Wat te bewijzen is (50)

Rubriek

Begin juni bezocht ik op uitnodiging van Daniel Zogg en Ursula Eisler de befaamde Eidgenossiges Technische Hochschüle (ETH) in Zürich. De reden voor die invitatie was mijn deelname aan een Weiterbildungskurs der DMK (de Duits-Zwitserse NVvW, zal ik maar zeggen) waarbij de boeken *Differenzieren-* en *Integrieren- do it yourself* (uitgever Orell Füssli) centraal stonden. Beide boeken, ik vermeld het niet zonder trots, zijn bewerkingen van enige Profi-pakketjes die rond 1997 door een team van het Freudenthal Instituut zijn ontwikkeld.
In de bibliotheek van de ETH mocht ik originele exemplaren van twee historische werken inzien: *Underweysung der Messung* van Albrecht Dürer (1528) en *Wisconstige Gedachtenissen* van Simon Stevin (1608). Aan het eerste werk heb ik al eerder aandacht in deze rubriek besteed. In dit stukje wil ik het hebben over een 'gedachtenis' van Stevin. Zijn boek, met de omvang van een Statenbijbel, is verbazingwekkend. Niet in het minst vanwege de ongelooflijke rijkdom aan onderwerpen uit de vlakke en bolmeetkunde, aardrijkskunde, sterrenkunde, mechanica en muziek. Een van de passages die mij in hoge mate verraste, ging over de boldriehoek.

Van den driehouckhandel

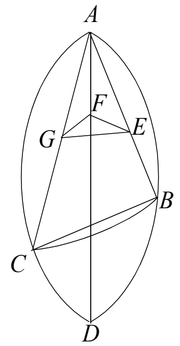
Stevin behandelt in het deel met deze naam eerst 'platte driehoucken'. Dat de som van de hoeken van een vlakke driehoek gelijk is aan twee rechte hoeken (180 'trappen'), neemt hij als bekend aan en gebruikt hij in voorbeelden. Daarna volgen de 'clootsche driehoucken'.
Zijn definitie van een boldriehoek luidt als volgt:

> Clootsche driehouck is, die in't clootvlack begrepen wordt tusschen drie grootste rondts boghen, elck kleiner dan een halfront

Stevin schreef uit principe niet in het Latijn (net als Dürer trouwens) en zijn 'Duyts' is met een beetje inspanning voor ons goed leesbaar. De lezer kan dit ervaren als hij al googlend *Stevins Wisconstige Gedachtenissen* opvraagt en digitaal gaat bladeren in zijn boek. In het hoofdstuk over boldriehoeken komt de stelling ('14de voorstel') dat de som van de hoeken van een boldriehoek groter is dan 180° op de proppen. Of in Stevins woorden:

> Des clootschen driehoucx driehoucken zijn 't samen grooter dan twee rechthoucken.

Zijn 'vertoogh' is strak georganiseerd: (I) *Tghegheven,* (II) *Tbegheerde,* (III) *Tbereytsel,* (IV) *Tbewys* en (V) *Tbesluyt*. Ik zal Stevins tekst nu verder in modern Nederlands parafraseren.
(I) luidt dan: laat ABC een sferische driehoek (boldriehoek) zijn met de drie hoeken A, B, C.
(II) zegt: we moeten bewijzen dat die drie hoeken samen groter zijn dan twee rechte hoeken.
In (III) wordt het bewijs voorbereid: de bogen AB en AC (delen van grote cirkels) worden verlengd tot ze elkaar ontmoeten in D (de tegenvoeter van A); dan tekent hij de koorden ('pezen') op de bogen AB, AC en BC. Op de koorde AB kiest Stevin een punt E en trekt vanuit E een loodlijn op de as AD (voetpunt F) om dan uit F nog een loodlijn op AD te trekken die de koorde AC in G snijdt. Nu staat alles klaar voor zijn bewijs (IV).



Stevin merkt daarin eerst op dat hoek GFE groter is dan hoek GAE, want zegt hij, GA en EA zijn respectievelijk langer dan GF en EF (*).
Hoek GFE is juist gelijk aan de sferische hoek tussen de bogen AB en AC, want GFE is ook de hoek tussen de vlakken van de grootcirkels, waarvan AB en AC bogen zijn (wij zouden misschien zeggen GF en FE zijn parallel met de raaklijnen in A aan de bogen AC en AB).
Conclusie: de sferische hoek CAB is groter dan de 'vlakke hoek' CAB.
Omdat op analoge wijze volgt dat de sferische hoeken ABC en BCA groter zijn dan de vlakke hoeken ABC en BCA en omdat de drie hoeken in de vlakke driehoek ABC samen gelijk zijn aan twee rechte hoeken, weten we dat de drie (sferische) hoeken in de boldriehoek ABC samen groter zijn dan twee rechte hoeken.
In (V) herhaalt Stevin zijn stelling om te eindigen met bijna de naam van deze rubriek in oud Nederlands: 'twelck wij bewijsen moesten'.

In de toelichting bij Stevins werk die ik op internet vond, staat letterlijk:

> Een boldriehoek heeft evenals een platte driehoek drie hoeken en drie zijden. De hoeken kunnen scherp, recht of stomp zijn en zijn samen meer dan 180° (zie het mooie bewijs van voorstel 14).

Toen ik in Zürich in Stevins werk bladerde, dacht ik ook: wat een helder bewijs. Wel bevreemdde het mij dat ik dit zo nooit op enige andere plaats had gezien. Reden genoeg om er in deze rubriek over te schrijven. Toen ik daarmee aan de slag ging, strandde ik bij (*).

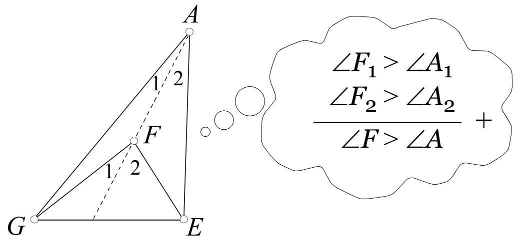
Dat GA en EA langer zijn dan GF en EF wordt verklaard met Pythagoras:

> Het viercant van GA is even an de twee viercanten van GF, GA : S'gehelijcx sal oock bethoont worden EA langher te sijn dan EF.

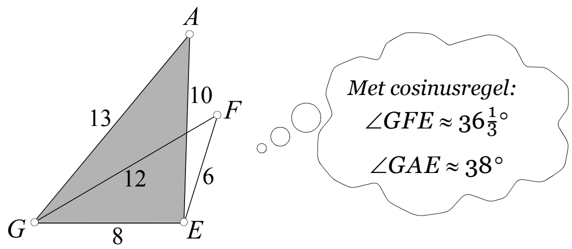
Eigenlijk is het raar dat Stevin zich hier niet beroept op de stelling dat tegenover de grootste hoek de grootste zijde ligt, want in zijn volgende voorstel poneert hij juist de sferische variant van deze stelling.
Vervolgens vroeg ik mij af waarom

$$|GA| > |GF| \quad \text{en} \quad |EA| > |EF| \Rightarrow \angle GFE > \angle GAE \qquad (**)$$

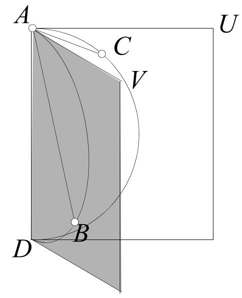
waar zou zijn. Toegegeven, als we de driehoeken GEA en GEF in één vlak plaatsen, waarbij GE de gemeenschappelijke basis is en als F dan binnen driehoek GEA valt, is het zonneklaar dat $\angle GFE$ groter dan $\angle GAE$ is.



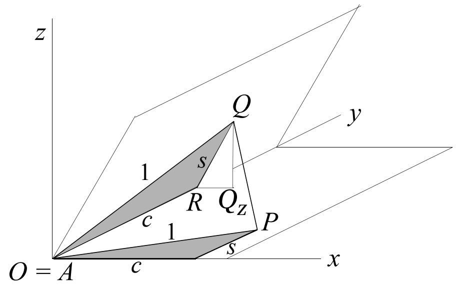
Maar als F nu eens net buiten die driehoek ligt? Dan gaat de oplossing met de hulplijn AF niet meer op! Vertrouwend op Stevin zocht ik naar een bewijs dat ook voor de laatste situatie zou opgaan. Daar slaagde ik niet in. Geen wonder, want uitspraak (**) is in zijn algemeenheid onwaar, zie het tegenvoorbeeld:



Dat Stevin een ondeugdelijk argument gebruikt, hoeft niet meteen te betekenen dat zijn bewering dat de hoeken van een boldriehoek ABC stuk voor stuk groter zijn dan die van de daarbij passende vlakke driehoek ABC, onwaar is. Ook hier leidde mijn poging tot bewijs echter naar een onverbiddelijk tegenvoorbeeld.
Zoals eerder is opgemerkt, is de hoek tussen twee grootcirkels (geodetische lijnen op de bol) gelijk aan de hoek tussen de vlakken van die cirkels. Neem het geval dat die hoek scherp is (zie figuur in de volgende kolom). De raaklijnen AU en AV aan de bol staan loodrecht op de middellijn AD. Als ik AC een piepkleine hoek laat maken met AU en AB een piepkleine hoek met AD, dan zal de hoek tussen AC en AB niet zoveel verschillen van de hoek tussen AU en AD, die 90° bedraagt. Kortom: naderen C en B – over hun grootcirkels – respectievelijk tot A en D, dan zal $\angle BAC$ op zeker moment groter zijn dan $\angle UAV$.



Daar kan ik ook nog wat aan rekenen. Stel $\angle UAV = 60°$ en stel de hoeken UAC en DAB beide gelijk aan δ. Voor het gemak kort ik af: $\cos\delta = c$ en $\sin\delta = s$.
Op de halve lijnen AC en AB kies ik de punten Q en P die evenver van A afliggen, zeg op afstand 1. Dan plaats ik de tweevlakshoek van $60°$ in een driedimensionaal stelsel $Oxyz$ waarbij de x-as langs AU valt en de y-as langs AD.



Vervolgens projecteer ik Q loodrecht op het Oxy-vlak (dat geeft Q_z) en op de y-as (R).
$\angle QRQ_z$ is nu een standhoek van de tweevlakshoek en dus heeft driehoek QRQ_z de hoeken $90°$, $60°$, $30°$. Daaruit volgt dat Q de coördinaten $(\frac{1}{2}s,\ c,\ \frac{1}{2}s\sqrt{3})$ heeft. Verder geldt $P = (c, s, 0)$. Nu volgt:

$$|PQ|^2 = (c - \tfrac{1}{2}s)^2 + (s - c)^2 + \tfrac{3}{4}s^2 = 2c^2 + 2s^2 - 3sc$$

en via $c^2 + s^2 = 1$ dus $|PQ|^2 = 2 - 3sc$.
Nu de cosinusregel in driehoek APQ:

$$2 - 3sc = 1 + 1 - 2\cos\angle PAQ$$

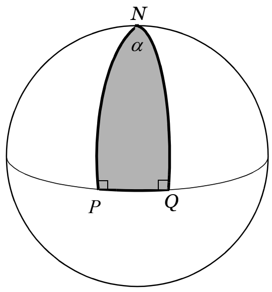
zodat: $\cos\angle PAQ = \frac{3}{2}sc$
Wil de hoek tussen OP en OQ groter zijn dan $60°$, dan moet gelden $\cos\angle PAQ < \cos 60°$ ofwel $\frac{3}{2}sc < \frac{1}{2}$.

Daaruit volgt dan: $2sc < \frac{2}{3}$ ofwel $\sin 2\delta < \frac{2}{3}$

Kortom: $\delta < \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$ en dit laatste getal correspondeert met een hoekgrootte van ongeveer $20{,}9°$.
Voor $\delta = 20°$ komt er $\angle PAQ \approx 61{,}2°$
Hoe kleiner δ, hoe groter $\angle PAQ$. Bijvoorbeeld bij $\delta = 15°$ is de exacte waarde van $\cos\angle PAQ$ gelijk aan $\frac{3}{8}$ en dat geeft $\angle PAQ \approx 68°$
Alles bij elkaar toch wel een schokkende ontdekking! Dat ook genieën weleens in de fout gaan, is voor gewone stervelingen eigenlijk heel bemoedigend. Maar dat op een wetenschappelijke site (nota bene van mijn eigen universiteit) Stevins bewijs kritiekloos als 'mooi' wordt gekwalificeerd, dat komt aan.

Sferisch exces

De stelling die Stevin poneerde is, zoals we weten, wel degelijk correct. De Franse wiskundige Albert Girard (1595-1632) die vanaf zijn twintigste jaar in Leiden werkte en die Stevins werk in het Frans vertaalde, is misschien de eerste die het begrip ‘sferisch exces’ hanteerde en gebruikte bij de hoekensom van een boldriehoek.
Om wat soms de stelling van Girard wordt genoemd te behandelen, begin ik met het voorbeeld van een boldriehoek PQN, ingesloten door de evenaar en twee meridianen die een hoek α met elkaar maken. Hierbij neem ik de radiaal als hoekmaat en stel ik $0 < \alpha < \pi$. De som van de drie hoeken van deze boldriehoek is nu $\pi + \alpha$, een overschrijding dus van α ten opzichte van de hoekensom van de vlakke driehoek PQN.

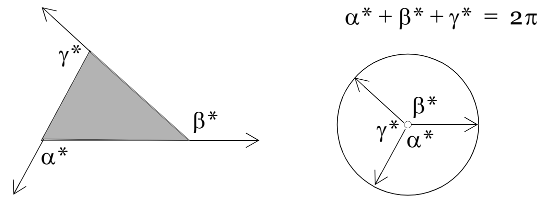


Die overschrijding wordt *sferisch exces* genoemd.
Hoe groter α, hoe groter het sferisch exces. Maar ook: hoe groter de oppervlakte van boldriehoek PQN. Die oppervlakte kan worden uitgedrukt in de straal van de bol (zeg r) en de hoek α. Zij is gelijk aan het $\frac{\alpha}{2\pi}$ -de deel van de oppervlakte van de halve bol), zodat

$$\text{opp.}PQN = \frac{\alpha}{2\pi} \times 2\pi r^2 = \alpha r^2 .$$

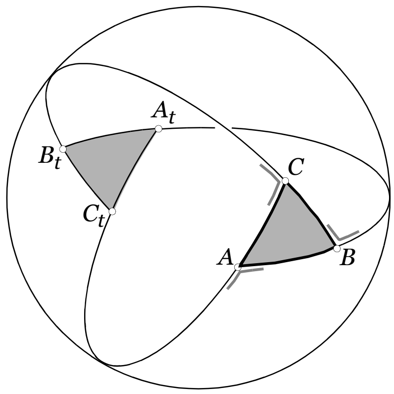
Wie dit solide wil bewijzen, zal eerst het geval dat α een rationaal deel van 2π is onder de loep moeten nemen om daarna voor irrationale α een limietproces te hanteren.
Ik kan nu dus zeggen dat het sferisch exces van boldriehoek PQN gelijk is aan de oppervlakte van die driehoek gedeeld door r^2. Deze eigenschap is niet alleen geldig voor de bijzondere boldriehoeken met een evenaarboog als basis en een pool als top, maar voor *alle* boldriehoeken. Voor een bewijs van deze bewering is het begrip ‘boltweehoek’ handig.
Twee halve grootcirkels met gemeenschappelijke eindpunten (en die niet in hetzelfde vlak liggen) vormen een boltweehoek. Zo’n boltweehoek verdeelt de bol in twee delen: het binnengebied (dat de hoek $< \pi$ bevat) en het buitengebied. Als de beide binnenhoeken van de boltweehoek gelijk zijn aan α, dan volgt uit het voorgaande direct dat de oppervlakte gelijk is aan $2\alpha r^2$.

Bij wijze van intermezzo kijk ik nu eerst even naar een vlakke driehoek ABC met hoeken α, β en γ. De eigenschap $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ is zoals bekend equivalent met het parallellenaxioma en bij een bewijs in Euclidische stijl wordt gebruik gemaakt van een lijn door een hoekpunt evenwijdig aan de overstaande zijde. De stelling is ook gelijkwaardig met $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 2\pi$, waarbij α^*, β^* en γ^* de buitenhoeken van de driehoek zijn en die je de rondloopstelling zou kunnen noemen.



Terzijde: de rondloopstelling (som buitenhoeken is 2π) geldt voor alle convexe veelhoeken.

Ook bij de boldriehoek is het een goed idee om eerst naar de buitenhoeken te kijken. In de figuur is driehoek ABC met zijn tegenvoet-driehoek $A_tB_tC_t$ getekend.



In de buitenhoeken van ABC passen de boltweehoeken AA_t, BB_t en CC_t. Die drie tweevlakshoeken vormen tezamen met de twee boldriehoeken ABC en $A_tB_tC_t$ het gehele boloppervlak (met oppervlakte $4\pi r^2$). Noem nu de hoeken van de twee boldriehoeken α, β en γ.
De oppervlakten van de boltweehoeken AA_t, BB_t en CC_t zijn dan $2(\pi - \alpha)r^2$, $2(\pi - \beta)r^2$ en $2(\pi - \gamma)r^2$.
Conclusie:
$2 \times \text{opp.}ABC + 2(\pi - \alpha)r^2 + 2(\pi - \beta)r^2 + 2(\pi - \gamma)r^2 = 4\pi r^2$
en daaruit volgt dan na enige herleiding:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\text{opp.}ABC}{r^2}$$

Hieruit is wel duidelijk waarom wij bij driehoeksmeting op aarde er zo weinig van merken dat de hoekensom van een driehoek groter is dan een gestrekte hoek.
Stel je voor een driehoek in de Sahara, waarbij de drie hoekpunten op gelijke hoogte boven de zeespiegel liggen en waarvan de zijden 30, 40 en 50 km lang zijn. De oppervlakte van die driehoek verschilt heel weinig van 600 km^2. Omdat de straal van de aarde zo’n 6380 km is, zal het sferisch exces van de driehoek zeker kleiner zijn dan $\frac{600}{6000 \times 6000} = \frac{1}{60000}$ radiaal en dus kleiner dan een duizendste graad.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl