

In elke aflevering van de rubriek *Wat bedoelen ze toch met...* staat een spraakmakend begrip uit de wiskundendidactiek of de onderwijskunde centraal, waarover veel is geschreven, maar waarvan toepassing in de wiskundeles niet altijd meteen duidelijk is. Wat wordt met het wetenschappelijk jargon bedoeld en hoe vertaalt zich dit naar de onderwijspraktijk? In de eerste aflevering schrijft **Paul Drijvers** over het woord ‘realistisch’ in de uitdrukking ‘realistisch wiskundeonderwijs’.

Wat bedoelen ze toch met... *realistisch*?

Rubriek

Inleiding

Het Nederlandse wiskundeonderwijs wordt zowel in eigen land als daarbuiten veelal beschouwd als realistisch. Over realistisch wiskundeonderwijs (in het Engels *Realistic Mathematics Education* of RME) is veel geschreven. Maar hoe is dit woord eigenlijk in de wiskundendidactiek terecht gekomen? Wat wordt ermee bedoeld en welke misverstanden bestaan erover? Is ons onderwijs wel zo realistisch? Over deze vragen gaat dit korte stuk.

Een voorbeeld uit de praktijk

64 Het grasveld van meneer Kok is 15 bij 20 meter. Meneer Kok besluit het grasveld te vergroten. Aan twee kanten komt er een even brede strook van x meter bij. Zie figuur 7.16.

a Toon aan dat de oppervlakte van het vergrote grasveld gegeven is door $\text{opp} = x^2 + 35x + 300$.

b Het nieuwe grasveld heeft een oppervlakte van 374 m^2 .
Stel een vergelijking op en bereken hoeveel meter de strook breed is.

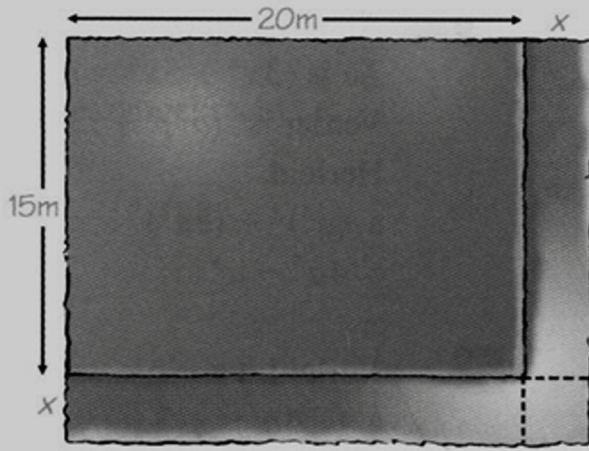


Fig. 7.16

fig. 1 Opgave uit een Nederlandse wiskundemethode.

Figuur 1 toont een opgave uit een al wat oudere editie van een Nederlandse wiskundemethode. Het gaat om klas 3 hv. Ik heb deze opgave bij verschillende gelegenheden aan wiskundeleraren in opleiding voorgelegd met de vraag hoe ze oordelen over het realistische karakter ervan. De uitkomst was steeds positief.

Ik deel dit positieve oordeel niet. Natuurlijk, een tuintje met een gazon is heel voorstelbaar en op parkeerterreinen van tuincentra worden op zaterdagochtend de rolletjes graszoden massaal in de auto geladen. Maar als je met die rolletjes aan het sjouwen bent, dan weet je toch ook wel hoe breed ze ongeveer zijn? En als je je gazon uitbreidt, dan heb je toch een plan voor de nieuwe afmetingen? En stel dat je maar wat deed en na afloop wilt weten wat het is geworden, dan ga je toch niet lengte en breedte meten, om dan een rekenmachine te zoeken, de afmetingen te vermenigvuldigen en te zien dat je nu 374 m^2 hebt en je vervolgens af te vragen hoe breed de strook is? Meet die breedte dan meteen op, zou ik zeggen! Het zijn vast dergelijke opgaven die Keune in zijn oratie in 1998 al deden schrijven:

De nieuwste trend in het wiskundeonderwijs is realistische wiskunde. Ik heb al betoogd dat wiskunde bij uitstek abstract is. Wiskunde is niet realistisch. Realistische wiskunde bestaat niet. Met zoiets bereik je niks, evenmin als met abstract voetballen. (Keune, 1998)

Realistisch in theorie

In 1979 gebruikte Treffers het woord ‘realistisch’ voor het eerst als hij schrijft:

De realistische richting waartoe Wiskobas zich rekent, gaat uit van de realiteit, i.c. de wereld van het kind, wat inhoudt dat zij probeert de verschijningsvormen van wiskundige fenomenen op te sporen die in de wereld van het kind passen, dus waaraan het kind betekenis en zin kan geven. (Treffers, 1979, p. 12-13)

Verderop in genoemde bundel vergelijkt hij de ‘realistische richting’ met de structurele en de empirische. Het Engelse ‘realistic mathematics education’ komt voor het eerst voor in de titel van een bijdrage van

Treffers en Goffree aan de PME-conferentie te Noordwijkerhout. Sinds die tijd is het begrip ‘realistisch reken-wiskundeonderwijs’ een veelgebruikte uitdrukking in ons vakgebied.

Maar wat wordt er nu bedoeld met ‘realistisch’? Het citaat van Treffers verwijst al naar de relatie tussen wiskunde en de *realiteit*. Freudenthal schreef hierover in 1973 (p. 77): “reality [is] the framework to which mathematics attaches itself.” Dat zou Keune wellicht met hem eens zijn:

Natuurlijk ligt de kracht van de wiskunde in haar relatie met de realiteit: de realiteit van de wereld om ons heen en de realiteit in de zin van natuur en techniek. (Keune, 1998)

Verder verbindt Freudenthal realiteit met *common sense* – zeg maar gezond verstand – en met eigen ervaring:

I prefer to apply the term ‘reality’ to what at a certain stage common sense experiences as real. (Freudenthal, 1991, p. 17)

Ook Streefland (1988, p. 22) ziet een band tussen realiteit en wiskunde: “... dat de realiteit zich aandient als *bron* voor de voort te brengen wiskunde. [...] De realiteit is dus ook toepassingsgebied.”

Kortom, wiskunde houdt verband met de realiteit en wiskundeonderwijs kan en moet deze relatie uitbuiten. Realiteit is echter *meer dan de fysieke werkelijkheid*. Een tweede kant van het begrip ‘realistisch’ is dan ook dat de probleemsituatie waarin wiskunde werkt door leerlingen wordt *ervaren* als ‘echt’, niet alleen in de zin van aansluitend bij de fysieke werkelijkheid, maar aansluiten bij eigen ervaring, die bijvoorbeeld ook de (wiskundige) voorkennis van de leerling omvat.

... situaties die de leerling als reëel ervaart; situaties die *experientially real* zijn – om een uitdrukking van Cobb te gebruiken – in de zin dat leerlingen direct weten hoe je daarbinnen op een zinvolle manier kunt handelen en redeneren. [...] Deze werkelijkheid beperkt zich niet tot de fysieke werkelijkheid om ons heen, maar omvat ook mentale activiteiten en mentale objecten. (Gravemeijer, 2005, p. 108-109)

Realiteit omvat dus meer dan de tastbare werkelijkheid ons heen. Maar het woord ‘realistisch’ heeft nog een derde facet. Vanaf de introductie van dit woord is men zich bewust geweest van het gevaar van een te beperkte interpretatie dat de wiskunde altijd gekoppeld zou moeten zijn aan alledaagse contexten en situaties en dat opgaven ingebed moeten worden in verhaaltjes. Daarom is wellicht de belangrijkste betekenis van het woord het *zich realiseren* of zich bewust zijn. Marja van den Heuvel omschrijft dit als volgt:

The students must be aware of both the situation and the corresponding problem, and must image themselves in the situation. (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996, p. 13)

Leerlingen moeten zich realiseren wat ze doen als ze met wiskunde bezig zijn: zich de probleemsituaties kunnen voorstellen, zich er een beeld van kunnen vor-

men, dit kunnen verbinden met eigen ervaring, er betekenis aan kunnen geven en de zin ervan inzien, en zich bewust zijn van wat ze doen en waarom, inzicht in de methode hebben en zich ervan gewisselen (Wiskundel) dat deze correct is. Deze interpretatie staat dicht bij Freudenthals uitgangspunt van wiskunde als menselijke activiteit; in de beeldvorming van realistisch wiskundeonderwijs is dit aspect echter onvoldoende voor het voetlicht gekomen.

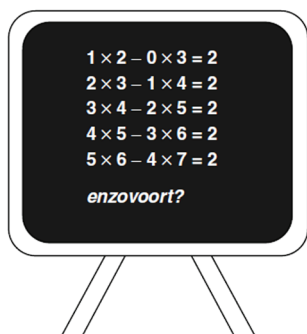
Terug naar de praktijk

Als we vanuit deze drievoudige uitleg van het woord ‘realistisch’ terugkijken naar de opgave in figuur 1, dan begrijpt u mijn reserve misschien beter. Een gekunstelde opgave als deze doet geen beroep op common sense, sluit niet aan op de ervaring van de leerling en is verre van ‘echt’, zinvol of betekenisvol. In plaats van zich te realiseren wat er werkelijk aan de hand is, worden leerlingen in dit type opgaven (want dit voorbeeld staat niet op zichzelf) uitgenodigd om uit een onwaarschijnlijk verhaaltje de juiste gegevens te destilleren waarmee het gevraagde wiskundige kunstje kan worden uitgevoerd. Leerlingen leren zich in auteurs van schoolmethoden te verplaatsen, maar dit draagt niet bij aan het ervaren van wiskunde als zinvol of aan het zich realiseren wat je met wiskunde kunt doen (Drijvers, 2006). Leerlingen kunnen best wennen aan dergelijke opgaven, maar leren ze dan ook wiskunde? En is dit realistisch? Naar mijn mening niet.

De praktijk is dus weerbarstig. Hoe zou het anders kunnen? Laat ik een tweede voorbeeld geven, dat in het algemeen door leraren in opleiding niet als realistisch wordt beschouwd. Figuur 2 toont een opgave uit een bundel van Martin Kindt, die geïnspireerd is op Sawyers boek *Aanschoumelijke algebra*. Op een ouderwets ogend schoolbord staat een rijtje sommen die allemaal als uitkomst 2 hebben. Leerlingen wordt gevraagd het rijtje voort te zetten en te verklaren waarom de uitkomst in elk geval 2 blijft. In algebraïsche termen komt deze verklaring neer op het uitwerken van $n(n+1) - (n-1)(n+2)$. In de bundel wordt dit met het oppervlaktemodel geïllustreerd en wordt deze opgave gevolgd door een variant en door de opdracht om zelf een vergelijkbaar rijtje te produceren en te onderbouwen.

Is dit nu realistisch, zo’n schoolbord met saaie reken-sommen in het tijdperk van flitsende digitale whiteboards? Als we ons een leerling van klas 2hv of 3hv voor ogen nemen, dan kunnen we ervan uitgaan dat hij vertrouwd is met de rekensommetjes van deze opgave. Hij heeft er al veel gezien op de basisschool, ze betekenen iets voor hem en hij kan ze uitrekenen. Hoewel getallen in wezen abstract zijn, zijn ze door deze ervaringen geleidelijk ingebed in zijn leefwereld

(Kindt, 1998). Doordat de uitkomst steeds 2 is, realiseert hij zich: in de vertrouwde wereld van eenvoudige rekensommen doen zich soms dus opmerkelijke zaken voor! Komt er echt altijd 2 uit, waarom, hoe kun je dat snappen? Dit zijn echte gezond-verstand-vragen. Dat wiskunde, in dit geval algebra, gereedschap is om deze vragen met zekerheid te beantwoorden, legitimeert de algebra en maakt haar zinvol. In aansluiting op de hierboven gegeven interpretatie van het woord ‘realistisch’ beschouw ik dit dus als een ongekunstelde, realistische opgave voor het niveau 2/3 hv.



- Controleer de sommetjes op het bord. en zet het rijtje nog beetje voort. Sterk toch?
- Bedenk ook nog een paar sommen die bij voortzetting veel verder in de rij zouden voorkomen. Kan je er op rekenen dat uitkomst steeds 2 is?

fig. 2 Opgave uit ‘Oefeningen in algebra’ van Martin Kindt.

Realistisch is relatief

De toevoeging ‘voor het niveau 2/3 hv’ aan het einde van de vorige zin maakt duidelijk dat wat realistisch is, gerelateerd is aan de specifieke onderwijssituatie: de leeftijd en het niveau van de leerling spelen een belangrijke rol, evenals het doel van het onderwijs. Een leerling in het basisonderwijs heeft een andere ervaringswereld dan een leerling die voor het eindexamen VO staat en heeft dan ook behoefte aan concretere probleemsituaties, waar die in het VO in toenemende mate abstracter kunnen zijn. Voor een leerling in het VMBO ontleent wiskunde wellicht vooral betekenis aan de toepassing in de praktijkvakken, terwijl de zin van wiskunde voor een VWO’er met een N-profiel meer ligt in de rol die ze speelt in de natuurwetenschappen. Kortom, de manier waarop wiskundeonderwijs wordt ervaren als betekenisvol en realistisch, is sterk situatieafhankelijk, en in die zin is realistisch relatief.

Conclusie

Samengevat moet het woord ‘realistisch’ in ‘realistisch wiskundeonderwijs’ niet enkel worden opgevat als ‘verbonden met het dagelijks leven’, maar vooral ook als betekenisvol aansluitend bij common sense en

eigen ervaring en voorkennis, en als verwijzend naar het zich realiseren. Een interpretatie die zich beperkt tot het eerste punt leidt in het voortgezet onderwijs tot een gekunstelde opgavencultuur.

De uitwerking van dit idee van realistisch in de onderwijspraktijk is relatief en hangt af van factoren als leeftijd en niveau van de leerling en doel van het onderwijs.

De vraag die dit oproept is natuurlijk: als het woord ‘realistisch’ dan tot zo veel misverstanden leidt, is het dan wel het juiste woord? Kunnen we niet beter spreken van zich realiserend, betekenisvol, ervaringsgebaseerd, of common sense wiskundeonderwijs? Achteraf gezien is de keuze van het woord ‘realistisch’ misschien niet helemaal gelukkig geweest. Maar de term is zo gangbaar geworden, dat het nu niet eenvoudig is deze te veranderen. Wel pleit ik voor een genuanceerdere interpretatie die meer recht doet aan de oorspronkelijke intenties en bovendien de valkuilen van een te beperkte opvatting vermijdt.

Paul Drijvers,

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Literatuur

- Drijvers, P. (2006). Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/7, 198-203.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer.
- Gravemeijer, K. (2005). Revisiting ‘Mathematics education revisited’. In H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (Eds.), *Freudenthal 100*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β press.
- Keune, F. (1998). *Naar de knoppen*. Nijmegen: Radboud Universiteit. <http://www.math.ru.nl/~keune/oratie/oratie.html>.
- Kindt, M. (1998). Hoe realistisch is abstract? Beknopt weerwoord. *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 17(4), 49.
- Kindt, M. (2003). *Oefeningen in algebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Utrecht: OW&OC.
- Treffers, A. (Ed.) (1979). *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1), Overzicht en achtergronden. Leerplanpublicatie 10*. Utrecht: IOWO.