

Wat te bewijzen is

Rubriek

De boeken van David Wells zijn rijke bronnen van mooie wiskunde. Het recente werk: *You are a Mathematician*, met als ondertitel *a wise & witty introduction to the joy of numbers*, is daarvan de zoveelste proeve.

Probleem 21 uit dit boek toont een veelbelovend patroon:

$$\begin{aligned}3^2 + 4^2 &= 5^2 \\10^2 + 11^2 + 12^2 &= 13^2 + 14^2 \\21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 &= 25^2 + 26^2 + 27^2\end{aligned}$$

Wonderbaarlijk? In elk geval verrassend. Wells geeft een sterke aanwijzing in de richting van de rij van 'driehoeksgetallen': 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

Het lijkt erop of de driehoeksgetallen met even rangnummer steeds als eerste grondtal optreden. Even proberen:

$$36^2 + 37^2 + \dots + 40^2 = 7230 = 41^2 + \dots + 44^2$$

Dat geeft de burger moed maar geen zekerheid, laat staan inzicht. Er is echter een vermoeden en daar kan ik nu met algebra tegenaan. Toen ik ging nadenken over hoe je met leerlingen dit patroon zou kunnen onderzoeken, kwam ik tot de onverwachte ontdekking, dat de goede oude theorie van de vierkantsvergelijking uitkomst biedt.

Om te beginnen zou je de vraag kunnen stellen of er, behalve de getallen 3, 4 en 5, nóg drie opvolgende gehele getallen zijn die een 'Pythagorees drietal' vormen. Dit leidt tot de vergelijking:

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

die zich simpel laat oplossen tot: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Naast het beroemde drietal 3, 4, 5 bestaat er dus slechts het tripel: -1, 0, 1 met de gewenste eigenschap.

Analoog voor de tweede regel van het patroon:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2$$

met $x_1 = -2$, $x_2 = 10$. De eerste oplossing geeft een trivialeit: $(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2$, de tweede bevestigt de tweede regel van het patroon. Maar juist die triviale regel opent perspectieven! Het is namelijk direct duidelijk dat je oneindig veel van zulke regels kunt produceren, steeds beginnend met het kwadraat van een negatief getal. De vergelijkingen die je kunt opstellen om regels van het patroon te vinden, hebben dus steeds een negatief-gehele oplossing! Maar als je één oplossing van een vierkantsvergelijking weet, krijg je de andere bijna gratis. Uit het blote hoofd kan ik (gelet op de som van de wortels!) zien dat die andere positief-geheel zal zijn en dus kun je alsmaar nieuwe regels in het schema maken; de oneindige voortgang is verzekerd. Blijft de vraag hoe het pre-

cies zit met de driehoeksgetallen. Bij wijze van paradigma bekijk ik de zeventiende regel van het schema.

De triviale oplossing van:

$$x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+17)^2 = (x+18)^2 + \dots + (x+34)^2$$

is nu: $x_1 = -17$.

Als ik de vierkantsvergelijking in de standaardvorm:

$$x^2 + px + q = 0$$

wil brengen, levert dit op:

$$p = 2(1 + \dots + 17) - 2(18 + \dots + 34)$$

en

$$q = (1^2 + \dots + 17^2) - (18^2 + \dots + 34^2)$$

Denkend aan:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q$$

weet ik dat $-p$ voor de som en q voor het product van x_1 en x_2 staat.

Je kunt nu q bijvoorbeeld zó herschrijven:

$$q = (1^2 - 18^2) + (2^2 - 19^2) + \dots + (17^2 - 34^2)$$

Elke term van deze vorm is deelbaar door 17:

$$1^2 - 18^2 = (1 - 18)(1 + 18) = (-17)(1 + 18)$$

$$2^2 - 19^2 = (2 - 19)(2 + 19) = (-17)(2 + 19)$$

$$3^2 - 20^2 = (3 - 20)(3 + 20) = (-17)(3 + 20)$$

enzovoort tot en met:

$$17^2 - 34^2 = (17 - 34)(17 + 34) = (-17)(17 + 34)$$

Uit $-17x_2 = q$ volgt na hergroeperen: $x_2 = 1 + 2 + \dots + 34$, jazerker: het vierendertigste driehoeksgetal.

De stap van 17 naar n is slechts een formaliteit.

Het lukt ook via de somformule:

$$-p = 2[(18 - 1) + (19 - 2) + \dots + (34 - 17)]$$

Het rechterlid $= 2 \times 17 \times 17$ en daarvan $x_1 = -17$ afgetrokken geeft $x_2 = 35 \times 17 = \frac{1}{2} \times 34 \times 35$, een andere gedaante van het vierendertigste driehoeksgetal.

Een alternatief voor de 'berekening via $-p$ ' is om te werken met de bekende driehoekige stippenpatronen, zoals die reeds in de Griekse wiskunde figureerden (Nikomachos bijvoorbeeld). Dan krijgt het bewijs nog een leuk geometrisch tintje. De lezer wordt van harte uitgenodigd dit te onderzoeken.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl