belang van talentontwikkeling en bètatechniek zien.

Ga naar http://www.summit2010.nl voor meer informatie en om u aan te melden (deelname is gratis!).

Wiskunde C-conferentie

De vernieuwingscommissie cTWO organiseert op 4 maart 2011 op een nog nader te bepalen passende locatie in Utrecht voor docenten VO en andere belangstellenden een Wiskunde C-conferentie.

Aanleiding is het compleet vernieuwde examenprogramma voor het vak Wiskunde C zoals dat volgens plan met ingang van 2014 landelijk zal worden ingevoerd. Dit programma is volledig toegesneden op de belangstelling en mogelijkheden van de VWO-leerlingen in het profiel Cultuur en Maatschappij. De eerste ervaringen, zoals die het afgelopen cursusjaar 2009-2010 zijn opgedaan bij leerlingen en docenten van de pilotscholen, zijn dusdanig veelbelovend dat cTWO dit onder de aandacht van alle VO-docenten wil brengen. Temeer omdat in het huidige 2007-programma 60 slu beschikbaar zijn in de vorm van Keuzeonderwerpen, zodat hierbinnen onderdelen uit het vernieuwde programma uiterst goed inzetbaar zijn.

Ook zal aandacht besteed worden aan allerlei praktische en organisatorische zaken rondom het vak wiskunde C. De dag bestaat uit plenaire lezingen aan het begin en eind van de dag en daartussen een aantal workshops met medewerking van onder andere pilotdocenten en wellicht hun leerlingen.

Het complete programma en de definitieve locatie zullen binnenkort bekend worden gemaakt. De toegang is gratis, dus noteer 4 maart 2011 alvast in uw agenda!
We willen u er wel op wijzen dat u zich van te voren dient op te geven via het digitale aanmeldingsformulier op http://www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeC/ProgrammaCdag2011.html